Skripte zur Mathematik

Stochastik

von

Christian Wyss

Skripte zur Mathematik

Stochastik

von

Christian Wyss

mathema

tredition

Verlagslabel: mathema (www.mathema.ch)

ISBN Hardcover: 978-3-384-16132-1
Paperback: 978-3-384-16131-4

Auflage 1.2

Druck und Distribution im Auftrag des Autors:
tredition GmbH, Heinz-Beusen-Stieg 5, 22926 Ahrensburg, Germany

Dr. Christian Wyss, Chemin du Clos 60, 2502 Biel-Bienne, Schweiz.

Die Philosophie steht in diesem grossen Buch geschrieben, das unserem Blick ständig offen liegt – ich meine das Universum –; aber das Buch ist nicht zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt und sich mit den Buchstaben vertraut gemacht hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, und deren Buchstaben sind Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren, ohne die es dem Menschen unmöglich ist, ein einziges Bild davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen Labyrinth herum.

Galileo Galilei: „*Il Saggiatore*“ (1623)

Inhaltsverzeichnis

Einleitende Worte

Diese Skripte zur Mathematik sind im Rahmen des Gymnasialunterrichts entstanden. Sie können als eigenständiges Lern- und Übungsmaterial eingesetzt werden. Sie sind jedoch primär als *unterrichtsbegleitendes Material* konzipiert. Eine Einführung und Anleitung durch eine Lehrperson wird daher empfohlen.

Die Skripte enthalten *Lückentexte*. Sie dienen der Festigung des erworbenen Wissens und sollten im Plenum mit der gesamten Klasse ausgefüllt werden. Diese handschriftlichen Einträge helfen, die Schlüsselbegriffe und Aussagen zu verinnerlichen und Herleitungen und Beweise besser nachzuvollziehen.

Zu den Übungen

Um den Stoff zu vertiefen und zu festigen, halte ich es für unerlässlich, dass die Schülerinnen und Schüler eine Vielzahl von Übungen lösen. Die Skripte enthalten daher viele Übungen, die nicht nur das Erlernte festigen, sondern auch inner- und aussermathematische Anwendungen aufzeigen. Einige Übungen sind bewusst anspruchsvoller gestaltet und gehen über den üblichen Lehrstoff hinaus, können jedoch bei Bedarf übersprungen werden. Ein Stern ★ markiert, dass es sich bei der Aufgabe um eine zusätzliche Übung handelt, die über den obligatorischen Lernstoff hinausgeht. Im Folgenden werden die unterschiedlichen Übungstypen kurz erläutert.

Einstiegsbeispiel

Ein Einführungsbeispiel stellt eine Aufgabe dar, die eine neu einzuführende Thematik exemplarisch vorstellt. Diese Aufgabe soll die grundlegenden Begriffe der neuen Thematik vorwegnehmen und damit einführen. Dabei darf die Aufgabe einen gewissen Anspruch haben. Ein gemeinsames Lösen dieser Aufgaben im Plenum oder eine detaillierte Besprechung empfiehlt sich, um das Verständnis zu fördern.

Grundaufgaben

Eine Grundaufgabe ist eine Übungsaufgabe, die von den Schülerinnen und Schülern routiniert und sicher gelöst werden sollte. Durch die Bearbeitung mehrerer dieser Aufgaben sollen die Lernenden die Struktur verstehen und sich mit dem Lösungsweg vertraut machen, um ihn anschliessend situationsbezogen bei weiterführenden Aufgaben anwenden zu können.

Erarbeitungsaufgaben

Erarbeitungsaufgaben sind konzipiert, um den Lernstoff zu entwickeln und die Schülerinnen und Schüler konstruktivistisch an die neue Theorie heranzuführen.

Anwendungsaufgaben

Das erworbene theoretische Wissen hat in der Regel sowohl inner- als auch aussermathematische Anwendungen. Anwendungsaufgaben sollen die Fähigkeit zur Mathematisierung fördern und die Anwendbarkeit des Gelernten verdeutlichen.

Beweisaufgaben

In Beweisaufgaben lernen die Schülerinnen und Schüler, selbstständig einfache Beweise zu führen.

