Skripte zur Mathematik

Fortgeschrittene Analysis

von

Christian Wyss

Skripte zur Mathematik

Fortgeschrittene Analysis

von

Christian Wyss

mathema

Verlagslabel: mathema (www.mathema.ch)

ISBN	Hardcover:	978-3-384-15734-8
	Paperback:	978-3-384-15733-1

Auflage 1.2

Druck und Distribution im Auftrag des Autors:
tredition GmbH, Heinz-Beusen-Stieg 5, 22926 Ahrensburg, Germany

Dr. Christian Wyss, Chemin du Clos 60, 2502 Biel-Bienne, Schweiz.

Die Philosophie steht in diesem grossen Buch geschrieben, das unserem Blick ständig offen liegt – ich meine das Universum –; aber das Buch ist nicht zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt und sich mit den Buchstaben vertraut gemacht hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, und deren Buchstaben sind Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren, ohne die es dem Menschen unmöglich ist, ein einziges Bild davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen Labyrinth herum.

Galileo Galilei: „*Il Saggiatore*“ (1623)

Inhaltsverzeichnis

Einleitende Worte

Diese Skripte zur Mathematik sind im Rahmen des Gymnasialunterrichts entstanden. Sie können als eigenständiges Lern- und Übungsmaterial eingesetzt werden. Sie sind jedoch primär als *unterrichtsbegleitendes Material* konzipiert. Eine Einführung und Anleitung durch eine Lehrperson wird daher empfohlen.

Die Skripte enthalten *Lückentexte*. Sie dienen der Festigung des erworbenen Wissens und sollten im Plenum mit der gesamten Klasse ausgefüllt werden. Diese handschriftlichen Einträge helfen, die Schlüsselbegriffe und Aussagen zu verinnerlichen und Herleitungen und Beweise besser nachzuvollziehen.

Zu den Übungen

Um den Stoff zu vertiefen und zu festigen, halte ich es für unerlässlich, dass die Schülerinnen und Schüler eine Vielzahl von Übungen lösen. Die Skripte enthalten daher viele Übungen, die nicht nur das Erlernte festigen, sondern auch inner- und aussermathematische Anwendungen aufzeigen. Einige Übungen sind bewusst anspruchsvoller gestaltet und gehen über den üblichen Lehrstoff hinaus, können jedoch bei Bedarf übersprungen werden. Ein Stern ★ markiert, dass es sich bei der Aufgabe um eine zusätzliche Übung handelt, die über den obligatorischen Lernstoff hinausgeht. Im Folgenden werden die unterschiedlichen Übungstypen kurz erläutert.

Einstiegsbeispiel

Ein Einführungsbeispiel stellt eine Aufgabe dar, die eine neu einzuführende Thematik exemplarisch vorstellt. Diese Aufgabe soll die grundlegenden Begriffe der neuen Thematik vorwegnehmen und damit einführen. Dabei darf die Aufgabe einen gewissen Anspruch haben. Ein gemeinsames Lösen dieser Aufgaben im Plenum oder eine detaillierte Besprechung empfiehlt sich, um das Verständnis zu fördern.

Grundaufgaben

Eine Grundaufgabe ist eine Übungsaufgabe, die von den Schülerinnen und Schülern routiniert und sicher gelöst werden sollte. Durch die Bearbeitung mehrerer dieser Aufgaben sollen die Lernenden die Struktur verstehen und sich mit dem Lösungsweg vertraut machen, um ihn anschliessend situationsbezogen bei weiterführenden Aufgaben anwenden zu können.

Erarbeitungsaufgaben

Erarbeitungsaufgaben sind konzipiert, um den Lernstoff zu entwickeln und die Schülerinnen und Schüler konstruktivistisch an die neue Theorie heranzuführen.

Anwendungsaufgaben

Das erworbene theoretische Wissen hat in der Regel sowohl inner- als auch aussermathematische Anwendungen. Anwendungsaufgaben sollen die Fähigkeit zur Mathematisierung fördern und die Anwendbarkeit des Gelernten verdeutlichen.

