Skripte zur Mathematik

Einführung in die Analysis

von

Christian Wyss

Skripte zur Mathematik

Einführung in die Analysis

von

Christian Wyss

mathema

tredition

Verlagslabel: mathema (www.mathema.ch)

ISBN Hardcover: 978-3-384-13911-5
Paperback: 978-3-384-13910-8

Auflage 1.2

Druck und Distribution im Auftrag des Autors:
tredition GmbH, Heinz-Beusen-Stieg 5, 22926 Ahrensburg, Germany

Dr. Christian Wyss, Chemin du Clos 60, 2502 Biel-Bienne, Schweiz.

Die Philosophie steht in diesem grossen Buch geschrieben, das unserem Blick ständig offen liegt – ich meine das Universum –; aber das Buch ist nicht zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt und sich mit den Buchstaben vertraut gemacht hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, und deren Buchstaben sind Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren, ohne die es dem Menschen unmöglich ist, ein einziges Bild davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen Labyrinth herum.

Galileo Galilei: „*Il Saggiatore*“ (1623)

Inhaltsverzeichnis

Einleitende Worte

Diese Skripte zur Mathematik sind im Rahmen des Gymnasialunterrichts entstanden. Sie können als eigenständiges Lern- und Übungsmaterial eingesetzt werden. Sie sind jedoch primär als *unterrichts-begleitendes Material* konzipiert. Eine Einführung und Anleitung durch eine Lehrperson wird daher empfohlen.

Die Skripte enthalten *Lückentexte*. Sie dienen der Festigung des erworbenen Wissens und sollten im Plenum mit der gesamten Klasse ausgefüllt werden. Diese handschriftlichen Einträge helfen, die Schlüsselbegriffe und Aussagen zu verinnerlichen und Herleitungen und Beweise besser nachzuvollziehen.

Zu den Übungen

Um den Stoff zu vertiefen und zu festigen, halte ich es für unerlässlich, dass die Schülerinnen und Schüler eine Vielzahl von Übungen lösen. Die Skripte enthalten daher viele Übungen, die nicht nur das Erlernte festigen, sondern auch inner- und aussermathematische Anwendungen aufzeigen. Einige Übungen sind bewusst anspruchsvoller gestaltet und gehen über den üblichen Lehrstoff hinaus, können jedoch bei Bedarf übersprungen werden. Ein Stern ★ markiert, dass es sich bei der Aufgabe um eine zusätzliche Übung handelt, die über den obligatorischen Lernstoff hinausgeht. Im Folgenden werden die unterschiedlichen Übungstypen kurz erläutert.

Einstiegsbeispiel

Ein Einführungsbeispiel stellt eine Aufgabe dar, die eine neu einzuführende Thematik exemplarisch vorstellt. Diese Aufgabe soll die grundlegenden Begriffe der neuen Thematik vorwegnehmen und damit einführen. Dabei darf die Aufgabe einen gewissen Anspruch haben. Ein gemeinsames Lösen dieser Aufgaben im Plenum oder eine detaillierte Besprechung empfiehlt sich, um das Verständnis zu fördern.

Grundaufgaben

Eine Grundaufgabe ist eine Übungsaufgabe, die von den Schülerinnen und Schülern routiniert und sicher gelöst werden sollte. Durch die Bearbeitung mehrerer dieser Aufgaben sollen die Lernenden die Struktur verstehen und sich mit dem Lösungsweg vertraut machen, um ihn anschliessend situationsbezogen bei weiterführenden Aufgaben anwenden zu können.

Erarbeitungsaufgaben

Erarbeitungsaufgaben sind konzipiert, um den Lernstoff zu entwickeln und die Schülerinnen und Schüler konstruktivistisch an die neue Theorie heranzuführen.

Anwendungsaufgaben

Das erworbene theoretische Wissen hat in der Regel sowohl inner- als auch aussermathematische Anwendungen. Anwendungsaufgaben sollen die Fähigkeit zur Mathematisierung fördern und die Anwendbarkeit des Gelernten verdeutlichen.