Zu den Titelbildern

Die Titelblätter bieten die Möglichkeit, verschiedene Aspekte der Mathematik mit den Schülerinnen und Schülern zu thematisieren. Dies umfasst insbesondere folgende Bereiche:

Mathematik und Ästhetik

Mathematik und Kunst stehen auf vielfältige Weise in Beziehung. Ihre Verbindung zeigt sich in Musik, Malerei, Architektur, Skulptur und Textilgestaltung etc. Die Titelblätter zielen darauf ab, die Schönheit der Mathematik anhand der bildenden Kunst aufzuzeigen.

Rechenhilfsmittel

„Es ist unwürdig, die Zeit von hervorragenden Leuten mit knechtischen Rechenarbeiten zu verschwenden, weil bei Einsatz einer Maschine auch der Einfältigste die Ergebnisse sicher hinschreiben kann." G. W. Leibniz (1673).
Der Mensch hat bereits in der Frühzeit Rechenhilfsmittel entwickelt, angefangen vom Kerbholz über mechanische Rechenmaschinen bis hin zu analogen und digitalen Computern. Die Titelblätter illustrieren diese Entwicklung.

Geschichte der Mathematik

Die Geschichte der Mathematik reicht zurück bis ins Altertum und den Anfängen des Zählens in der Jungsteinzeit. Mathematik wurde und wird in allen Kulturkreisen praktiziert. Die Titelblätter thematisieren bedeutende Werke der Mathematik sowie herausragende Mathematikerinnen und Mathematiker, die die Entwicklung dieser Disziplin massgeblich beeinflusst haben.

Zu den Inhalten

Allgemeines

Die Aufteilung des Stoffes in mehrere Skripte dient der Flexibilität bei der Gestaltung des Unterrichts. Da Mathematik eine stark hierarchische Struktur aufweist, kann der Stoff nicht in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Skripte sind in einer möglichen Bearbeitungsreihenfolge angeordnet.

Einige Skripte (Regressionsanalyse und Wahrscheinlichkeit) in diesem Sammelband behandeln auch Inhalte des fortgeschrittenen Curriculums. Bei diesen werden grundlegende mathematische Kenntnisse vorausgesetzt. Dazu gehören Kenntnisse in Arithmetik und Algebra: Termumformungen, Gleichungen (insbesondere lineare und quadratische), Potenzen und Logarithmen usw.

Im Folgenden wird kurz dargelegt, welches spezifische Vorwissen für jede Einheit zusätzlich erforderlich ist.

Kombinatorik

Behandelter Stoff

In diesem Skript werden die grundlegenden Abzähltechniken der Kombinatorik vermittelt. Das fundamentale Abzählprinzip wird verwendet, um geordnete (Variationen) und ungeordnete (Kombinationen) Stichproben mit oder ohne Zurücklegen zu behandeln. Dabei werden die Konzepte der Fakultät und des Binomialkoeffizienten eingeführt. Die beigefügte Werkstatt zur Kombinatorik dient als Einführung in das Thema.

Notwendiges Vorwissen

Die Kombinatorik erfordert nur sehr grundlegende mathematische Fähigkeiten und kann auf nahezu jeder Schulstufe behandelt werden.

Deskriptive Statistik

Behandelter Stoff

In diesem Skript werden verschiedene Arten von Daten sowie ihre Visualisierungen, einschliesslich des Boxplots, diskutiert. Es werden die Grundbegriffe der deskriptiven Statistik eingeführt (Stichprobenumfang, absolute und relative Häufigkeit etc.). Des Weiteren werden die beschreibenden Lageparameter (Mittelwert, Median und Modus) und Streuparameter (Spannweite, Interquartilsabstand, Varianz und Standardabweichung) behandelt, um anschliessend Daten damit auszuwerten (dies auch mit Bildung von Klassen). Abschliessend wird auf die Korrelation eingegangen, insbesondere auf den Pearson'sche-Korrelationskoeffizienten und den Ranglisten-Korrelationskoeffizienten, sowie auf das Konzept der Kausalität.

Notwendiges Vorwissen

Die deskriptive Statistik – so wie hier behandelt – erfordert nur sehr grundlegende mathematische Fähigkeiten und kann auf nahezu jeder Schulstufe behandelt werden.

