
Finite-Element-Modellierung 1

Thomas Bulenda

Finite-Element- Modellierung 1

Anwendungen in der linearen Statik

Prof. Dr.-Ing. Thomas Bulenda
Fakultät Bauingenieurwesen
OTH Regensburg
Regensburg, Deutschland

ISBN 978-3-658-42203-5

ISBN 978-3-658-42204-2 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-42204-2>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2024

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Frieder Kumm

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Das Papier dieses Produkts ist recyclebar.

Für meine Frau Jessica und meinen Sohn Julius

Vorwort

Die Finite-Element-Methode ist ein wichtiges Werkzeug für den Tragwerksplaner. Dabei steht für ihn vor allem die Modellierung mit Finiten Elementen im Vordergrund, weniger die Grundlagen der Programmierung. An den Hochschulen werden in der Regel die unabdingbaren Grundprinzipien des Verfahrens unterrichtet, für die Anwendung bleibt oftmals nur wenig Zeit. Die Arbeit mit einem kommerziellen Programm lernt der junge Ingenieur dann durch Learning by Doing. Geeignete Fachliteratur gibt es wenig.

Hier will das vorliegende Buch ansetzen, indem es die Modellierung mit Finiten Elementen in den Vordergrund stellt. Es entstand aus den Vorlesungen zur Finiten-Element-Methode, die der Autor seit 1998 an der OTH Regensburg hält. Die Themenbereiche kommen hauptsächlich aus seiner Tätigkeit als Prüfingenieur für Baustatik in der Sennewald+Steger PartGmbH.

Das Buch umfasst zwei Bände.

Im ersten Band werden Themen der linearen Statik behandelt. So werden die Normalkraftstäbe, Balken, Scheiben, Platten, Plattenbalken und räumliche Systeme mit ihren jeweiligen Besonderheiten besprochen. In diesem Band finden sich auch zwei Kapitel, die eher den theoretischen Grundlagen als der Modellierung zuzuordnen sind. Das Kap. 2 erläutert den Grundgedanken der Finite-Element-Methode am Beispiel des Normalkraftstabs und in Kap. 8 werden einige numerische Aspekte besprochen.

Der zweite Band widmet sich der Modellierung im Bereich der nichtlinearen Statik. Hier werden die materielle und die geometrische Nichtlinearität sowie die Systemnichtlinearität in unterschiedlichen Anwendungen behandelt. Der ausführliche Anhang des zweiten Bandes erklärt die Algorithmen zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme und Eigenwertprobleme anhand vieler Beispiele.

Das Buch hat den Anspruch, die gezeigten Systeme so zu erklären, dass sie vom Leser nachgebaut werden können. Die Modellierung erfolgt zudem nicht nur oberflächlich, sondern geht an vielen Stellen stark ins Detail. Während man die prinzipiellen Eingaben noch recht gut allgemein und damit programmunabhängig halten kann, geht dies bei den Spezialfällen nicht mehr. Hier unterscheiden sich die Programme zu stark in ihren Möglichkeiten und Eingaben. Sollen ambitionierte Modellbildungen dargestellt werden, muss man sich folglich für die konkrete Umsetzung mit einem Programm entscheiden. In diesem Buch wurden alle Berechnungen mit den Programmen der SOFiSTiK AG durchge-

führt. Damit sie vom Leser nachvollzogen werden können, sind auch die Eingaben in der CADINDP-Sprache mit abgedruckt. Für Anwender der SOFiSTiK-Programme entsteht so ein zusätzlicher Nutzen. Ingenieure, die mit anderen Programmen arbeiten, können die Eingaben natürlich nicht übernehmen, sollten aber durch die ausführliche Beschreibung in der Lage sein, sie auf ihr Programm zu übertragen.

Eine Besonderheit des Buches ist, dass nicht nur die eine Lösung eines Problems dargestellt wird. Bei vielen Beispielen werden auch auf den ersten Blick durchaus denkbare Herangehensweisen verfolgt, die aber dem Problem nicht gerecht werden. Wenn der Leser auf diese Weise ermutigt wird, seine eigenen Modellbildungen kritisch zu hinterfragen, hat das Buch sein Ziel erreicht.

Bei Springer Vieweg bedanke ich mich für die unkomplizierte Zusammenarbeit.

Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf eine geschlechtsneutrale Differenzierung verzichtet. Entsprechende Begriffe gelten im Sinne der Gleichbehandlung grundsätzlich für beide Geschlechter. Die verkürzte Sprachform beinhaltet keine Wertung.

Regensburg
August 2023

Thomas Bulenda

Inhaltsverzeichnis

1	Übersicht - Einführung	1
1.1	Übersicht	1
1.2	Einführungsbeispiel: Berechnung des Kreisumfangs	2
1.3	Übertragung auf die Statik	7
1.4	Modellbildung	8
1.5	Eingabewerte	10
1.6	Formen der Eingabe	13
	Literatur	14
2	Die Grundgedanken der Finite-Element-Methode am Beispiel des Normalkraftstabs	15
2.1	Übersicht	15
2.2	Arbeit mit Ansatzfunktionen und starke und schwache Form des Gleichgewichts	17
2.2.1	Die Differentialgleichung als lokale Form des Problems	17
2.2.2	Gewichtete Integralform	22
2.2.3	Prinzip der Virtuellen Verrückungen	32
2.2.4	Prinzip vom Minimum der Potentiellen Energie	37
2.2.5	Zusammenfassung	40
2.3	Überleitung zur Finite-Element-Methode	42
2.3.1	Übersicht	42
2.3.2	Ansätze mit Verschiebungsgrößen als Freiheitsgrade	43
2.3.3	Herleitung eines Finiten Elements für Normalkraftstäbe	44
2.3.4	Diskretisierung mit einem Element	47
2.3.5	Diskretisierung mit zwei Elementen	48
2.3.6	Elementbeziehungen mit dem Prinzip der Virtuellen Verrückungen	53
2.3.7	Elementbeziehungen mit dem Galerkin-Verfahren	53
2.3.8	Genauigkeit der Ansatzfunktionen	54

2.4	Normalkraftstäbe: Einfluss von Netzteilung und Art der Schnittkraftermittlung	57
2.4.1	Berechnung 1: System mit einem Element und Knotenlast	57
2.4.2	Berechnung 2: System mit einem Element und Linienlast	59
2.4.3	Berechnung 3: System mit zwei Elementen und Knotenlasten	63
2.4.4	Berechnung 4: System mit zwei Elementen und Linienlast	64
2.4.5	Konvergenzstudie	66
2.4.6	Unterschied zwischen Netzteilung und Stabteilung	69
2.4.7	System mit zwei Fachwerkelementen und Knotenlasten	71
2.4.8	Zusammenfassung	73
	Literatur	73
3	Der schubweiche Balken	75
3.1	Zweifeldträger unter Gleichlast	75
3.2	Zweifeldträger unter Einzellasten	83
3.3	Einfeldträger mit Kragarm	85
3.4	Ergebnis	91
	Literatur	91
4	Scheiben	93
4.1	Grundannahmen der Scheibentheorie	93
4.2	Qualitative Erklärung des zweiachsigen Spannungszustands	95
4.3	Spannungstransformation	107
4.4	Kragarm mit Scheibenelementen	110
4.4.1	Berechnung 1: Kragarm als Stab mit einem Element	110
4.4.2	Berechnung 2: Kragarm als Scheibe mit einem Element	113
4.4.3	Berechnung 3: Kragarm als Scheibe mit feinerem Netz (10×4)	120
4.4.4	Berechnung 4: Kragarm als Scheibe mit sehr feinem Netz (200×60)	123
4.4.5	Singularitäten	125
4.4.6	Berechnung 5: Kragbalken als Scheibe federgelagert, $c_p = 10^8 \text{ kN/m}^2$	138
4.4.7	Berechnung 6: Kragbalken als Scheibe federgelagert, $c_p = 10^7 \text{ kN/m}^2$	141
4.4.8	Analytische Berechnung der Verformung in y-Richtung	142
4.5	Überlegungen zu Elementen	142
4.5.1	Kompatibles und inkompatibles Element	142
4.5.2	Dreieckselement	145
4.5.3	Isoparametrisches Viereckselement – Geometrieapproximation	146
4.5.4	Grundregeln der Netzgenerierung	148
4.6	Berechnung 7: Echte Scheibe	149
4.7	Berechnung 8: Echte Scheibe federgelagert, $c_p = 10^7 \text{ kN/m}$	153
4.8	Fehlerschätzung	158