Beweisaufgaben

In Beweisaufgaben lernen die Schülerinnen und Schüler, selbstständig einfache Beweise zu führen.

Zu den Titelbildern

Die Titelblätter bieten die Möglichkeit, verschiedene Aspekte der Mathematik mit den Schülerinnen und Schülern zu thematisieren. Dies umfasst insbesondere folgende Bereiche:

Mathematik und Ästhetik

Mathematik und Kunst stehen auf vielfältige Weise in Beziehung. Ihre Verbindung zeigt sich in Musik, Malerei, Architektur, Skulptur und Textilgestaltung etc. Die Titelblätter zielen darauf ab, die Schönheit der Mathematik anhand der bildenden Kunst aufzuzeigen.

Rechenhilfsmittel

„Es ist unwürdig, die Zeit von hervorragenden Leuten mit knechtischen Rechenarbeiten zu verschwenden, weil bei Einsatz einer Maschine auch der Einfältigste die Ergebnisse sicher hinschreiben kann." G. W. Leibniz (1673).
Der Mensch hat bereits in der Frühzeit Rechenhilfsmittel entwickelt, angefangen vom Kerbholz über mechanische Rechenmaschinen bis hin zu analogen und digitalen Computern. Die Titelblätter illustrieren diese Entwicklung.

Geschichte der Mathematik

Die Geschichte der Mathematik reicht zurück bis ins Altertum und den Anfängen des Zählens in der Jungsteinzeit. Mathematik wurde und wird in allen Kulturkreisen praktiziert. Die Titelblätter thematisieren bedeutende Werke der Mathematik sowie herausragende Mathematikerinnen und Mathematiker, die die Entwicklung dieser Disziplin massgeblich beeinflusst haben.

Zu den Inhalten

Allgemeines

Die Aufteilung des Stoffes in mehrere Skripte dient der Flexibilität bei der Gestaltung des Unterrichts. Da Mathematik eine stark hierarchische Struktur aufweist, kann der Stoff nicht in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Skripte sind in einer möglichen Bearbeitungsreihenfolge angeordnet.

Die Skripte in diesem Sammelband behandeln Inhalte des fortgeschrittenen Curriculums. Dementsprechend werden bei allen grundlegende mathematische Kenntnisse vorausgesetzt. Dazu gehören Kenntnisse in Arithmetik und Algebra: Termumformungen, Gleichungen (insbesondere lineare und quadratische), Potenzen und Logarithmen etc. Zudem sollten die elementaren Funktionstypen (lineare, quadratische, Polynom- und Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen und trigonometrische Funktionen etc.) bekannt sein.

Im Folgenden wird kurz dargelegt, welches spezifische Vorwissen für jede Einheit zusätzlich erforderlich ist.

Folgen und Reihen

Behandelter Stoff

Der Begriff der Folge wird eingeführt: Folgen werden aufzählend, explizit und rekursiv dargestellt. Die arithmetische und die geometrische Folge werden ausführlich diskutiert und ihre Reihen werden untersucht. Darüber hinaus wird der Begriff des Grenzwerts (Limes) behandelt, und Grenzwerte werden berechnet. Es werden eine Vielzahl von inner- und aussermathematischen Anwendungen behandelt.

Notwendiges Vorwissen

Es werden keine mathematischen Fähigkeiten über das bereits erwähnte grundlegende Vorwissen hinaus vorausgesetzt.

Finanzmathematik

Behandelter Stoff

Die Unterschiede zwischen dem Ratensparen und verschiedenen Arten von Krediten (wie Konsumkredit und Hypothek) werden anhand von Beispielen aufgezeigt.

Notwendiges Vorwissen

Es werden keine mathematischen Fähigkeiten über das bereits erwähnte grundlegende Vorwissen hinaus vorausgesetzt. Vertrautheit mit den Konzepten von Folgen und Reihen ist jedoch von Vorteil.

