Skripte zur Mathematik

# Vektoren & Matrizen

von

Christian Wyss

Skripte zur Mathematik

# Vektoren & Matrizen

von

Christian Wyss

mathema

tredition



Verlagslabel: mathema (www.mathema.ch)

ISBN Hardcover: 978-3-384-16386-8
Paperback: 978-3-384-16385-1

Auflage 1.2

Druck und Distribution im Auftrag des Autors:
tredition GmbH, Heinz-Beusen-Stieg 5, 22926 Ahrensburg, Germany


Dr. Christian Wyss, Chemin du Clos 60, 2502 Biel-Bienne, Schweiz.

Die Philosophie steht in diesem grossen Buch geschrieben, das unserem Blick ständig offen liegt – ich meine das Universum –; aber das Buch ist nicht zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt und sich mit den Buchstaben vertraut gemacht hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, und deren Buchstaben sind Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren, ohne die es dem Menschen unmöglich ist, ein einziges Bild davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen Labyrinth herum.

Galileo Galilei: „*Il Saggiatore*“ (1623)

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitende Worte

Diese Skripte zur Mathematik sind im Rahmen des Gymnasialunterrichts entstanden. Sie können als eigenständiges Lern- und Übungsmaterial eingesetzt werden. Sie sind jedoch primär als *unterrichtsbegleitendes Material* konzipiert. Eine Einführung und Anleitung durch eine Lehrperson wird daher empfohlen.

Die Skripte enthalten *Lückentexte*. Sie dienen der Festigung des erworbenen Wissens und sollten im Plenum mit der gesamten Klasse ausgefüllt werden. Diese handschriftlichen Einträge helfen, die Schlüsselbegriffe und Aussagen zu verinnerlichen und Herleitungen und Beweise besser nachzuvollziehen.

## *Zu den Übungen*

Um den Stoff zu vertiefen und zu festigen, halte ich es für unerlässlich, dass die Schülerinnen und Schüler eine Vielzahl von Übungen lösen. Die Skripte enthalten daher viele Übungen, die nicht nur das Erlernte festigen, sondern auch inner- und aussermathematische Anwendungen aufzeigen. Einige Übungen sind bewusst anspruchsvoller gestaltet und gehen über den üblichen Lehrstoff hinaus, können jedoch bei Bedarf übersprungen werden. Ein Stern ★ markiert, dass es sich bei der Aufgabe um eine zusätzliche Übung handelt, die über den obligatorischen Lernstoff hinausgeht. Im Folgenden werden die unterschiedlichen Übungstypen kurz erläutert.

*Einstiegsbeispiel*

Ein Einführungsbeispiel stellt eine Aufgabe dar, die eine neu einzuführende Thematik exemplarisch vorstellt. Diese Aufgabe soll die grundlegenden Begriffe der neuen Thematik vorwegnehmen und damit einführen. Dabei darf die Aufgabe einen gewissen Anspruch haben. Ein gemeinsames Lösen dieser Aufgaben im Plenum oder eine detaillierte Besprechung empfiehlt sich, um das Verständnis zu fördern.

*Grundaufgaben*

Eine Grundaufgabe ist eine Übungsaufgabe, die von den Schülerinnen und Schülern routiniert und sicher gelöst werden sollte. Durch die Bearbeitung mehrerer dieser Aufgaben sollen die Lernenden die Struktur verstehen und sich mit dem Lösungsweg vertraut machen, um ihn anschliessend situationsbezogen bei weiterführenden Aufgaben anwenden zu können.

*Erarbeitungsaufgaben*

Erarbeitungsaufgaben sind konzipiert, um den Lernstoff zu entwickeln und die Schülerinnen und Schüler konstruktivistisch an die neue Theorie heranzuführen.

*Anwendungsaufgaben*

Das erworbene theoretische Wissen hat in der Regel sowohl inner- als auch aussermathematische Anwendungen. Anwendungsaufgaben sollen die Fähigkeit zur Mathematisierung fördern und die Anwendbarkeit des Gelernten verdeutlichen.