Regressionsanalyse

Behandelter Stoff

Das Konzept der Regression wird eingeführt und anhand der linearen Regression im Detail diskutiert. Dabei werden die Ausdrücke für die Regressionsparameter hergeleitet und angewendet. Der Pearson-Korrelationskoeffizient, der Ranglisten-Korrelationskoeffizient und das Bestimmtheitsmaß werden ebenfalls erläutert. Zudem werden nichtlineare Regressionen wie exponentielle, logarithmische und Potenzregressionen mithilfe der Logarithmengesetze gelöst.

Notwendiges Vorwissen

Für die Herleitung der Regressionsparameter ist das Verständnis der Differentialrechnung erforderlich. Bei den nichtlinearen Regressionen werden die Logarithmengesetze angewendet, um die Modelle anzupassen.

Wahrscheinlichkeit

Behandelter Stoff

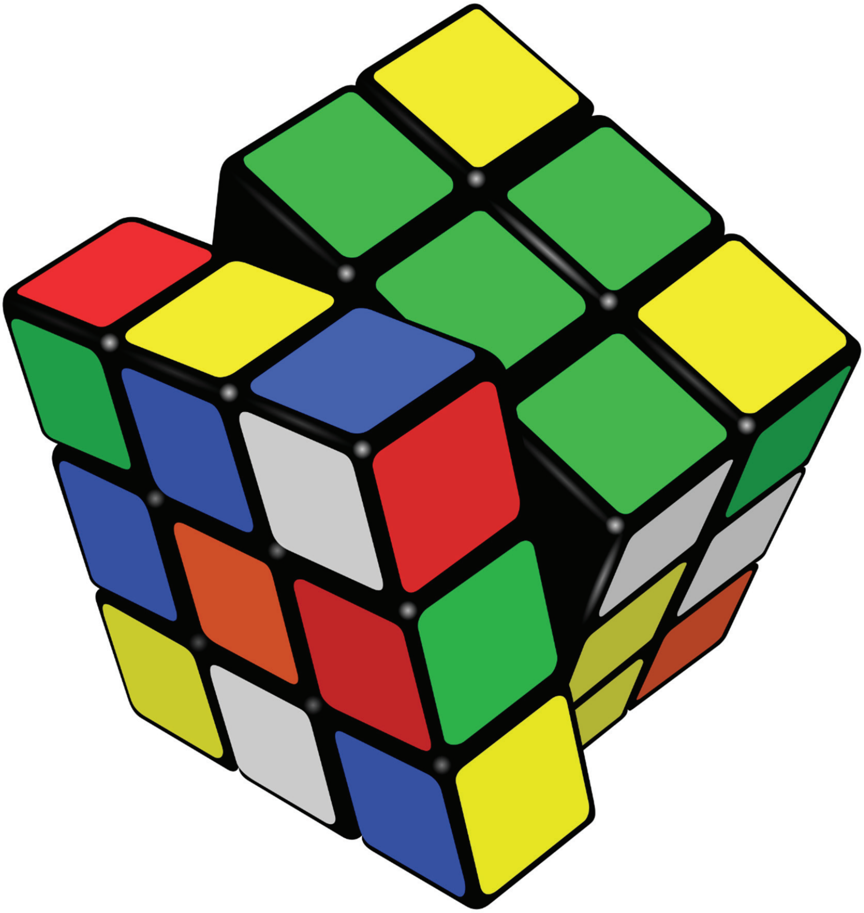
Die Wahrscheinlichkeit wird am Laplace-Experiment definiert, und die Grundbegriffe werden eingeführt, wie unmögliches und sicheres Ereignis, die logischen Verknüpfungen, Gegenereignis und unvereinbare Ereignisse. Auch die bedingte Wahrscheinlichkeit wird diskutiert, und es werden zahlreiche Anwendungsaufgaben dazu angeboten. Des Weiteren werden Zufallsvariablen und deren Verteilungen definiert, wobei Lage- und Streuparameter eingeführt werden. Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen wie die Gleichverteilung, Binomialverteilung und Normalverteilung werden im Detail studiert und für das Testen von Hypothesen angewendet.