Differentialrechnung I

Behandelter Stoff

Das Konzept der momentanen Steigung und der Steigungsfunktion wird zunächst eher intuitiv eingeführt. Anschliessend wird der Begriff der momentanen Steigung mithilfe des Differenzenquotienten präzisiert und dem Differentialquotienten definiert. Dabei werden erste Ableitungsregeln erarbeitet.

Notwendiges Vorwissen

Vertrautheit mit den Konzepten des Grenzwertes (Limes) und die Fähigkeit, Grenzwerte zu berechnen, werden vorausgesetzt. Darüber hinaus sind keine mathematischen Fähigkeiten über das bereits erwähnte grundlegende Vorwissen hinaus notwendig.

Differentialrechnung II

Behandelter Stoff

Die Ableitungen der elementaren Funktionen werden eher intuitiv erarbeitet und teilweise auch bewiesen. Zudem werden die Ableitungsregeln eingeführt und hergeleitet. Das Hauptgewicht liegt auf dem Erwerb des Handwerks des Ableitens. Des Weiteren werden erste innermathematische Anwendungen gelöst (Tangenten an Kurven, Steigungswinkel etc.).

Notwendiges Vorwissen

Der Differentialquotient und seine Bedeutung sowie der Begriff der Steigungsfunktion müssen bekannt sein. Darüber hinaus sind keine mathematischen Fähigkeiten über das bereits erwähnte grundlegende Vorwissen hinaus notwendig.

Differentialrechnung III

Behandelter Stoff

Es werden die Aussagen der Ableitung einer Funktion über das Steigungs- und Krümmungsverhalten der Graphen diskutiert. Dabei werden die Begriffe der Extremal-, Terrassen- und Wendestelle eingeführt. Eine Funktion wird beispielhaft diskutiert (Definitionsbereich, horizontale und vertikale Asymptoten, Nullstellen, Terrassen- und Extremalstellen, Wendestellen) und anschliessend werden viele Übungen dazu gelöst. Die Differentialrechnung wird zur Lösung von Extremwertaufgaben und zum numerischen Lösen von Gleichungen (Newton-Raphson-Verfahren) angewendet.

Notwendiges Vorwissen

Die Schülerinnen und Schüler müssen in der Lage sein, Funktionen abzuleiten und die Bedeutung der Ableitung verstehen.

Integralrechnung

Behandelter Stoff

Das unbestimmte Integral wird als Umkehrung der Ableitung eingeführt. Die Integrationsregeln werden erarbeitet (einschliesslich partieller Integration und Integration durch Substitution) und intensiv geübt. Das bestimmte Integral wird als (orientierter) Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen eingeführt und zunächst geometrisch berechnet (auch mit Ober- und Untersummen). Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung führt die beiden Integrale zusammen und bestimmte Integrale werden mithilfe dieses Satzes berechnet (einschliesslich uneigentlicher Integrale). Die Integralrechnung wird zur Berechnung von Flächeninhalten (zwischen Graphen von Funktionen) und Volumina (Rotationskörper) angewendet. Zudem werden einige (vorwiegend physikalische) Anwendungen diskutiert.

Notwendiges Vorwissen

Vertrautheit mit der Differentialrechnung wird vorausgesetzt, insbesondere mit den Ableitungsregeln. Für das Konzept der Definition des Integrals mit Hilfe von Ober- und Untersumme muss der Begriff des Grenzwertes bekannt sein und die Schülerinnen und Schüler müssen in der Lage sein, Grenzwerte zu berechnen.