*Beweisaufgaben*

In Beweisaufgaben lernen die Schülerinnen und Schüler, selbstständig einfache Beweise zu führen.

## Zu den Titelbildern

Die Titelblätter bieten die Möglichkeit, verschiedene Aspekte der Mathematik mit den Schülerinnen und Schülern zu thematisieren. Dies umfasst insbesondere folgende Bereiche:

*Mathematik und Ästhetik*

Mathematik und Kunst stehen auf vielfältige Weise in Beziehung. Ihre Verbindung zeigt sich in Musik, Malerei, Architektur, Skulptur und Textilgestaltung etc. Die Titelblätter zielen darauf ab, die Schönheit der Mathematik anhand der bildenden Kunst aufzuzeigen.

*Rechenhilfsmittel*

„Es ist unwürdig, die Zeit von hervorragenden Leuten mit knechtischen Rechenarbeiten zu verschwenden, weil bei Einsatz einer Maschine auch der Einfältigste die Ergebnisse sicher hinschreiben kann." G. W. Leibniz (1673).
Der Mensch hat bereits in der Frühzeit Rechenhilfsmittel entwickelt, angefangen vom Kerbholz über mechanische Rechenmaschinen bis hin zu analogen und digitalen Computern. Die Titelblätter illustrieren diese Entwicklung.

*Geschichte der Mathematik*

Die Geschichte der Mathematik reicht zurück bis ins Altertum und den Anfängen des Zählens in der Jungsteinzeit. Mathematik wurde und wird in allen Kulturkreisen praktiziert. Die Titelblätter thematisieren bedeutende Werke der Mathematik sowie herausragende Mathematikerinnen und Mathematiker, die die Entwicklung dieser Disziplin massgeblich beeinflusst haben.

## Zu den Inhalten

### Allgemeines

Die Aufteilung des Stoffes in mehrere Skripte dient der Flexibilität bei der Gestaltung des Unterrichts. Da Mathematik eine stark hierarchische Struktur aufweist, kann der Stoff nicht in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Skripte sind in einer möglichen Bearbeitungsreihenfolge angeordnet.

Die Skripte in diesem Sammelband behandeln Inhalte des fortgeschrittenen Curriculums. Dementsprechend werden bei allen grundlegende mathematische Kenntnisse vorausgesetzt. Dazu gehören Kenntnisse in Arithmetik und Algebra: Termumformungen, Gleichungen (insbesondere lineare und quadratische), Potenzen und Logarithmen usw. Zudem sollten die elementaren Funktionstypen (lineare, quadratische, Polynom- und Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen und trigonometrische Funktionen etc.) bekannt sein.

Im Folgenden wird kurz dargelegt, welches spezifische Vorwissen für jede Einheit zusätzlich erforderlich ist.

## *Grundoperationen*

*Behandelter Stoff*

Der Begriff des Vektors wird eingeführt, sowohl ohne Koordinaten als auch im Koordinatensystem. Dabei werden die Addition von Vektoren, die Multiplikation mit einem Skalar, der Betrag, die Kollinearität und die Linearkombination definiert. Diese Konzepte ermöglichen die Lösung grundlegender geometrischer Probleme wie die Bestimmung von Orten, den Mittelpunkt von Strecken und die Schwerpunktberechnung von Dreiecken.

*Notwendiges Vorwissen*

Es werden keine mathematischen Fähigkeiten über das bereits erwähnte grundlegende Vorwissen hinaus vorausgesetzt.

## *Produkte*

*Behandelter Stoff*

Das Skalarprodukt, das Vektorprodukt und das Spatprodukt werden eingeführt und auf ihre Eigenschaften untersucht. Mithilfe dieser Produkte werden angewandte Aufgaben zu Winkeln, Flächeninhalten und Volumina gelöst.

*Notwendiges Vorwissen*

Die Schülerinnen und Schüler müssen bereits mit den Grundbegriffen der Vektorrechnung vertraut sein, insbesondere der Komponentendarstellung von Vektoren, der Addition von Vektoren, der Multiplikation mit einem Skalar und dem Betrag.