Notwendiges Vorwissen

Die Kenntnis der Abzähltechniken (Kombinatorik) wird vorausgesetzt. Die Integralrechnung wird am Rande erwähnt, jedoch wird nur deren Notation verwendet. Es müssen jedoch keine Integrale berechnet werden.

Stochastik

Kombinatorik



In der Kombinatorik werden Techniken behandelt, mit deren Hilfe ohne direktes Abzählen die Anzahl möglicher Ausgänge bei einem Experiment bestimmt werden kann. Wie viele Stellungen gibt es auf einem Rubik's Cube?

1. Fundamentales Abzählprinzip

Ein Beispiel

Aufgabe 1: Wir nehmen an, dass das Nummernschild eines Autos zwei verschiedene Buchstaben enthält, dem drei Ziffern folgen, wobei wir wissen, dass die erste nicht Null ist. Es gibt viele Möglichkeiten für solche Nummernschilder. Ein Beispiel ist: B X 4 5 3
Wie viele mögliche Nummernschilder dieser Art gibt es?

B B Z Z Z

$26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10$

$= 585'000$

Die Anzahl Möglichkeiten bei den einzelnen Schritten werden multipliziert. Wir geben zuerst das folgende grundlegende Prinzip an:

Fundamentales Abzählprinzip

Satz: Kann ein Vorgang auf n_1 verschiedene Arten ausgeführt werden, danach ein weiterer auf n_2 verschiedene Arten, dem folgt ein dritter auf n_3 verschiedene Arten und so weiter, dann gibt es $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots$ verschiedene Möglichkeiten, den auf diese Weise (in dieser Reihenfolge) beschriebenen Gesamtvorgang auszuführen.

Aufgabe 2: Auf einen Berg führen 7 verschiedene Routen. Wie viele verschiedene Überschreitungen (Anstieg und Abstieg erfolgen auf verschiedenen Routen) sind möglich?

Aufgabe 3: Wie viele vierstellige Zahlen mit lauter ungeraden Ziffern gibt es?

Aufgabe 4: Wie viele Wörter der Form KVKVK (K: Konsonant [21], V: Vokal [5]) gibt es, wenn ein Buchstabe a) mehrmals, b) nur einmal verwendet werden darf?

Aufgabe 5: Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 8 bilden, wenn jede Ziffer nur einmal auftreten darf und die gesuchte Zahl ungerade sein soll?

2. Variationen

Geordnete Stichproben mit Zurücklegen

Wie viele Codes gibt es beim Mastermind, wenn auf vier Steckplätzen Stifte mit sieben Farben gesteckt werden können?

Aus einer Urne mit 6 verschieden Kugeln werden nacheinander 5 Kugeln gezogen. Nach dem Ziehen werden die Kugeln jeweils wieder zurückgelegt. Wie viele Stichproben gibt es?

Eine Urne enthält n Kugeln. Wir entnehmen dieser Urne nacheinander k Kugeln. Hierbei wird die Kugel nach der Ziehung wieder in die Urne zurückgelegt. In dieser Stichprobe können also Wiederholungen vorkommen. In diesem Fall stehen bei jeder Ziehung n Kugeln zur Auswahl.

Satz: Die Anzahl Möglichkeiten, *geordnete Stichproben vom Umfang k mit Zurücklegen aus einer Urne mit n Kugeln* zu ziehen, ist

n^k ....

Aufgabe 6: Wie viele Ergebnisse sind möglich, wenn man
a) eine Münze fünfmal hintereinander wirft?
b) einen Würfel viermal hintereinander wirft?

Aufgabe 7: Ein Velo ist mit einem Zahlenschloss gesichert, bei dem vier Ziffer zwischen 0 und 9 eingestellt werden können. Welche Zeit benötigt man, um sämtliche Einstellungen auszuprobieren, wenn man für eine Einstellung durchschnittlich 4 Sekunden braucht?

Aufgabe 8: Ein Morsecode besteht aus den Zeichen Strich und Punkt. Wie viele Morsecodes lassen sich mit bis zu 5 Zeichen zusammensetzen?

Aufgabe 9: Die Aufgabe steckt in diesem QR-Code. Scanne den Code. Du musst den ganzen Text lesen. Die Frage ist ganz am Schluss zu finden.