Analysis

Folgen und Reihen

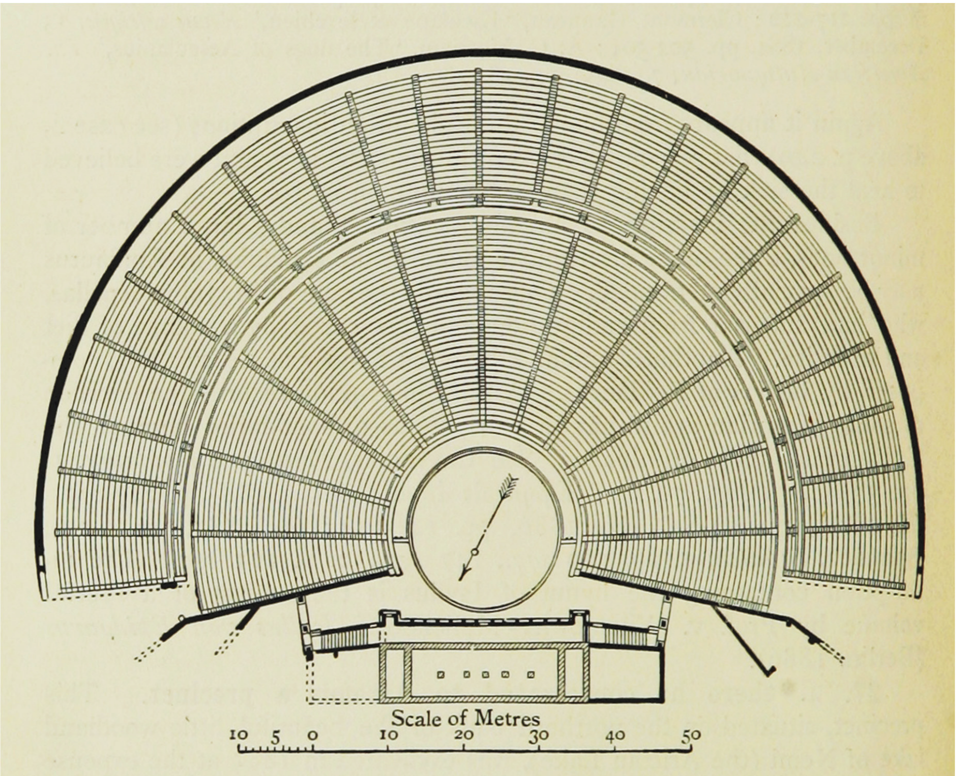


FIG. 42.—GROUND PLAN OF THEATRE AT EPIDAURUS.

Das imposanteste und auffälligste Bauwerk von Epidauros ist zweifellos das grosse, in einen Hang gebaute Theater mit grandiosem Blick auf die Berglandschaft der Argolis. Es stammt aus dem 3. Jh. v. Chr., also aus hellenistischer Zeit und gilt als das am besten erhaltene der Antike. Das Theater verfügt über eine exzellente Akustik, sodass man auch von den hintersten Reihen jedes Wort verstehen kann. In der ersten Reihe sind 40 Plätze; in jeder folgenden Reihe sind jeweils zwölf Plätze mehr als in der vorhergehenden Reihe. Wie viele Sitzplätze hat es in der 32. Sitzreihe? Wie viele Plätze hat es in den ersten 32 Sitzreihen insgesamt?

1. Gezogene Nudeln (La mian 拉面)
[拉 (la) = ziehen, dehnen / 面 (mian) = Nudel]

Die islamische Bevölkerung Chinas (Uiguren) stellt Nudeln auf eine sehr virtuose Art von Hand her. Die Nudeln werden von Hand gezogen, das geschieht so: Zuerst nimmt der Nudelkoch ein Stück Teig. Er zieht die beiden Enden in der Luft bis auf etwa 1 m auseinander. Anschliessend schleudert er die Teignudel gekonnt nach oben und unten, wobei sich die Länge des Teiges verdoppelt. Unmittelbar beim letzten Schleudern nach unten verdrillt er diese lange Teignudel zu einem „Zopf". Und zieht diesen wieder durch Schleudern auseinander. Dann wird wieder verdrillt und wieder gezogen.

Aufgabe 1: Der Koch beginnt mit einer einzigen dicken „Nudel". Nach der ersten Faltung des Strangs hat er zwei Nudeln.

a) Wie viele Nudeln hat er nach 5 Faltungen?

b) Wie häufig muss er den Strang falten, damit er mehr als 1000 Nudeln hat?

c) Nach wie vielen Faltungen hat er mehr als eine Million Nudeln?