## *Raumgeometrie*

*Behandelter Stoff*

Geometrische Objekte wie Punkte, Geraden, Ebenen und Kugeln werden durch Vektoren beschrieben. Die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen wird untersucht, und Schnittwinkel zwischen Geraden, Geraden und Ebenen sowie zwischen zwei Ebenen werden berechnet. Zudem werden Schnittpunkte und Schnittgeraden von Geraden und Ebenen sowie viele weitere geometrische Probleme gelöst.

*Notwendiges Vorwissen*

Die Schülerinnen und Schüler müssen mit den grundlegenden Operationen mit Vektoren (Betrag, Addition, skalare Multiplikation) sowie den Produkten (Skalar- und Vektorprodukt) vertraut sein.

## *Matrizen*

*Behandelter Stoff*

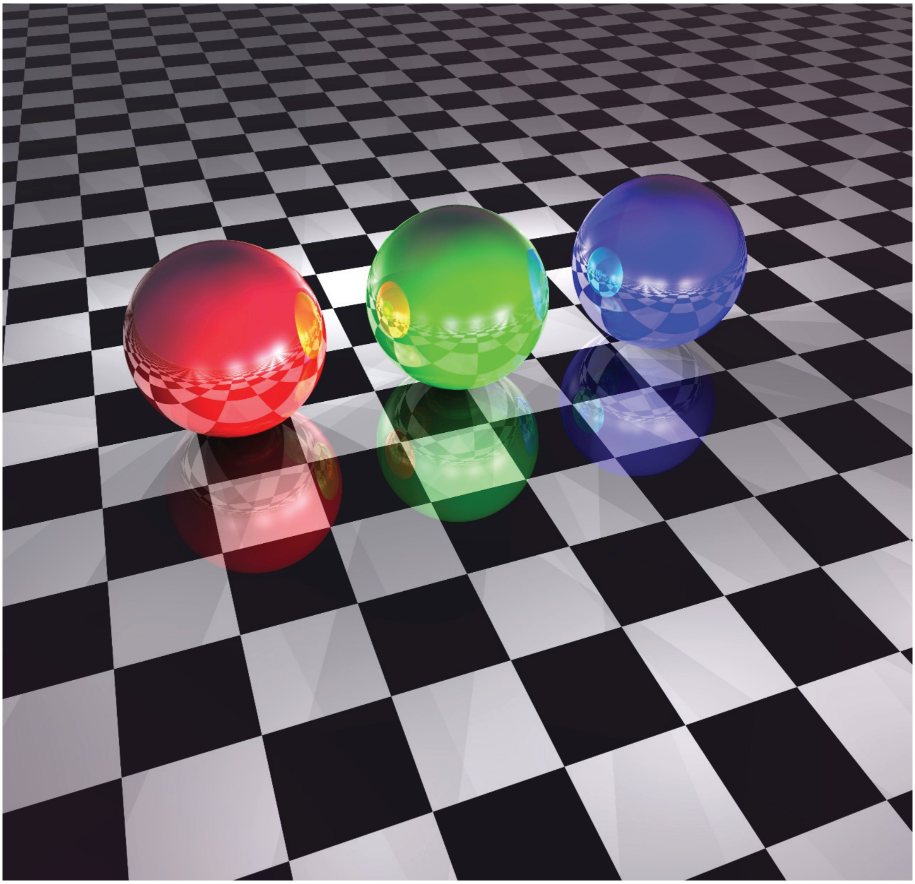
Die Grundbegriffe zu Matrizen sowie die dazugehörigen Grundoperationen (Addition, Multiplikation mit einem Skalar bzw. einer Matrix) werden eingeführt. Es werden Eigenschaften von Matrizen studiert wie quadratische Matrizen, Nullmatrizen, Einheitsmatrizen, inverse Matrizen, symmetrische, transponierte und orthogonale Matrizen.
Matrizen werden als geometrische Abbildungen im Raum interpretiert, und ihre Eigenschaften werden untersucht. Dabei werden Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet. Zum Schluss werden stochastische Matrizen untersucht und Gleichungssysteme gelöst.

