
Kontinuumsmechanik fester Körper

Frank Ihlenburg

Kontinuumsmechanik fester Körper

Mit mathematischen Grundlagen und
Anwendungen in der Strukturmechanik

Prof. (i.R.) Dr.-Ing. habil. Frank Ihlenburg
Department Maschinenbau und Produktion
Institut für Mechanik und Mechatronik
Hochschule für angewandte Wissenschaften
Hamburg, Deutschland

ISBN 978-3-662-67789-6 ISBN 978-3-662-67790-2 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-67790-2>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer-Verlag GmbH, DE, ein Teil von Springer Nature 2023

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Michael Kottusch

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Dieses Buch ist eine erweiterte Fassung der Seminarunterlagen zu den Kursen MGM („Mathematische Grundlagen der Mechanik“) und MGN („Mechanische Grundlagen der nichtlinearen FEM“), die ich seit mehr als 10 Jahren im Masterstudium am Department Maschinenbau und Produktion der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg anbiete. Die Themen und Inhalte dieser Kurse haben mich seit dem Promotionsstudium der Festkörpermechanik an den Schiffbauinstituten der PolYTECHNIKA Szczecińska (Stettin) und der Universität Rostock fasziniert. Wohl eingedenk des bekannten Zitats von Saint-Exupéry¹ hatten mir meine Mentoren für das vertiefende Selbststudium zuvörderst die „Nonlinear Field Theories of Mechanics“ von Clifford Truesdell und Walter Noll empfohlen. Die Autoren dieses fundamentalen Buches schreiben in ihrem Vorwort: *„Materials, [...]: air, water, earth, flesh, wood, stone, steel, concrete, glass, rubber, [...]. All are deformable. A theory aiming to describe their mechanical behavior must take heed of their deformability and represent the definite principles it obeys.“* Mit diesem *purpose* ist der Gegenstand der Kontinuumsmechanik definitiv beschrieben. Es erscheint übrigens aus heutiger Sicht visionär, dass in der Aufzählung bereits ein Biomaterial erwähnt wird. Während also die fundamentalen Prinzipien der Kontinuumsmechanik gleichermaßen für Gase, Flüssigkeiten und Festkörper gelten, beschränkt sich dieses Buch in weiten Teilen auf festes isotropes Material, also *„steel, glass, and rubber“*.

Festkörper bestehen aus formerhaltendem Material. Bei der Beanspruchung durch äußere Lasten werden innere Kräfte aktiviert, die der Formänderung des Körpers entgegen wirken. In der analytischen Betrachtung werden diese Kräfte durch das Schnittprinzip freigelegt und sowohl untereinander als auch mit den äußeren Kräften ins Gleichgewicht gesetzt. Bei der mathematischen Beschreibung der Verformung einerseits und des Zusammenhangs zwischen Kraft und Verformung andererseits wird zwischen linearem und nichtlinearem Verhalten des Körpers bzw. seines Materials unterschieden.

¹ „Wenn Du ein Schiff bauen willst, dann [...] lehre die Männer die Sehnsucht nach dem weiten, endlosen Meer.“

Für die lineare Festigkeitsberechnung (Elastostatik) werden mit den folgenden Annahmen lineare mathematische Modelle erzeugt:

1. **Kinematik:** Die Verzerrungen hängen linear von den Verschiebungen ab.
2. **Material:** Die Spannungen hängen linear von den Verzerrungen ab.
3. **Kontakt:** Die Randbedingungen ändern sich durch die Verformung nicht.

In diesen Modellen gilt das Superpositionsprinzip, d. h. die Verformung skaliert mit der Last. Wird ein solches Verhalten im Werkstoffversuch nicht beobachtet, sind die linearen Annahmen nicht zutreffend. Je nachdem ob die Kinematik oder das Materialverhalten nichtlinear sind, spricht man von geometrischer oder physikalischer Nichtlinearität. Diese Nichtlinearitäten werden in der Kontinuumsmechanik untersucht und mathematisch formalisiert. Nichtlinearitäten durch Kontakt sind Gegenstand der Kontaktmechanik und werden hier nicht betrachtet.