★ *Aufgabe 2:* Der Koch beginnt mit einem Teig von 50 cm Länge und 6 cm Durchmesser und stellt 2048 Nudeln von 1 m Länge her. Welchen Durchmesser hat eine Nudel?

Definition: Eine ***Zahlenfolge*** ist eine Aneinanderreihung von Zahlen, bei der die Reihenfolge eine Rolle spielt.

Die einzelnen Zahlen einer Folge nennt man *Folgeglieder* und bezeichnet sie wie folgt:

a_1 = 1. Folgeglied = 1. Zahl der Folge
a_2 = 2. Folgeglied = 2. Zahl der Folge
a_3 = 3. Folgeglied = 3. Zahl der Folge
…
a_n = n-te Folgeglied = n-te Zahl der Folge

Die natürliche Zahl n wird als *Index oder Nummer* des Folgeglieds a_n bezeichnet.

Die Zahlenfolge als Ganzes bezeichnet man mit (a_n).

Beispiel: Betrachten wir nochmals die Anzahl Nudeln nach jeder Faltung. Wir notieren die dazugehörige Folge:
$(a_n) = (2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$
Die einzelnen Glieder sind:
$a_1 = 2 \qquad a_2 = 4 \qquad a_3 = 8 \qquad a_4 = 16 \qquad \dots$
Hier ist a_n die Anzahl Nudeln und n die Anzahl Faltungen.

Aufgabe 3: Setze die folgenden Zahlenfolgen fort, d. h. bestimme die nächsten drei Glieder:

$(a_n) = (5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \dots)$

$(b_n) = (1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \dots)$

$(c_n) = (3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \dots)$

$(d_n) = (3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \dots)$

$(e_n) = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots\right)$

$(f_n) = (9,\ 5,\ 1,\ -3,\ \dots)$

$(g_n) = (32,\ 16,\ 8,\ 4,\ \dots)$

$(h_n) = (7,\ -7,\ 7,\ -7,\ \dots)$

$(i_n) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \dots\right)$

$(j_n) = (29,\ 24,\ 19,\ 14,\ \dots)$

$(k_n) = (64,\ 16,\ 4,\ 1,\ \dots)$

$(l_n) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{4}{16},\ \dots\right)$

Aufgabe 4: Bestimme bei den obigen Zahlenfolgen jeweils das 10. und das 100. Zahlenglied.

Aufgabe 5: Vergleiche die Zahlenfolgen: Welche sind vom Aufbau her ähnlich?

Aufgabe 6: Erfinde neue Zahlenfolgen: solche, die den gegebenen Folgen ähnlich sind und solche, die Du als neuen Typ definieren würdest.

Aufgabe 7: Die *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* OEIS (Online-Enzyklopädie der Zahlenfolgen) ist eine englischsprachige Datenbank von Folgen ganzer Zahlen (integer sequences), die über das Internet durchsucht werden kann. Die Datenbank enthielt Mitte Februar 2022 über 351.000 Zahlenfolgen. Suche interessante Zahlenfolgen in der Datenbank.

★ *Aufgabe 8:* Diese Aufgaben sind schwieriger als die vorangegangenen Aufgaben. Bestimme die nächsten drei Glieder dieser Folgen.

$(a_n) = (-1,\ 4,\ -9,\ 16,\ -25,\ ...)$

$(b_n) = (1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ ...)$

$(c_n) = (2,\ 6,\ 12,\ 20,\ 30,\ ...)$

★ *Aufgabe 9:* Bestimme die nächsten drei Glieder dieser Folgen.