*Notwendiges Vorwissen*

Grundkenntnisse in der Vektorgeometrie sind notwendig. Die Produkte und ihre geometrischen Anwendungen müssen nicht bekannt sein, jedoch wäre es von Vorteil, sie zu kennen.

Vektorrechnung

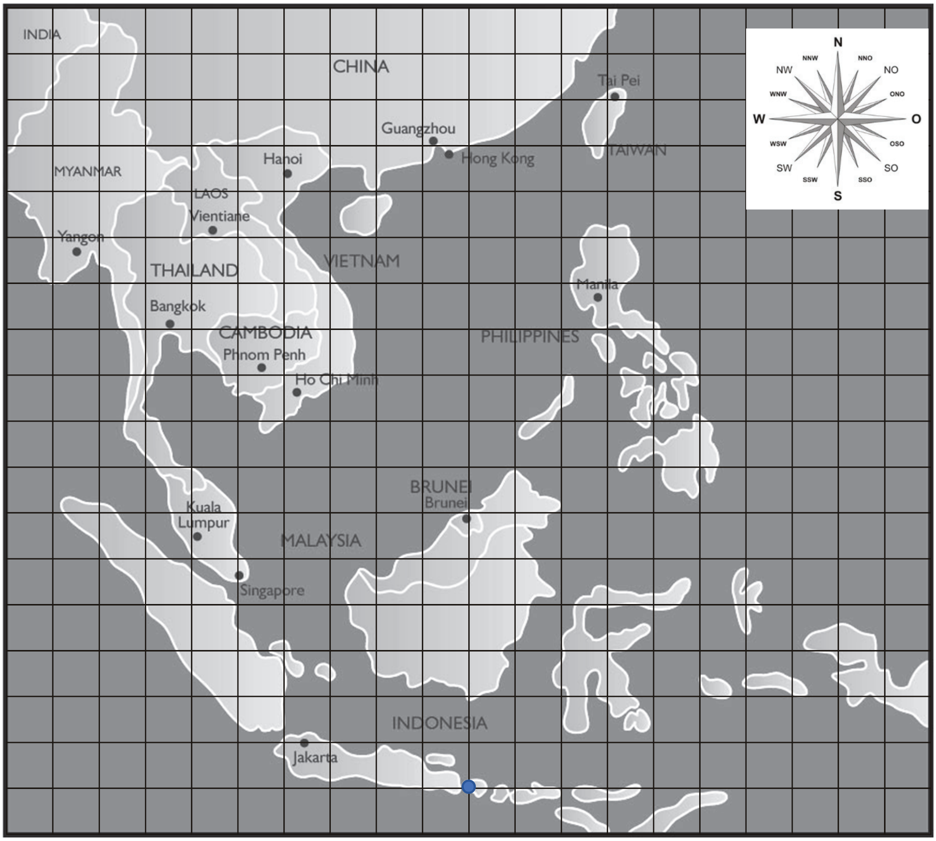
# Grundoperationen



Dieses Bild entstand vollständig auf dem Computer mit Hilfe von Ray tracing. Ray tracing ist ein auf der Aussendung von Strahlen basierender Algorithmus zur Verdeckungs- und Reflexionsberechnung, also zur Ermittlung der Sichtbarkeit und Erscheinung von dreidimensionalen Objekten von einem bestimmten Punkt im Raum aus. Dabei wird die Vektorrechnung sehr intensiv eingesetzt.

# 1. Eine Schatzsuche (Vektoren ohne Koordinaten)

*Aufgabe 1:* Deine Schatzsuche beginnt auf Bali (•). Captain Jacks Kompass weisst Dich zuerst 6 Schritte nach Norden. Von dort geht es 6 Einheiten nach Westen und 1.4 Schritte nach SO. Im Anschluss 4.5 Einheiten nach Nord-Nordosten, eine Einheit nach Westen, 2.2 Schritte nach WNW. Nun sollst Du einen Tag ausruhen und dann noch 4.5 Schritte NNO reisen. Wo bist Du nun? Einfachheitshalber bewegen wir uns immer nur auf den Kreuzstellen des Gitterrasters.




a) Wohin bringt Dich Captain Jacks Kompass? An welchen Orten kommst Du vorbei?

b) Der Kompass gibt insgesamt sieben Anweisungen. Woraus bestehen diese Anweisungen?

c) An welche Orte kannst Du mit diesen Anweisungen reisen, wenn Du auf Bali beginnst, Du Dich aber nicht an die Reihenfolge hältst.