Für die mathematische Beschreibung der kontinuumsmechanischen Zusammenhänge hat sich der Tensorkalkül bewährt. Wir führen die wichtigsten Begriffe und Regeln im ersten Kapitel ein, wobei wir neben Tensoralgebra und -analysis auch auf wesentliche Grundlagen zu Mengen und Funktionen sowie zur linearen Algebra eingehen. Nach der Rekapitulation mathematischer und physikalischer Grundlagen in den Kap. 1 und 2 folgen die Kap. 3 und 4 zur Kinematik und Kinetik der Verformung. Wir beschreiben die Bewegung von Körperpunkten bei der Formänderung sowie die dabei aktivierten inneren Kräfte und deren Gleichgewicht. In diesem Zusammenhang werden auch die Bilanzprinzipien der Mechanik referiert. Art und Größe der Verformung bei Krafteinwirkung hängen wesentlich vom Material der Körper ab. Das Kap. 5 führt in allgemeine Aspekte und thermodynamische Grundlagen des Materialverhaltens ein. Die kontinuumsmechanische Modellierung des elastischen und plastischen Verhaltens der Werkstoffe ist Gegenstand der Kap. 6 bis 8, wobei auch jeweils die Kombination mit viskosen Effekten erläutert wird. Dabei bereitet das Kap. 6 mit der linearen Elastizitätstheorie die Darlegungen der nichtlinearen Elastizität und Elastoplastizität in den Kap. 7 und 8 vor. Das abschließende Kap. 9 zur Strukturmechanik enthält analytische und numerische Berechnungen, in denen theoretische Zusammenhänge aus den Vorkapiteln an handlichen Beispielen verdeutlicht werden sollen.

Der vorliegende Text richtet sich an Studierende technischer Universitäten und Hochschulen ebenso wie an praktisch arbeitende Ingenieure, die ihre Kenntnisse einschlägig vertiefen wollen. In die Vermittlung der Themen sind sowohl meine Erfahrungen aus der Hochschullehre und -forschung als auch aus der mehrjährigen Industriepraxis als Berechnungsingenieur eingeflossen. Inhaltlich passende und gründlich verstandene Beispiele haben oft entscheidenden Einfluss auf den Lernerfolg. Dem jugendlichen Aspiranten der Festkörpermechanik waren in den 1980er Jahren die damals gerade erschienenen Lehr- und Arbeitsbücher zur höheren Festigkeitslehre von Autoren der Technischen Universitäten Dresden und Karl-Marx-Stadt (Chemnitz) eine wichtige

Hilfe. Ebenso ist dieses Buch zur Kontinuumsmechanik aus der Lehre entstanden und für das Studium und die berufliche Weiterbildung geschrieben. Der Fokus auf das Detail in den Beispielen und Aufgaben birgt wohl die Gefahr, den sprichwörtlichen „Wald“ hinter „lauter Bäumen“ zu verbergen. Die Literaturliste enthält Hinweise auf Monographien und Übersichtsartikel für fortgeschrittene Leserinnen und Leser. Wenn dieses einführende Buch das Verständnis solcher Arbeiten befördert, hat es einen wesentlichen Zweck erfüllt. In diesem Sinn teile ich gerne den Rat von Paul Halmos an die Leser eines seiner Bücher: „*Read it, absorb it, and forget it*“.²

Meine Lehrveranstaltungen zur Kontinuumsmechanik wurden als Seminare durchgeführt. Dafür waren ausgewählte Textabschnitte jeweils mit Kontrollfragen und Übungsaufgaben zum Selbststudium als Vorbereitung zur seminaristischen Diskussion in der Gruppe aufgegeben. Die strukturmekanischen Berechnungen des 9. Kapitels wurden von den Teilnehmern der Kurse in computergestützten Laborveranstaltungen ausgeführt und protokolliert. Ich danke den vielen aktiven Studierenden, die über die Jahre mit ihren Beiträgen und Lösungen die Weiterentwicklung der Lehrunterlagen befördert haben.

Herrn Professor Dr. Konrad Engel vom Institut für Mathematik der Universität Rostock danke ich ausdrücklich für das kritische Lesen der Grundlagenkapitel und seine eingehenden Hinweise, die wesentlich zur Stringenz und Exaktheit der Darstellung beigetragen haben. Herrn M. Sc. Moritz Ihlenburg danke ich sehr für seine Anmerkungen zu den Kap. 3–5. Vor allem aber bin ich meiner Ehefrau Krystyna-Maria herzlich verbunden für ihre Unterstützung beim Entstehen des Buches und für ihre Geduld in den langen Monaten der Fertigstellung.