$(a_n) = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9...)$

$(b_n) = (1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216...\ )$

$(c_n) = (1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,...\ )$

$(d_n) = (1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36,\ 45, 55, 66...\ )$

$(e_n) = (1,\ 11,\ 21,\ 1211,\ 111221,\ \ 312211,\ 13112221,...\ )$

$(f_n) = (6,\ 28,\ 496,\ 8128,...\ )$

$(g_n) = (9,\ 7,\ 8,\ 3,\ 3,\ 8,\ 4,\ 1,\ 3,\ 9,...)$

$(h_n) = (4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,...)$

Das philosophische Ei von Mario Merz erstreckt sich seit 1991 an der Glaswand des westlichen Hallenabschlusses des Hauptbahnhofs Zürich über eine Fläche von 330 m². Die Skulptur besteht aus spiralförmigen roten Neonröhren, frei hängenden Tierfiguren und blau leuchtenden Ziffern. Letztere stellen die ersten Zahlen der Fibonacci-Folge dar.

2. Darstellung von Folgen (Bildungsgesetze)

Bis jetzt waren alle Folgen ***aufzählend*** dargestellt. Dabei handelt es sich jeweils nur um einige Beispiele. Um eine Folge vollständig zu beschreiben, muss ein Bildungsgesetz angegeben werden. Eine Zahlenfolge kann ***explizit*** oder ***rekursiv*** dargestellt werden:

a) *Die explizite Darstellung*

Definition: Bei der expliziten Darstellung gibt man eine Vorschrift an, mit der man direkt das n-te Glied der Folge berechnen kann.

Beispiel: Die Folge $(a_n) = (2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ wird durch die Vorschrift $a_n = 2^n$ explizit dargestellt.

Bei vielen Folgen ist es schwierig, die Vorschrift zu finden, mit der man das n–te Glied a_n direkt aus n berechnen kann. Man kann jedoch häufig ein Gesetz erkennen, wie man zu einem Folgeglied den Nachfolger berechnen kann.

b) *Die rekursive Darstellung*

Definition: Bei der rekursiven Darstellung gibt man das erste Glied der Folge a_1 (Verankerung) und eine Vorschrift, wie man zu einem Folgeglied a_n dessen Nachfolger a_{n+1} berechnet (Rekursionsformel) an.

Beispiel: Die Zahlenfolge $(a_n) = (7, 14, 28, 56, 112, 224, \ldots)$ wird durch die Rekursionsformel $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$ und die Verankerung $a_1 = 7$ dargestellt.

Aufgabe 10: Stelle die Folgen in Aufgabe 3 sowohl rekursiv wie auch explizit dar. Es ist nicht bei allen Folgen möglich, beide Bildungsgesetze (Darstellungen) anzugeben.

★ *Aufgabe 11:* Stelle die Folgen in Aufgabe 8 explizit dar.

Aufgabe 12: Gib zu den beiden Darstellungen von Folgen je einen Vorteil und einen Nachteil an:

....

....

....

....

Aufgabe 13: Berechne die ersten fünf Glieder, das 100. und das 101. Glied dieser Folgen:

$a_n = 3n - 5$ $\qquad b_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad c_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$

$d_n = 5$ $\qquad e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

★ *Aufgabe 14:* Was passiert bei Teilaufgabe e der vorangehenden Aufgabe, wenn n noch viel grösser als 100 wird? Kommt Dir diese Zahl bekannt vor?

Aufgabe 15: Berechne die ersten 6 Glieder dieser Folgen:

a) $a_1 = 2$
$a_{n+1} = 3a_n - 1$ für $n \geq 1$

b) $b_1 = 1$
$b_{n+1} = b_n + 2n + 1$ für $n \geq 1$

c) $x_1 = 1$
$x_{n+1} = {}^{1}\!/_{1+x_n}$ für $n \geq 1$

d) $f_1 = 1,\ f_2 = 1$ (Fibonacci-Folge[1])
$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für $n \geq 1$

e) $u_1 = 16,\ u_2 = 2$
$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ für $n \geq 2$

Aufgabe 16: Gib eine rekursive Definition für diese Folgen an:

a) –7, –3, 1, 5, 9, ...