Geordnete Stichproben ohne Zurücklegen

Permutationen

Wie viele Wörter können mit den Buchstaben des Wortes DIALEKTFORSCHUNG gebildet werden?
(Die Abbildung stellt die Wortwolke der Wörter in diesem Skript dar.)

Definition: Eine Anordnung der n Elemente einer Menge in eine bestimmte Reihenfolge wird eine *Permutation* dieser Objekte genannt.

Bemerkung: Die n Elemente in der Menge sind unterscheidbar.
Jedes Element der Menge kommt nur einmal vor.
Wiederholungen sind also nicht zugelassen.
Die Reihenfolge der Elemente ist bei der Permutation wesentlich.

Beispiel: Permutationen sind Vertauschungen (von lat. permutare „(ver)tauschen"). Wir betrachten die Buchstaben a, b, c und d. In diesem Beispiel gibt es 24 Permutationen:

Satz: Die Anzahl *Permutationen* von n verschiedenen Objekten ist:

$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Aufgabe 10: Auf wie viele Arten können 4 Kinder hintereinander auf einem Schlitten sitzen?

Aufgabe 11: Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Aufstellung hat ein Fussballtrainer für die Spieler seiner Mannschaft, wenn nur der Torwart immer derselbe bleibt?

Aufgabe 12: Für das Elfmeterschiessen muss der Trainer 5 der 11 Spieler auf dem Platz benennen. Wie viele Möglichkeiten der Bestimmung der Reihenfolge der Schützen gibt es, nachdem die Kandidaten gewählt wurden?

Aufgabe 13: 3 Physikbücher, 4 Englischbücher und 5 Französischbücher sollen auf ein Regal gestellt werden (alle Bücher seien verschieden). Auf wie viele Arten ist dies möglich, wenn
a) jede Anordnung erlaubt ist?
b) rechts die Physik-, in der Mitte die Englisch- und links die Französischbücher stehen sollen?
c) die Bücher desselben Faches nebeneinander stehen sollen?

Aufgabe 14: a) Auf wie viele Arten können sich 11 Personen in eine Reihe setzen? b) Auf wie viele Arten ist dies möglich, wenn zwei Personen unbedingt nebeneinander sitzen wollen?

Die Fakultät

Definition: Das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n kommt häufig vor. Abkürzend schreibt man dafür das Symbol n! (gelesen *„n-Fakultät"*):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \qquad n \in \mathbb{N}$$

Wir definieren zusätzlich: $0! = 1$

Beispiele: $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

$1! = 1$ $\qquad$ $0! = 1$

$$\frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 8 \cdot 7 = 56$$

Aufgabe 15: Berechne

a) $5!$

b) $10!$

c) $1!$

d) $0!$

e) Wie kann der Taschenrechner die Fakultät berechnen?

Aufgabe 16: Berechne bzw. vereinfache:

a) $\dfrac{5!}{4!}$

b) $\dfrac{128!}{125!}$

c) $\dfrac{x!}{(x-1)!}$

d) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$

Der allgemeine Fall

Aus einer Urne mit 6 verschiedenen Kugeln werden nacheinander 4 Kugeln gezogen. Nach dem Ziehen werden die Kugeln nicht wieder zurückgelegt. Wie viele Stichproben gibt es?

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6!}{2!} = 720$$

Wie viele Wörter aus fünf verschiedenen Buchstaben kann man mit den Buchstaben des Wortes DIALEKTFORSCHUNG bilden?

$$16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = \frac{16!}{11!}$$
$$= 524'160$$

In einer Urne befinden sich n Kugeln. Wir entnehmen ihr nacheinander k Kugeln. Hierbei wird die Kugel nach der Ziehung nicht wieder zurückgelegt. Damit gibt es in dieser geordneten Stichprobe keine Wiederholungen.

Satz: Die Anzahl Möglichkeiten, ***geordnete Stichproben vom Umfang k ohne Zurücklegen aus einer Urne mit n Kugeln*** zu ziehen, ist

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Aufgabe 17: 8 Sprinter kämpfen bei den Olympischen Spielen um die Medaillen. Auf wie viele Arten kann die Siegerehrung (Gold, Silber, Bronze) erfolgen?