Beweisaufgaben

In Beweisaufgaben lernen die Schülerinnen und Schüler, selbstständig einfache Beweise zu führen.

Zu den Titelbildern

Die Titelblätter bieten die Möglichkeit, verschiedene Aspekte der Mathematik mit den Schülerinnen und Schülern zu thematisieren. Dies umfasst insbesondere folgende Bereiche:

Mathematik und Ästhetik

Mathematik und Kunst stehen auf vielfältige Weise in Beziehung. Ihre Verbindung zeigt sich in Musik, Malerei, Architektur, Skulptur und Textilgestaltung etc. Die Titelblätter zielen darauf ab, die Schönheit der Mathematik anhand der bildenden Kunst aufzuzeigen.

Rechenhilfsmittel

„Es ist unwürdig, die Zeit von hervorragenden Leuten mit knechtischen Rechenarbeiten zu verschwenden, weil bei Einsatz einer Maschine auch der Einfältigste die Ergebnisse sicher hinschreiben kann." G. W. Leibniz (1673).
Der Mensch hat bereits in der Frühzeit Rechenhilfsmittel entwickelt, angefangen vom Kerbholz über mechanische Rechenmaschinen bis hin zu analogen und digitalen Computern. Die Titelblätter illustrieren diese Entwicklung.

Geschichte der Mathematik

Die Geschichte der Mathematik reicht zurück bis ins Altertum und den Anfängen des Zählens in der Jungsteinzeit. Mathematik wurde und wird in allen Kulturkreisen praktiziert. Die Titelblätter thematisieren bedeutende Werke der Mathematik sowie herausragende Mathematikerinnen und Mathematiker, die die Entwicklung dieser Disziplin massgeblich beeinflusst haben.

Zu den Inhalten

Allgemeines

Die Aufteilung des Stoffes in mehrere Skripte dient der Flexibilität bei der Gestaltung des Unterrichts. Da Mathematik eine stark hierarchische Struktur aufweist, kann der Stoff nicht in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Skripte sind in einer möglichen Bearbeitungsreihenfolge angeordnet.

Die Skripte in diesem Sammelband behandeln Inhalte des fortgeschrittenen Curriculums. Dementsprechend werden bei allen grundlegende mathematische Kenntnisse vorausgesetzt. Dazu gehören Kenntnisse in Arithmetik und Algebra: Termumformungen, Gleichungen (insbesondere lineare und quadratische), Potenzen und Logarithmen usw. Zudem sollten die elementaren Funktionstypen (lineare, quadratische, Polynom- und Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen und trigonometrische Funktionen etc.) bekannt sein.

Im Folgenden wird kurz dargelegt, welches spezifische Vorwissen für jede Einheit zusätzlich erforderlich ist.

Numerische Lösungsverfahren

Behandelter Stoff

Das Bisektionsverfahren, das Sekantenverfahren, die Regula falsi, das Tangentverfahren und das Fixpunktverfahren werden erläutert und in Übungen praktisch angewendet.

Notwendiges Vorwissen

Das Tangentenverfahren erfordert zusätzlich zu den bereits genannten Kenntnissen die Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler, Funktionen ableiten (differenzieren) zu können.

Vollständige Induktion

Behandelter Stoff

Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion wird vorgestellt und anhand von Beispielen erläutert. Danach wird es in zahlreichen Übungsaufgaben angewendet.

Notwendiges Vorwissen

Es werden keine mathematischen Fähigkeiten über das bereits erwähnte grundlegende Vorwissen hinaus vorausgesetzt. Vertrautheit mit den Konzepten von Folgen und Reihen ist jedoch von Vorteil.

Konvergenz

Behandelter Stoff

Die Begriffe Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz werden eingeführt und ihre Zusammenhänge untersucht. Die Konvergenz von Reihen wird mithilfe der Epsilon-Umgebung präzise definiert. Die Konvergenz von Reihen wird durch die Anwendung von Konvergenzkriterien untersucht. Des Weiteren werden die Konvergenz und Stetigkeit von reellen Funktionen untersucht, wobei insbesondere auch die Regel von Bernoulli – de l'Hôpital besprochen wird.