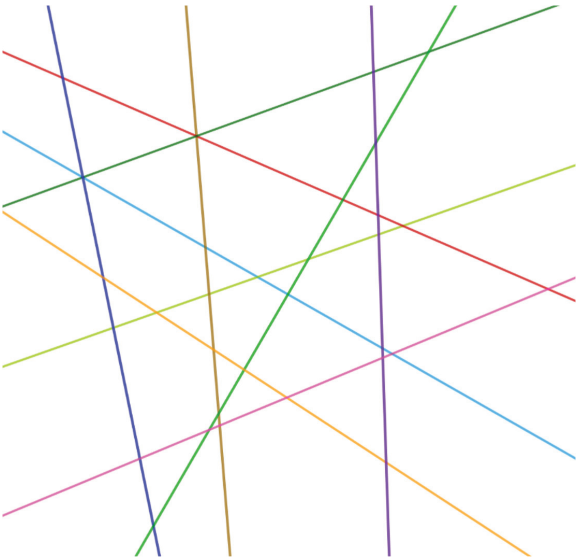
b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$

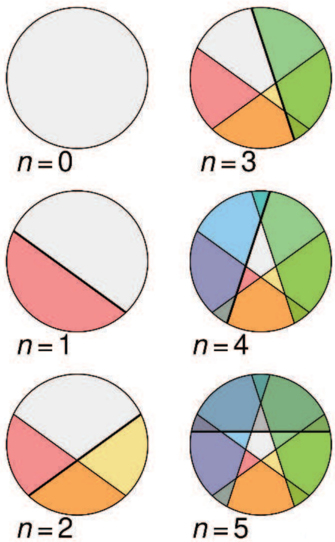
c) 10, 12, 15, 19, 24, ...

d) Eine Anzahl von n Geraden hat eine maximale Anzahl Schnittpunkte s_n. Diese maximale Anzahl Schnittpunkte s_n ist eine Zahlenfolge.

★ e) $a_n = n \cdot 2^n$

Aufgabe 17: In wie viele Stücke kann eine Pizza mit 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100 und n Schnitten maximal zerlegt werden (*Lazy Caterer's Sequence* oder *Zentralpolygonale Zahlen*)?





[1] In der westlichen Welt war es der italienische Mathematiker Leonardo da Pisa, genannt Fibonacci, der in seinem Buch *Liber abbaci* im Jahre 1227 diese Zahlenfolge mit dem Beispiel eines Kaninchenzüchters beschrieb, der herausfinden will, wie viele Kaninchenpaare aus einem einzigen Paar entstehen, wenn jedes Paar ab dem zweiten Lebensmonat ein weiteres Paar pro Monat zur Welt bringt.

3. Zwei spezielle Typen von Folgen

Es existiert eine Vielzahl von Typen von Folgen. Es gibt jedoch zwei sehr wichtige Folgen: die arithmetische und die geometrische Folge. Steht man einer an sich „unbekannten" Folge gegenüber, so lohnt sich die Überlegung, ob es sich um einen Typus dieser beiden handelt.

a) *Die arithmetische Folge*

Muss man bei einer Zahlenfolge immer dieselbe Zahl hinzuzählen oder abzählen, um das nächste Folgeglied zu erhalten, so nennt man diese Folge arithmetische Folge.

Definition: Eine Zahlenfolge (a_n) heisst arithmetisch, wenn die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder immer dieselbe Zahl d ergibt:

$$a_{n+1} - a_n = d \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Beispiel: $(a_n) = (5, 11, 17, 23, 29, \ldots)$ ist eine arithmetische Folge mit $d = 6$.
$(b_n) = (135, 128, 121, 114, 107, \ldots)$ ist eine arithmetische Folge mit $d = -7$.
$(c_n) = (5, 9, 5, 9, 5, \ldots)$ ist *keine* arithmetische Folge, da kein d existiert!

b) *Die geometrische Folge*

Muss man bei einer Zahlenfolge immer mit derselben Zahl multiplizieren oder durch dieselbe dividieren, um das nächste Folgeglied zu erhalten, so nennt man diese Folge geometrische Folge.