Das Buch ist dem Andenken an meine ersten akademischen Lehrer, den Professoren Marian Kmiecik (Politechnika Szczecińska), Helmut Pfau (Technische Hochschule Wismar) und Christoph Reißmann (Universität Rostock) gewidmet.

Lübeck im April 2023

Frank Ihlenburg

² Paul Halmos, Naive Set Theory, Preface.

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Grundlagen	1
1.1	Mengen und Funktionen	1
1.2	Mehrdimensionale Funktionen	7
1.3	Lineare Algebra	14
1.4	Tensoralgebra	31
1.5	Tensoranalysis	54
1.6	Tensorfunktionen	59
1.7	Isotrope Tensorfunktionen	63
1.8	Aufgaben	69
2	Physikalische Grundlagen	77
2.1	Kontinuumsmechanik und Strukturmechanik	78
2.2	Beschreibung der Bewegung	79
2.3	Ableitung nach Ort und Zeit	83
2.4	Objektivität	89
2.5	Bilanzgleichungen und Erhaltungssätze	91
2.6	Aufgaben	95
3	Kinematik der Verformung	97
3.1	Deformationsgradient und polare Zerlegung	98
3.2	Dehnungstensoren	106
3.3	Konfigurationsbezug der kinematischen Tensoren	116
3.4	Zeitabhängige Verformung	120
3.5	Objektivität und objektive Zeitableitung	125
3.6	Aufgaben	127
4	Kinetik der Verformung	131
4.1	Der Cauchy-Spannungstensor	132
4.2	Die Piola-Kirchhoff-Tensoren	141
4.3	Konfigurationsbezug der Spannungstensoren	143
4.4	Mechanische Bilanzgleichungen	144

4.5	Schwache Formulierung des statischen Gleichgewichts	151
4.6	Aufgaben	156
5	Materialverhalten bei der Verformung	159
5.1	Form und Formänderung fester Körper	160
5.2	Konstitutivgleichungen	160
5.3	Kategorien des Werkstoffverhaltens.	162
5.4	Rheologische Körper	164
5.5	Hauptsätze der Thermodynamik	169
5.6	Induktive und deduktive Beschreibung des Materialverhaltens.	174
5.7	Aufgaben	175
6	Lineare Elastizität	177
6.1	Rheologische Körper	177
6.2	Klassische Materialgleichungen.	193
6.3	Isotropes Material.	194
6.4	Volumenänderung und Gestaltänderung	199
6.5	Energetische Betrachtung.	199
6.6	Effektivgrößen der Gestaltänderung	202
6.7	Viskoelastizität	206
6.8	Fazit (Lineare Elastizität).	208
6.9	Aufgaben	209
7	Nichtlineare Elastizität	213
7.1	Hypoelastizität und Cauchy-Elastizität	215
7.2	Hyperelastizität	218
7.3	Isotrope Hyperelastizität	221
7.4	Isotrope Energiefunktionen	225
7.5	Viskoelastizität großer Verformungen	235
7.6	Aufgaben	239
8	Plastizität	243
8.1	Beobachtungen im Werkstofftest	244
8.2	Rheologische Körper	250
8.3	Klassische Materialgleichungen.	271
8.4	Elastoplastizität großer Deformationen	295
8.5	Aufgaben	305
9	Anwendungen in der Strukturmechanik	309
9.1	Methode der finiten Elemente	309
9.2	Stäbe.	312
9.3	Balken	325

9.4	Scheiben	331
9.5	Platten	335
10	Lösung der Aufgaben	339
10.1	Lösungen zu den mathematischen Grundlagen	339
10.2	Lösungen zu den mechanischen Grundlagen	348
10.3	Lösungen zur Kinematik	350
10.4	Lösungen zur Kinetik	357
10.5	Lösungen zu Grundlagen der Materialtheorie	361
10.6	Lösungen zur linearen Elastizität	362
10.7	Lösungen zur nichtlinearen Elastizität	365
10.8	Lösungen zur Plastizität	370
	Literatur	381
	Stichwortverzeichnis	385

Symbolverzeichnis

Einige Formelzeichen sind in den folgenden Listen mehrfach in unterschiedlicher Bedeutung aufgeführt. So steht z. B. das Zeichen λ sowohl für Eigenwerte (Mathematik), Streckungen (Kinematik) als auch den elastischen Lamé Parameter (Konstitutivgleichungen); das Zeichen δ steht für die Dirac Funktion, aber auch für die virtuelle Variation. Wir meinen, dass ein bemühtes Abweichen von etablierten Bezeichnungen das Verständnis eher behindert als befördert und dass die konkrete Bedeutung der Formelzeichen immer aus dem jeweiligen Kontext erkennbar ist.