Notwendiges Vorwissen

Die Schülerinnen und Schüler sollten mit den Konzepten der Folgen und Reihen vertraut sein. Eine vorherige intuitive Einführung in die Konvergenz wird empfohlen. Zudem sollten sie in der Lage sein, Funktionen abzuleiten.

Potenz- und Taylorreihen

Behandelter Stoff

Das Konzept der Potenzreihen und ihres Konvergenzradius wird eingeführt. Als Anwendung werden die MacLaurinsche Reihe und die allgemeinere Taylorreihe sowie deren Eigenschaften studiert.

Notwendiges Vorwissen

Für das Studium der Konvergenz von Potenzreihen ist es erforderlich, dass die Konvergenzkriterien von Reihen bekannt sind. Sollten ausschliesslich MacLaurinsche Reihen und Taylorreihen untersucht werden, so wird lediglich vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, Funktionen abzuleiten.

Fourierreihen

Behandelter Stoff

Fourierreihen und ihre Anwendungen werden diskutiert. Periodische Funktionen werden als Fourierreihen dargestellt, und die Fourierkoeffizienten werden berechnet und hergeleitet. Dabei werden die Symmetrieeigenschaften der sinusoiden Funktionen intensiv betrachtet. Abschliessend wird kurz auf die Eigenschaften der Fouriertransformation eingegangen.

Notwendiges Vorwissen

Die Schülerinnen und Schüler müssen mit den Konzepten der Differential- und Integralrechnung sowie den trigonometrischen Funktionen vertraut sein.

Differentialgleichungen

Behandelter Stoff

Das Konzept der Differentialgleichung wird eingeführt und sie werden klassifiziert. Das Lösen von Differentialgleichungen erfolgt mit verschiedenen Methoden: Lösungsansatz, Separation der Variablen und mithilfe des charakteristischen Polynoms. Insbesondere werden lineare Differentialgleichungen im Detail diskutiert, einschliesslich inhomogener Differentialgleichungen. Zusätzlich werden numerische Verfahren wie das Euler-Verfahren und das Runge-Kutta-Verfahren angewendet, um komplexere Differentialgleichungen zu lösen. Die Lösungsschar wird durch Richtungsfelder visualisiert, und erste Anwendungen werden gelöst.

Notwendiges Vorwissen

Die Schülerinnen und Schüler müssen mit den Konzepten der Differential- und Integralrechnung bekannt sein.

Differentialgleichungen in der Physik

Behandelter Stoff

Anwendungen von Differentialgleichungen in der Physik werden diskutiert. Dabei werden insbesondere Bewegungsgleichungen und elektrische Schaltkreise im Detail behandelt. Des Weiteren werden Themen wie Wärmeleitung und das Ausfliessen von Wasser aus Gefässen besprochen.

Notwendiges Vorwissen

Die Schülerinnen und Schüler müssen in der Lage sein, Differentialgleichungen sowohl mit der Methode der Separation der Variablen als auch mithilfe des charakteristischen Polynoms zu lösen, einschliesslich inhomogener Differentialgleichungen.

Vektoranalysis

Behandelter Stoff

Dieses Dossier bietet eine vergleichsweise einfache Einführung in das schwierige Thema der Vektoranalysis. Dabei werden die Begriffe des Vektor- und des Skalarfeldes eingeführt. Die drei Integrale in Feldern (Kurvenintegral, Flächenintegral, Volumenintegral) werden definiert. Ebenso werden die drei Differentialoperatoren (Gradient, Divergenz und Rotation) vorgestellt. Die Relationen zwischen diesen Grössen (Integralsatz von Gauss und Integralsatz von Stokes) werden erläutert. Die gewonnenen Erkenntnisse werden auf Phänomene der Elektrodynamik angewandt wie die Maxwellgleichungen (das Maxwell-Gesetz, das Induktionsgesetz, die Wellengleichung und die Kontinuitätsgleichung).