Definition: Eine Zahlenfolge (a_n) heisst geometrisch, wenn der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder immer dieselbe Zahl q ergibt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Beispiel: $(a_n) = (3, -6, 12, -24, 48, \ldots)$ ist eine geometrische Folge mit $q = -2$.
$(b_n) = (3072, 768, 192, 48, 12, \ldots)$ ist eine geometrische Folge mit $q = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 18: Schaue noch einmal die Folgen in Aufgabe 3 an. Welche davon sind arithmetisch, welche geometrisch?

Aufgabe 19: Stelle diese arithmetischen Folgen rekursiv und explizit dar:

a) $(a_n) = (9, 16, 23, 30, \ldots)$
b) Finde eine rekursive und eine explizite Darstellung der arithmetischen Folge (a_n), die mit a_1 beginnt und die Differenz d zwischen zwei aufeinanderfolgenden Folgegliedern hat. Hier ist eine Formel gesucht!

Aufgabe 20: Stelle diese geometrischen Folgen rekursiv und explizit dar:

a) $(a_n) = (2, 6, 18, 54, \ldots)$
b) Finde eine rekursive und eine explizite Darstellung der geometrischen Folge (a_n), die mit a_1 beginnt und die den Quotienten q von zwei aufeinanderfolgenden Folgegliedern hat. Hier ist eine Formel gesucht.

Darstellung der arithmetischen Folge

rekursiv: $a_{n+1} = a_n + d$ $\qquad a_1 = \ldots$

explizit: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Darstellung der geometrischen Folge

rekursiv: $a_{n+1} = a_n \cdot q$ $\qquad a_1 = \ldots$

explizit: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Aufgabe 21: Bestimme bei diesen arithmetischen Folgen die Differenz und das 15. Folgeglied. Berechne das 15. Glied mit der expliziten Formel für die arithmetische Folge:

a) $-7, -2, \ldots$ b) $\frac{1}{3}, 1, \ldots$

Aufgabe 22: Bestimme bei diesen geometrischen Folgen den Quotienten und das 7. Folgeglied. Berechne das 7. Glied mit der expliziten Formel für die geometrische Folge:

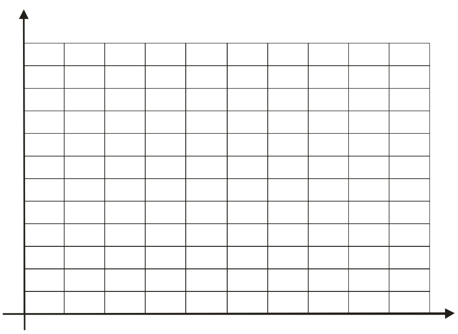
a) $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \ldots$ b) $5, \sqrt{50}, \ldots$

Aufgabe 23: Bei der heute gebräuchlichen gleichschwebenden Stimmung hat jeder Halbton dasselbe Frequenzintervall (= Frequenzverhältnis). Es wird also jede Oktav in zwölf gleiche Halbtöne aufgeteilt. Die Frequenzen dieser Halbtöne bilden eine geometrische Folge. Welche Frequenzen haben die Töne a', ais', h', c'', cis'', d'', dis'', e'', f'', fis'', g'', gis'', a'', wenn der Kammerton a' die Frequenz 440 Hz und der um eine Oktave höherliegende Ton a'' also die Frequenz 880 Hz hat?

Aufgabe 24: a, b, c bilden in dieser Reihenfolge eine arithmetische Folge mit der Summe 3; in der Reihenfolge b, c, a bilden sie eine geometrische Folge. Berechne die drei Zahlen.

Aufgabe 25: Eine Folge kann in einem ***Koordinatensystem dargestellt*** werden. Dabei werden die natürlichen Zahlen n auf der horizontalen Achse (Abszisse) und die dazugehörigen Folgeglieder a_n auf der vertikalen Achse (Ordinate) eingetragen. Skizziere die arithmetische Folge $a_n = 2 + 0.75(n-1)$ und die geometrische Folge $b_n = 2 \cdot 1.2^{n-1}$. Beschrifte die Achsen.

arithmetische Folge



geometrische Folge