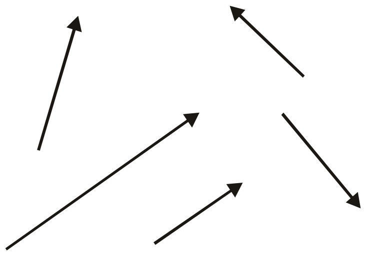
d) Wie kommst Du von Hanoi wieder zurück auf Bali?

e) Gibt es einen direkten Weg von Bali nach Hanoi?

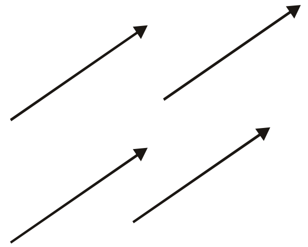
f) Wo endest Du, wenn die Reise nicht in Bali, sondern in Flores (3 Einheiten östlich von Bali) beginnt?

*Definition:* In der Geometrie wird ein ***Vektor*** durch Pfeile dargestellt. Alle Pfeile mit der gleichen Richtung und Länge repräsentieren den gleichen Vektor.

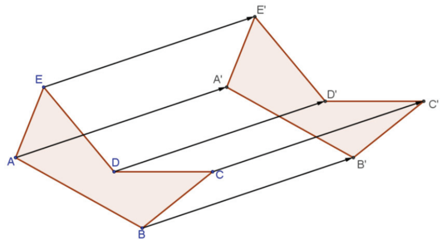
*Diese Pfeile repräsentieren unterschiedliche Vektoren*



*Diese Pfeile repräsentieren alle denselben Vektor.*



Eine Translation (Verschiebung) wird durch einen Vektor festgelegt. Jeder Punkt wird um denselben Vektor verschoben.




*Notation:* Vektoren werden durch den Anfangs- und den Endpunkt oder mit Kleinbuchstaben mit einem Pfeil bezeichnet:

$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, $\vec{u}$ ...

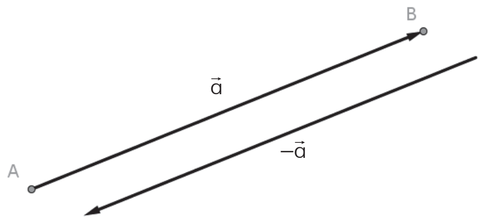
*Definition:* Ein ***Skalar*** ist eine reelle Zahl – eine Grösse also die allein durch die Angabe eines Zahlenwertes charakterisiert ist. Skalare schreiben wir in der Regel mit kleinen Buchstaben: k, s, t, $\lambda$, $\mu$, ...

*Spezielle Vektoren:*

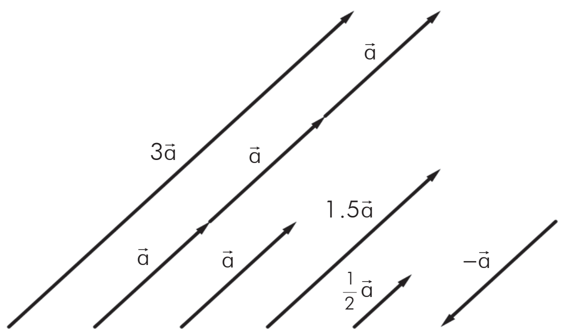
Ein ***Einheitsvektor*** $\vec{e}$ hat die Länge 1.

Der ***Nullvektor*** $\vec{0}$ ist ein Vektor mit der Länge null.