Notwendiges Vorwissen

Gute Kenntnisse in Vektorrechnung sowie Differential- und Integralrechnung werden vorausgesetzt. Für das Verständnis der physikalischen Anwendungen sind Kenntnisse in der Elektrizitätslehre (elektrische Felder, magnetische Felder und deren Eigenschaften, Arbeit in Feldern usw.) notwendig.

Analysis

Numerische Lösungsverfahren

Aufgabe 1: Löse folgende Gleichungen:

a) $5 - x = 25 + 3x - 4$

b) $x^2 - 7x - 120 = 0$

c)

d) $\frac{4x+5}{x-3} = \frac{17}{x-3}$

e) $36x^4 - 25x^2 + 4 = 0$

f) $2x^3 + 4x^2 - 6x = 0$

g) $x^3 - 2x^2 - 8x - 5 = 0$

h) $2x^3 + 4x^2 - 6x - 1 = 0$

Numerische Verfahren

Es gibt zwei Haupttypen von Lösungsverfahren: zum einen direkte Methoden, die durch endliche, exakte Rechenschritte die genaue Lösung eines Problems liefern, und zum anderen Näherungsverfahren, die lediglich Approximationen bieten.

Im Mathematikunterricht sind wir es gewohnt, exakte Lösungen analytisch zu berechnen. Mit Hilfe von numerischen Verfahren können näherungsweise Lösungen von Gleichungen berechnet werden.

Interesse an solchen Verfahren besteht meist aus einem der folgenden Gründe:

- Die Gleichung besitzt keine explizite Lösung oder
- eine vorhandene explizite Lösung ist nicht praktikabel für eine schnelle Berechnung oder liegt in einer Form vor, in der sich Rechenfehler stark bemerkbar machen.

In praktischen Anwendungen, in denen Lösungen nur mit endlicher Genauigkeit benötigt werden, kann ein iteratives[1] Verfahren trotz der Existenz einer direkten Methode sinnvoller sein, wenn es innerhalb kürzerer Zeit eine hinreichende Genauigkeit liefert.

[1] Iteration (von lat. iterare, wiederholen) beschreibt allgemein einen Prozess mehrfachen Wiederholens gleicher oder ähnlicher Handlungen zur Annäherung an eine Lösung oder ein bestimmtes Ziel.

Das Bisektionsverfahren

Einführung

Es wird eine Zahl zwischen 1 und 1000 gesucht. Ein Spieler versucht, diese Zahl zu erraten, wobei er lediglich die Rückmeldungen „grösser", „kleiner" oder „Treffer" erhält. Angenommen, die gesuchte Zahl ist 512. Wenn der Spieler das Bisektionsverfahren der binären Suche anwendet, entwickelt sich der folgende Dialog:

500 – grösser
750 – kleiner
625 – kleiner
562 – kleiner
531 – kleiner
515 – kleiner
507 – grösser
511 – grösser
513 – kleiner
512 – Treffer

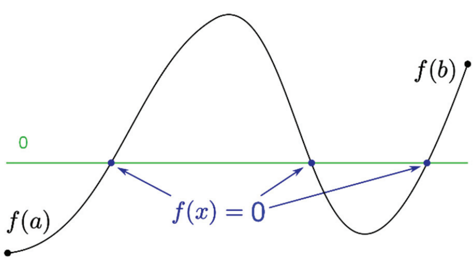
Hätte der Spieler stattdessen linear gesucht und bei 1 begonnen, so hätte der Dialog folgenden Verlauf genommen:

1 – grösser
2 – grösser
...
511 – grösser
512 – Treffer

Statt zehn Fragen hätte er also 512 Fragen gebraucht, das Bisektionsverfahren ist hier also deutlich effizienter.

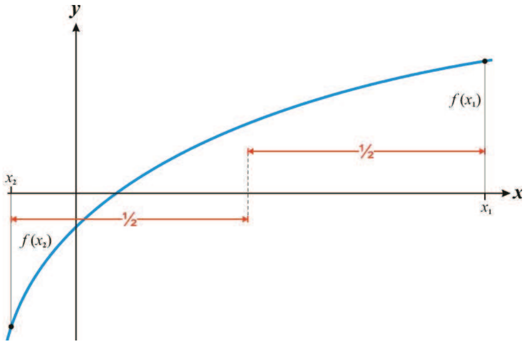
Zwischenwertsatz

Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Das Bisektionsverfahren ist eine numerische Methode zur Bestimmung einer Nullstelle. Es basiert auf dem *Zwischenwertsatz*: Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, dann existiert eine Zwischenstelle $x_N \in\ ]a, b[$ mit $f(x_N) = 0$.