4.9	Auswirkung der Lasteinleitung	161
4.10	Auswirkung der horizontalen Lagersteifigkeit	167
4.11	Spaltzugkräfte	175
4.12	Scheibe mit Loch	181
4.13	Flächenbewehrung	188
4.13.1	Verfahren von Baumann	188
4.13.2	Herleitung nach Schlaich/Schäfer	191
4.13.3	Platten-/Faltwerkbemessung bei SOFiSTiK	193
4.13.4	Zusätzliche Überlegungen	195
4.13.5	Verfahren von Baumann – Einfluss des Winkels zwischen Bewehrung und Lastrichtung	195
4.13.6	Unbemessbare Elemente	196
4.14	Bemessungsbeispiel Quadratscheibe	197
4.15	Bemessung im Zustand II	205
4.16	Praxisbeispiel: Stahlbetonpfeiler	208
4.17	Praxisbeispiel: Aussteifende Deckenscheibe	210
4.18	Schubfeldberechnung	212
4.18.1	Voraussetzungen	212
4.18.2	Einführungsbeispiel	212
4.18.3	Schubfeld aus Trapezblech mit Öffnungen	220
	Literatur	226
5	Platten	229
5.1	Grundannahmen	229
5.2	Schubstarre Platte (Kirchhoff-Platte)	232
5.3	Schubweiche Platte	234
5.4	Transformation der Schnittgrößen	235
5.5	Finite-Element-Formulierungen für Platten	238
5.6	Lagerung von Platten	239
5.7	Singularitäten	240
5.8	Plattenberechnung mit Finiten Elementen	245
5.9	Abhebende Ecken	258
5.10	Drillweiche Platte	259
5.11	Randschichteffekt	262
5.12	Einfluss der Querdehnzahl	271
5.13	Einfluss einer Federlagerung	273
5.14	Einachsiger Lastabtrag	275
5.15	Dreiseitig gelagerte Platte	278
5.16	Schiefe Platte	280
5.17	Bodenplatten	283
5.18	Platte mit einspringender Wand	310
	Literatur	339

6	Plattenbalken	341
6.1	Platte ohne Unterzug	342
6.2	Starre Lager anstelle des Unterzuges	345
6.3	Berücksichtigung des Steges als zentrischen Balken	349
6.4	Berücksichtigung des Steges als zentrischen Balken mit angepasster Höhe	356
6.5	SOFiSTiK-Plattenbalken-Automatik	359
6.6	Exzentrisch gekoppelter Balken	364
6.7	Platte mit zentrischen Elementen unterschiedlicher Dicke	374
6.8	Faltwerk mit exzentrischen Elementen unterschiedlicher Dicke	380
6.9	Räumliches faltwerk	385
6.10	Zusammenfassung der Ergebnisse	397
6.11	Räumliches faltwerk mit Steghöhe 1,15 m	399
6.12	Plattenbalkenbemessung	399
	Literatur	413
7	Räumliche Systeme	415
7.1	Einfeldträger im Raum	415
7.2	Orientierung des lokalen Koordinatensystems	424
7.3	L-Profil – Schiefe Biegung	435
7.4	Träger mit Knick	439
7.5	Besonderheiten räumlicher Systeme	445
7.6	Detailmodellierung	450
7.7	Praxisbeispiele	454
	Literatur	456
8	Numerische Aspekte	459
8.1	Gauß-Integration	459
8.2	Übertragungsverfahren für Stabtragwerke	464
8.3	Diskretisierungsfehler	465
8.3.1	Bestimmung des Fehlers bei bekannter exakter Lösung	468
8.3.2	Fehlerschätzung bei unbekannter Lösung	470
8.3.3	Relativer Fehler	474
8.3.4	Fehlerschätzung für die Finite-Element-Lösung mit nur einem Element	475
8.3.5	a-priori-Fehlerestimatoren – Konvergenz der Finite-Element-Lösung	478
8.3.6	Singularitäten	480
8.4	Rundungs- und Abbruchfehler	480
	Literatur	490

9	Kontrollmöglichkeiten bei der Finite-Element-Berechnung	493
9.1	Kontrolle des Finite-Element-Modells	493
9.2	Kontrolle des Programms	499
9.3	Kontrolle der Eingabe	500
9.4	Kontrolle der Ergebnisse	502
	Stichwortverzeichnis	505