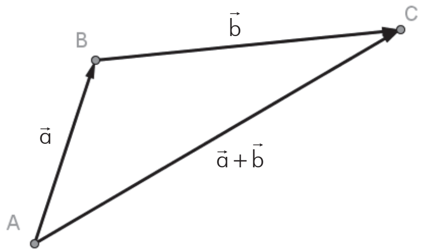
*Definition:* Zu jedem Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ existiert ein ***Gegenvektor*** $-\vec{a} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Der Gegenvektor hat dieselbe Länge aber die entgegengesetzte Richtung. Vektor und Gegenvektor ergeben zusammen den Nullvektor $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.



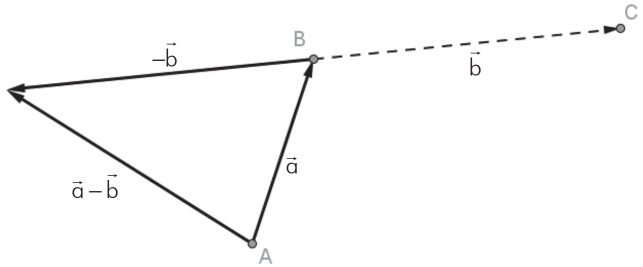

***Multiplikation mit einem Skalar:*** Wird ein Vektor $\vec{a}$ mit einem Skalar k multipliziert, so wird der Vektor $\vec{a}$ um den Faktor k gestreckt.



*Addition:* Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem man sie aneinandersetzt. Das Resultat ist der direkte Vektor von Anfang bis Ende.
$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$




*Subtraktion:* Der Vektor $\vec{b}$ wird vom Vektor $\vec{a}$ subtrahiert, indem man $\vec{a}$ und den Gegenvektor $-\vec{b}$ addiert.
$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$




*Aufgabe 2:* Die Schatzsuche enthält bereits die wesentlichen Eigenschaften der Vektoren. Gib jeweils ein Beispiel aus der Reise an:

Vektor ....................................................................................

Richtung ....................................................................................

Länge ....................................................................................

Notiere einen der Vektoren auf der Reise ..............................................

Einheitsvektor ....................................................................................

Nullvektor ....................................................................................

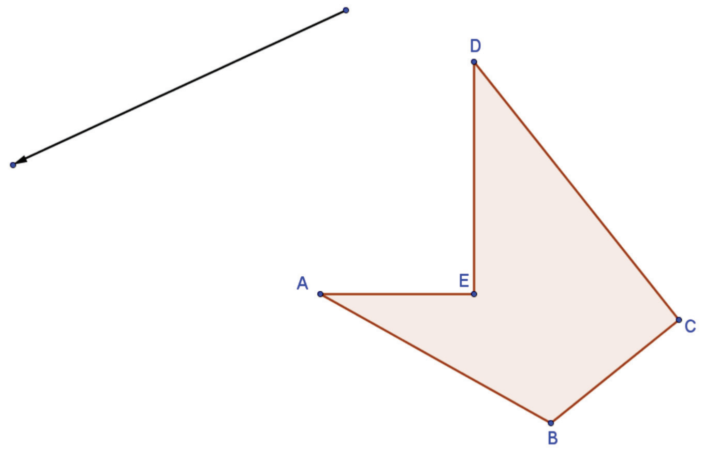
Gegenvektor ....................................................................................

Addition der Vektoren ....................................................................................

Multiplikation mit einem Skalar ..............................................................

identische Vektoren ....................................................................................

*Aufgabe 3:* Verschiebe die Figur um den Vektor.




*Aufgabe 4:* Welche der folgenden Grössen sind skalar, welche vektoriell?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | Masse | b) | Temperatur | c) | Kraft | d) | Gewicht |
| e) | Energie | f) | Zeit | g) | Frequenz | h) | Beschleunigung |

*Aufgabe 5:* A, B, C, D seien die Ecken eines Quadrates. Wie viele verschiedene Vektoren werden durch je zwei Punkte festgelegt?

*Aufgabe 6:* Zeichne einen Vektor $\vec{d}$ in östliche Richtung mit 2 cm Länge.
Zeichne die Vektoren $3\vec{d}$, $0.5\vec{d}$, $-2\vec{d}$ und $-0.75\vec{d}$.