Der Algorithmus

Bestimmen für eine im abgeschlossenen Intervall $\mathrm{I} = [a, b]$ stetige Funktion f eine Stelle x_N, für die gilt: $f(x_N) = 0$.



Wähle $a_0, b_0 \in \mathrm{I}$ mit $f(a_0) < 0$ und $f(b_0) > 0$.
Dann iteriere dann für i = 0, 1, 2, …, k

- $x_i := \dfrac{a_i + b_i}{2}$
- wenn $f(x_i) < 0$, dann $a_{i+1} := x_i$ und $b_{i+1} := b_i$
  wenn $f(x_i) > 0$, dann $a_{i+1} := a_i$ und $b_{i+1} := x_i$

$x_N \approx x_{k+1}$

Beispiel

Löse die Gleichung $x^5 - 8 = 0$

$a_0 = 1 \qquad b_0 = 1 \qquad x_0 = 1{,}5$

$f(x_0) = f(1{,}5) = 1{,}5^5 - 8 = -0{,}406$

$a_1 = 1{,}5 \qquad b_1 = 2 \qquad x_1 = 1{,}75$

$f(1{,}75) = 8{,}4\ldots$

$a_2 = 1{,}5 \qquad b_2 = 1{,}75 \qquad x_2 = 1{,}625$

$f(1{,}625) = 3{,}33\ldots$

$a_3 = 1{,}5 \qquad b_3 = 1{,}625 \qquad x_3 = 1{,}5625$

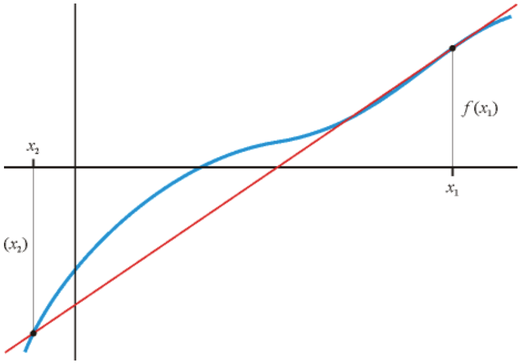
$\vdots$

$x = 1{,}515738\ldots$

Das Sekantenverfahren

Der Algorithmus

Bestimmen für eine im abgeschlossenen Intervall I stetige Funktion f eine Stelle x_N, für die gilt: $f(x_N) = 0$.



Wähle zwei Startwerte x_0 und x_1 in I und iteriere dann für $i = 1, 2, \ldots, k$

$$x_{i+1} := x_i - f(x_i)\frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

$x_N \approx x_{k+1}$

Herleitung

$$\left.\begin{aligned}\Delta x &= x_i - x_{i-1}\\ \Delta y &= f(x_i) - f(x_{i-1})\end{aligned}\right\} \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Gerade $y = mx + q$

$f(x_i) = mx_i + q$

$\Rightarrow q = f(x_i) - m \cdot x_i$

$y = mx - mx_i + f(x_i)$

Nullstelle $0 = mx_{i+1} - mx_i + f(x_i)$

$m x_{i+1} = m x_i - f(x_i)$

$x_{i+1} = x_i - \frac{1}{m} f(x_i)$

$= x_i - f(x_i)\frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$

Beispiel

Löse die Gleichung $x^5 - 8 = 0$

$f(x) = x^5 - 8$

$x_0 = 1 \qquad x_1 = 2$

$f(1) = -7 \qquad f(2) = 32 - 8 = 24$

$x_2 = 2 - 24\frac{2-1}{24-(-7)} = 1{,}2258$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1{,}2258$

$f(2) = 24 \qquad f(1{,}2258) = -5{,}232\ldots$

$x_3 = 1{,}36438\ldots$

$\vdots$

Regula falsi[2]

Das Regula-falsi-Verfahren ist eine Methode zur numerischen Berechnung von Nullstellen reeller Funktionen. Es kombiniert Methoden vom Sekantenverfahren- und dem Bisektionsverfahren.

