

Table des matières

Chapitre I Introduction à l'analyse infinitésimale

I.1 Coordonnées cartésiennes, fonctions polynomiales	2
Algèbre	2
Algebra nova	6
Géométrie de Descartes	8
Fonctions polynomiales	10
Exercices	14
I.2 Théorème du binôme et fonction exponentielle	17
Théorème du binôme	18
Fonction exponentielle	25
Exercices	28
I.3 Logarithmes et aires	29
Calcul des logarithmes	30
Calcul d'aires	33
Aire de l'hyperbole et logarithmes naturels	34
Exercices	39
I.4 Fonctions trigonométriques	40
Les relations fondamentales et leurs conséquences	43
Séries infinies	46
Fonctions trigonométriques inverses	49
Calcul de Pi	52
Exercices	55
I.5 Nombres et fonctions complexes	57
Les formules d'Euler et ses conséquences	59
Un regard neuf sur les fonctions trigonométriques	62
Produit d'Euler pour la fonction sinus	62
Exercices	66
I.6 Fractions continues	68
Origines	68
Réduites	71
Irrationalité	76
Exercices	78

Chapitre II Calcul différentiel et intégral

II.1 La dérivée	81
La dérivée	81
Règles de différentiation	84
Représentation paramétrique et équations implicites	88
Exercices	89
II.2 Dérivées d'ordre supérieur et série de Taylor	91
La deuxième dérivée	91
De conversione functionum in series	94
Exercices	97
II.3 Enveloppes et courbure	98
Enveloppe d'une famille de droites	98
La caustique d'un cercle	99
Enveloppe de courbes balistiques	101
Courbure	101
Exercices	105
II.4 Calcul intégral	107

Primitives	107
Applications	109
Techniques d'intégration	112
Formule de Taylor avec reste	116
Exercices	117
II.5 Intégration de certaines fonctions élémentaires	118
Intégration de fonctions rationnelles	118
Substitutions importantes	123
Exercices	125
II.6 Calcul approché d'intégrales	126
Développement en série	126
Méthodes numériques	129
Développements asymptotiques	131
Exercices	132
II.7 Équations différentielles ordinaires	134
Quelques types d'équations intégrables	139
Équations différentielles d'ordre 2	140
Exercices	143
II.8 Équations différentielles linéaires	144
Équation homogène à coefficients constants	145
Équation linéaire inhomogène	148
Équation de Cauchy	152
Exercices	152
II.9 Résolution numérique des équations différentielles	154
Méthode d'Euler	154
Méthode basée sur la série de Taylor	156
Équations d'ordre 2	158
Exercices	159
II.10 La formule d'Euler-Maclaurin	160
Découverte de la formule par Euler	160
De Usu Legitimo Formulae Summatoriae Maclauriniana	163
Formule de Stirling	165
La série harmonique et la constante d'Euler	167
Exercices	169
 Chapitre III Les fondements de l'analyse classique	
III.1 Suites infinies et nombres réels	172
Convergence d'une suite	172
Construction des nombres réels	177
Suites monotones et le supremum	182
Points d'accumulation	184
Exercices	186
III.2 Séries infinies	188
Critères de convergence	189
Convergence absolue	192
Séries doubles	195
Le produit de Cauchy de deux séries	197
Échange d'une série infinie avec une limite	199
Exercices	200
III.3 Fonctions réelles et continuité	202
Fonctions continues	204
Théorème des valeurs intermédiaires	206
Le théorème du maximum	207
Fonctions monotones et fonctions inverses	208
Limite d'une fonction	209
Exercices	211

III.4 Convergence uniforme et continuité uniforme	213
La limite d'une suite de fonctions	213
Critère de Weierstrass pour la convergence uniforme	217
Continuité uniforme	218
Exercices	220
III.5 L'intégrale de Riemann	221
Définitions et critères d'intégrabilité	221
Fonctions intégrables	226
Inégalités et théorèmes de la moyenne	228
Intégration de séries infinies	230
Exercices	232
III.6 Fonctions différentiables	235
Le théorème fondamental du calcul différentiel	239
Les règles de l'Hospital	242
Dérivées de séries infinies	245
Exercices	246
III.7 Séries entières et série de Taylor	248
Détermination du rayon de convergence	249
Continuité	250
Différentiation et intégration	251
Série de Taylor	252
Exercices	255
III.8 Intégrales impropres	257
Fonctions bornées sur des intervalles infinis	257
Fonctions non bornées sur un intervalle fini	260
Fonction gamma d'Euler	261
Exercices	262
III.9 Deux théorèmes sur les fonctions continues	263
Fonctions continues, mais nulle part différentiables	263
Théorème d'approximation de Weierstrass	265
Exercices	270

Chapitre IV Calcul différentiel et intégral à plusieurs variables

IV.1 Topologie de l'espace de dimension n	273
Distances et normes	273
Convergence de suites de vecteurs	275
Voisinages, ensembles ouverts et fermés	278
Ensembles compacts	283
Exercices	285
IV.2 Fonctions continues	287
Fonctions continues et compacité	289
Continuité uniforme et convergence uniforme	290
Applications linéaires	293
Caractérisation des fonctions continues par Hausdorff	294
Intégrales dépendant de paramètres	297
Exercices	298
IV.3 Fonctions différentiables de plusieurs variables	300
Différentiabilité	302
Contre-exemples	304
Une interprétation géométrique du gradient	305
Le théorème des accroissements finis	308
Le théorème des fonctions implicites	309
Différentiation d'une intégrale par rapport à un paramètre	311
Exercices	313
IV.4 Dérivées d'ordre supérieur et séries de Taylor	316
Série de Taylor pour deux variables	319

Série de Taylor pour n variables	320
Problèmes d'extremum	323
Minimum conditionnel (multiplicateurs de Lagrange)	325
Exercices	328
IV.5 Intégrales multiples	330
Intégrale double sur un rectangle	330
Ensembles négligeables et fonctions discontinues	334
Domaines bornés arbitraires	336
La formule de changement de variables pour les intégrales doubles	338
Intégrales sur un domaine non borné	345
Exercices	347
Bibliographie	351
Index des notations	362
Index	364