*Aufgabe 7:* Wird ein Vektor mit einem Skalar k multipliziert, so gilt

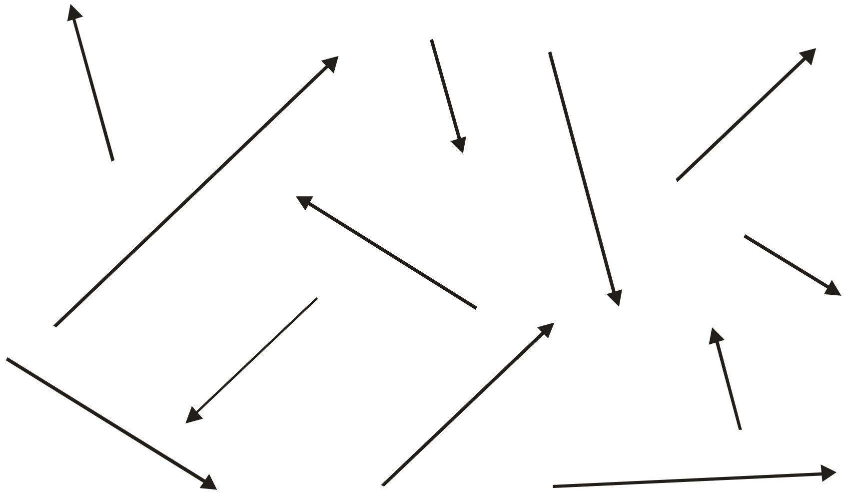
| | |
|---|---|
| $1 < k$ | $k \cdot \vec{a}$ hat dieselbe Richtung wie $\vec{a}$ und ist länger als $\vec{a}$. |
| $k = 1$ | $k \cdot \vec{a}$ ist .................... dem Vektor $\vec{a}$. |
| $0 < k < 1$ | $k \cdot \vec{a}$ hat .................... Richtung wie $\vec{a}$ und ist .................... als $\vec{a}$. |
| $k = 0$ | $k \cdot \vec{a}$ ist ............................... |
| $-1 < k < 0$ | $k \cdot \vec{a}$ hat .................... Richtung wie $\vec{a}$ und ist .................... als $\vec{a}$. |
| $k = -1$ | $k \cdot \vec{a}$ ist ........................................................ $\vec{a}$. |
| $k < -1$ | $k \cdot \vec{a}$ hat .................... Richtung wie $\vec{a}$ und ist .................... als $\vec{a}$. |

*Definition:* Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heissen ***kollinear***, falls gilt

$$\vec{b} = k \cdot \vec{a}, \qquad \text{wobei k irgendeine Zahl ist.}$$

*Aufgabe 8:* Sind die Vektoren in Aufgabe 6 zueinander kollinear?

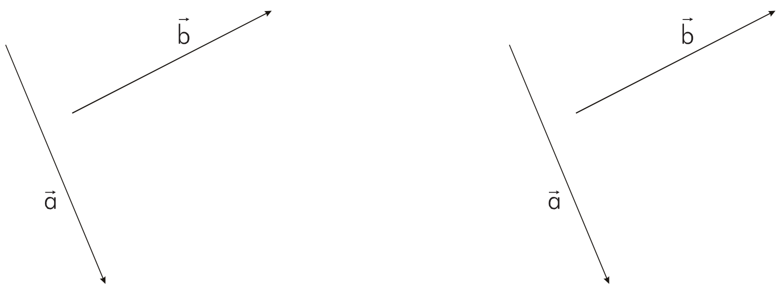
*Aufgabe 9:* Markiere alle kollinearen Vektoren mit derselben Farbe.



*Aufgabe 10:* Zeichne jeweils die Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$.