Der Algorithmus

Bestimme für eine im abgeschlossenen Intervall I stetige Funktion f eine Stelle x_N, für die gilt: $f(x_N) = 0$.

Wähle $a_0, b_0 \in \mathrm{I}$ mit $f(a_0) < 0$ und $f(b_0) > 0$. Iteriere dann für i = 0, 1, 2, …, k

- $x_i := b_i - f(b_i)\dfrac{b_i - a_i}{f(b_i) - f(a_i)}$
- wenn $f(x_i) < 0$, dann $a_{i+1} := x_i$ und $b_{i+1} := b_i$
  wenn $f(x_i) > 0$, dann $a_{i+1} := a_i$ und $b_{i+1} := x_i$

$x_N \approx x_{k+1}$

Beispiel

Löse die Gleichung $x^5 - 8 = 0$

$a_0 = 1 \qquad b_0 = 2$

$f(1) = -7 \qquad f(2) = 24$

$x_0 = 1,2258\ldots \qquad f(1,2258\ldots) = -5,232 < 0$

$a_1 = 1,2258\ldots \qquad b_1 = 2$

$x_1 = 1,364\ldots \qquad f(1,364\ldots) = -3,27\ldots < 0$

$a_2 = 1,364\ldots \qquad b_2 = 2$

$x_2 \quad 1,4406\ldots$

$\vdots$

$x_N \approx 1,5157\ldots$

---

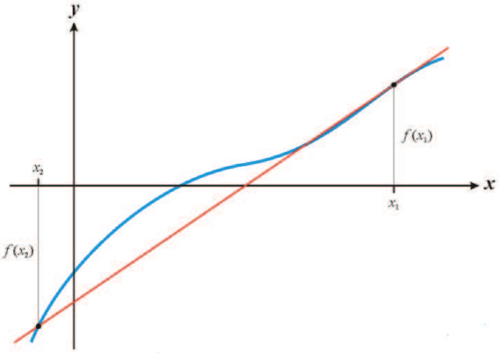
2 lateinisch: regula falsi = „Regel des Falschen"; auch: regula duarum falsarum positionum = „Regel vom zweifachen falschen Ansatz"

Das Tangentenverfahren nach Newton-Raphson

Beim Sekantenverfahren wird die Funktion durch eine lineare Funktion mit der Steigung der Sekanten genähert. Beim Newton-Raphson-Verfahren wird die Steigung mit der Tangente an die Funktion geschätzt.

Der Algorithmus

Man wählt einen Startwert x_0. Im Punkt $\left(x_0 | f(x_0)\right)$ legt man die Tangente an den Graphen. Sie schneidet die x-Achse an der Stelle x_1, die einen besseren Näherungswert für die Nullstelle x_N ergibt. Iteriere dann für $i = 1, 2, \ldots, k$



$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$x_N \approx x_{k+1}$

Herleitung

vgl. Sekantenverfahren

einzig gilt neu: $m = f'(x_i)$

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\, m = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Beispiel

Löse die Gleichung $x^5 - 8 = 0$

$x_0 = 1 \quad f(1) = -7 \quad f'(1) = 5 \cdot 1^4 = 5$

$x_1 = 1 - \frac{-7}{5} = 2{,}4$

$f(2{,}4) = 71{,}62\ldots \quad f'(2{,}4) = 165{,}88\ldots$

$x_2 = 1{,}968\ldots$

$f(1{,}968\ldots) = 21{,}53\ldots \quad f'(1{,}968\ldots) = 75{,}03\ldots$

$x_3 = 1{,}681\ldots$

$\vdots$

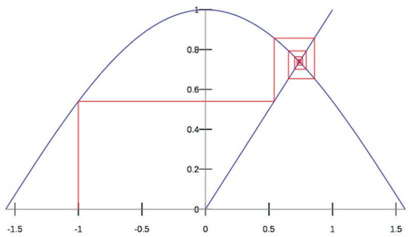
$x_N = 1{,}5157\ldots$

Das Fixpunktverfahren

Der Algorithmus

Die Gleichung, die gelöst werden soll, wird zuerst nach x aufgelöst, d.h. die Gleichung wird in die Fixpunktform $g(x) = x$ gebracht.