Aufgabe 18: Auf wie viele Arten können sich

a) 5 Personen auf 7 Stühle setzen?

b) Auf wie viele Arten können sich 7 Personen auf 5 Stühle setzen, wenn 2 Personen stehen bleiben?

Aufgabe 19: Wie viele ganze Zahlen, die aus lauter verschiedenen ungeraden Ziffern bestehen, existieren zwischen 100 und 999?

Aufgabe 20: Finde heraus, wie Du mit dem Taschenrechner auf einfache Art die Anzahl geordneter Stichproben vom Umfang k ohne Zurücklegen aus einer Urne mit n Kugeln ausrechnen kannst.

3. Kombinationen

Ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus den vier Karten Bauer B, Dame D, König K und As A auf einmal drei Karten zu ziehen?

Wir überlegen uns zuerst die Anzahl Variationen, d.h. die Anzahl Möglichkeiten, drei Karten aus diesen vier zu ziehen, wenn die Karten nacheinander, also unter Berücksichtigung der Reihenfolge, gezogen werden.

Bei einem Kartenspiel spielt die Reihenfolge jedoch keine Rolle. Wir überlegen uns also anschliessend auch die Anzahl Möglichkeiten, drei Karten aus diesen vier Karten ohne Beachtung der Reihenfolge zu ziehen (Kombinationen).

Variationen	*Kombination*
BDK, BKD, DBK, …	BDK
BDA, ADB, DAB...	ABD
AKD, KAD, DAK...	ADK
BAK, KAB...	ABK

Bei der Kombination ist die Reihenfolge unwesentlich. Alle Variationen, die aus denselben Buchstaben bestehen, ist dieselbe Kombination. Es gibt also weniger Kombinationen als Variationen. Es sind …6…-mal weniger Kombinationen als Variationen.

Es kann auch eine Stichprobe gezogen werden, indem aus einer Urne einige Kugeln mit einem Griff, also gleichzeitig, herausgezogen werden. Diese Stichprobe ist ungeordnet und Wiederholungen sind nicht möglich.

Satz: Die Anzahl Möglichkeiten, *ungeordnete Stichproben vom Umfang k ohne Zurücklegen aus einer Urne mit n Kugeln* zu ziehen, ist

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Aufgabe 21: In einer Urne befinden sich 8 unterscheidbare Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn man

a) 3 Kugeln miteinander zieht?

b) 4 Kugeln miteinander zieht?

c) 5 Kugeln miteinander zieht?

Aufgabe 22: Eine Gruppe besteht aus 3 Mädchen und 9 Knaben.

a) Auf wie viele Arten kann man aus ihr 4 Personen auswählen?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn unter den 4 Personen genau ein Mädchen sein soll?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn unter den 4 Personen mindestens ein Mädchen sein soll?

Aufgabe 23: Auf wie viele Arten kann man 36 Jasskarten gleichmässig auf 4 Spieler verteilen?

Aufgabe 24: Ein Schüler hat an einem Examen von 12 Aufgaben deren 9 zu lösen.

a) Wie viele Auswahlmöglichkeiten hat er?

b) Wie viele Auswahlmöglichkeiten hat er, wenn er die drei ersten Aufgaben beantworten muss?

c) Wie viele Auswahlmöglichkeiten hat er, wenn er von den 6 ersten Aufgaben genau 5 lösen muss?

d) Wie viele Auswahlmöglichkeiten hat er, wenn er von den 6 ersten Aufgaben mindestens 5 lösen muss?

Aufgabe 25: In einem Parlament sind 3 Parteien vertreten: 60 Konservative, 40 Erzkonservative und 20 Ultrareaktionäre. Wie viele 10-er Kommissionen lassen sich mit dem Verteilungsschlüssel 5 Konservative, 4 Erzkonservative und 1 Ultrareaktionärer bilden?

Aufgabe 26: Wie viele mögliche Spielausgänge (Anzahl möglicher Kombinationen) gibt es beim Schweizer Zahlenlotto? Tipp: Beim Lotto „6 aus 45" werden 6 Zahlen aus 45 gezogen.