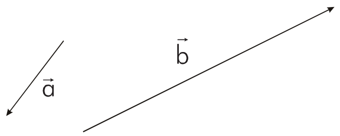
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ | $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$

$\vec{d} = -\vec{b}$ | $\vec{d} = -\vec{a} + \vec{a}$

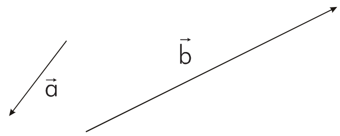


*Aufgabe 11:* Zeichne die Vektoren $\vec{c}$:

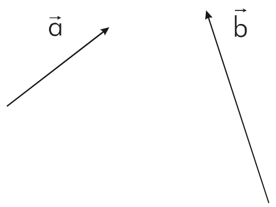
$\vec{c} = -\vec{b} + \vec{a}$



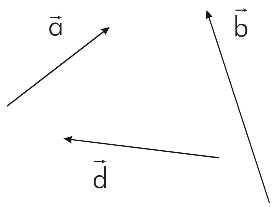

$\vec{c} = \vec{b} - 3 \cdot \vec{a}$




$\vec{c} = -0.5 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{a}$



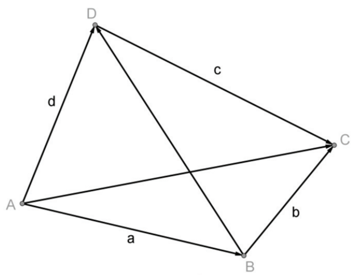

$\vec{c} = \vec{d} - 0.5 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{a}$




*Definition:* Zählen wir Vektoren oder ein Vielfaches von diesen Vektoren zusammen, so nennen wir dies eine ***Linearkombination*** von Vektoren: $\vec{x} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \eta \cdot \vec{c} + \ldots$

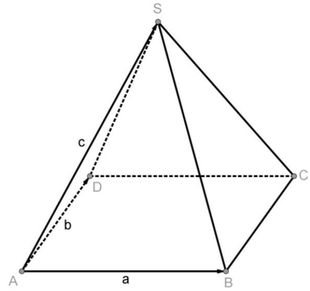
Wir sagen, dass wir den Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ … darstellen.

*Aufgabe 12:* Drücke in nebenstehendem Viereck die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BD}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ aus.

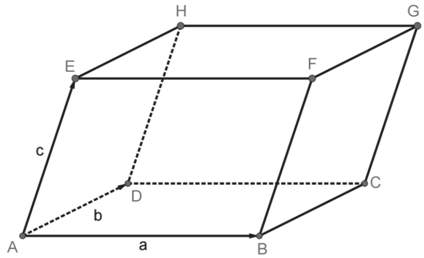



*Aufgabe 13:* Drücke in einem Parallelogramm ABCD die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{DC}$ durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ aus.

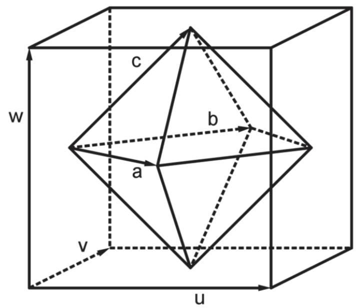
*Aufgabe 14:* Gegeben ist eine quadratische Pyramide durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AS}$. Drücke die Vektoren $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{DS}$, $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CA}$ $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{SC}$ durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



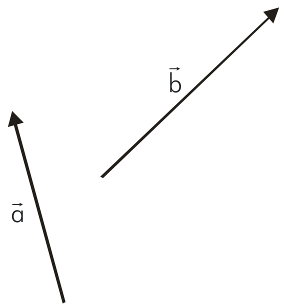
*Aufgabe 15:* Gegeben ist ein Parallelepiped (Spat) durch die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, und $\vec{c}$. Drücke die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{AG}$ und $\overrightarrow{HB}$ durch die drei gegebenen Vektoren aus.




*Aufgabe 16:* Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels bilden ein Oktaeder. Stelle die Kantenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als Linearkombinationen der Kantenvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ des Würfels dar.




*Aufgabe 17:* Hier sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gezeichnet. Zeichne $\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{b}+\vec{a}$. Beachte die Reihenfolge der Operationen, d.h. bei $\vec{a}+\vec{b}$ beginnst Du mit dem Vektor $\vec{a}$ und es folgt $\vec{b}$.




*Aufgabe 18:* Hier sind drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gezeichnet. Zeichne $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ und $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.