Anschliessend wird eine Startnäherung x_0 gewählt und $g(x_0)$ berechnet. Dieser Wert wird als neues x_1 genommen:
$x_1 = g(x_0)$.



Iteriere dann für i = 0, 1, 2, …, k

$$x_{i+1} := g(x_i)$$

$x_N \approx x_{k+1}$

Beispiele

Löse die Gleichung $\cos(x) - x = 0$ (vgl. Figur)

Bringe die Gleichung in Fixpunktform: $x = \cos(x)$ und wähle den Startwert $x_0 = -1$

$x_0 = -1 \quad \cos(-1) = 0{,}5403\ldots$

$x_1 = 0{,}5403\ldots \quad \cos(0{,}5403\ldots) = 0{,}8575\ldots$

$x_2 = 0{,}8575\ldots \quad \cos(0{,}8575\ldots) = 0{,}6542\ldots$

$\vdots$

Löse die Gleichung $x^6 - x - 1 = 0$

Wir bringen die Gleichung in Fixpunktform: $x = \sqrt[6]{x+1}$

$x_0 = 1 \quad \sqrt[6]{1+1} = 1{,}12\ldots$

$x_1 = 1{,}12\ldots \quad \sqrt[6]{1{,}12+1} = 1{,}1336\ldots$

$x_2 = 1{,}1336\ldots \quad \sqrt[6]{1{,}1336+1} = 1{,}1346\ldots$

$\vdots$

Aufgaben

Aufgabe 2: Löse folgende Gleichungen mit dem Bisektionsverfahren, der Sekantenmethode, der Regula falsi, dem Tangentenverfahren und dem Fixpunktverfahren auf drei Stellen nach dem Komma.

a) $x^2 - 2 = 0$ b) $x^3 = \sqrt{x^2 + 1}$

c) $x + 1 = 3 \cdot \sin(x)$ d) $x^3 - 3x + 1 = 0$

Aufgabe 3: Programmiere die fünf Verfahren zum Lösen von Gleichungen mit Python und/oder einem Tabellenkalkulationsprogramm.

Lösungen

1. a) $L = \{-4\}$
   b) $L = \{-8, 15\}$
   c) $L = \{0\}$
   d) $L = \{\ \}$
   e) $L = \{-2/3, -1/2, 1/2, 2/3\}$
   f) $L = \{-3, 0, 1\}$
   g) $L \approx \{-1.193, -1, 4.193\}$
   h) $L \approx \{1.110, -2.957, -0.152\}$

2. a) $L = \{1.414, -1.414\}$
   b) $L = \{1.151\}$
   c) $L = \{-2.585, 0.538, 1.868\}$
   d) $L = \{1.532, -1.879, 0.347\}$

3. –

Bildquellen

Seite 2 „Zwischenwertsatz" von Stephan Kulla via Wikimedia Commons (Public Domain)
Seite 3 „Bisektionsverfahren" von Ralf Pfeifer via Wikimedia Commons (Creative Commons BY-SA 3.0)
Seite 4 „Sekantenverfahren" von Ralf Pfeifer via Wikimedia Commons (Creative Commons BY-SA 3.0)
Seite 6 „Tangentenverfahren" von Ralf Pfeifer via Wikimedia Commons (Creative Commons BY-SA 3.0)
Seite 7 „Fixpunktverfahren" von Tinctorius / EdC via Wikimedia Commons (Creative Commons BY-SA 3.0)
Alle restlichen Grafiken von Christian Wyss (Creative Commons BY-SA 4.0)

Das vorliegende Skript wurde von Dr. Christian Wyss erstellt und ist unter www.mathema.ch zu beziehen.