Mathematische Grundlagen:

A, B	Mengen
$\cup, \cap, \setminus$	Vereinigung, Schnitt, Differenz (von Mengen)
$x \in A$	x ist Element von A
$\forall x \in A, \exists x \in A$	„für alle“, „es existiert“ (Elemente von Mengen)
α, β	Skalare
a, b	Vektoren (Spaltenmatrizen) oder Skalare
A, B	Matrizen oder Skalare
A^T, A^{-1}	Transponierte, inverse Matrix
$\det A, \operatorname{tr} A$	Determinante, Spur (der Matrix A)
$\operatorname{cof}(a_{ij})$	Kofaktor der Komponente a_{ij}
$\mathbf{a}, \mathbf{b}$	Vektoren (Tensoren 1. Stufe)
$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	Tensoren (Tensoren 2. Stufe)
$[\mathbf{a}], [\mathbf{A}]$	(Matrix-)Darstellung von Tensoren
$[\mathbf{a}]_{\sim}, [\mathbf{A}]_{\sim}$	Darstellung im rotierten System
$\mathcal{C}, \mathcal{D}$	Tensoren 4. Stufe
$\times, \otimes$	Vektor-, Tensorprodukt
$\cdot, :$	Skalarprodukt, Doppelkontraktion
$\parallel, \perp$	koaxial, orthogonal (Vektoren)
$\operatorname{grad}, \operatorname{div}$	Gradient, Divergenz (von Tensoren)
∇	Nabla-Symbol
$\mathbf{GL}(n), \mathbf{SL}(n)$	Matrixgruppen (<i>general linear, special linear</i>)

$\mathbf{O}(n), \mathbf{SO}(n),$	Matrixgruppen (<i>orthogonal, special orthogonal</i>)
$\mathbb{U}, \mathbb{V}$	Lineare Räume (Vektorräume)
$\mathcal{L}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$	Raum der linearen Abbildungen $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$
$ \cdot , \langle \cdot \rangle$	Betrags-, Rampenfunktion
$H(\cdot), \operatorname{sgn}(\cdot)$	Sprung-, Signumfunktion
$\ \cdot\ $	Euklidische Norm (Vektoren)
δ, ϵ	Dirac-/ Kroneckersymbol, Permutationssymbol
λ	Eigenwert (Matrix, Tensor)
$\rho(A)$	Spektrum der Matrix A
$P_T(\lambda)$	charakteristisches Polynom (des Tensors T)
I_T, II_T, III_T	Invarianten (des Tensors T)
$\mathbf{e}$	Einheitsvektor
$\mathbf{I}, \mathcal{I}$	Einheitstensor 2., 4. Stufe
$\tilde{\mathcal{I}}, \mathcal{D}$	Transformations-, Deviatorischer Tensor (4. Stufe)
ϵ	Permutationstensor (3. Stufe)
$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$	Raum der komplexen, reellen, ganzen Zahlen
$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m \times n}$	Raum der reellen Vektoren, Matrizen
$\mathbb{E}$	Euklidischer Raum (Punktraum)

Physikalische Grundlagen:

$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}$	Ortsvektor (Lagrange, Euler)
X_j, x_j	Komponenten des Ortsvektors (Lagrange, Euler)
Grad, Div	Gradient, Divergenz (Lagrange)
grad, div	Gradient, Divergenz (Euler)
$\frac{\partial}{\partial t}, \frac{D}{Dt}$	partielle, totale Zeitableitung
$\mathbf{x}^*$	Euklidische Transformation (des Vektors)
$W, \mathcal{P}$	mechanische Arbeit, Leistung
$\mathcal{U}, \mathcal{K}$	potentielle, kinetische Energie

Kinematik der Verformung:

γ, λ	Winkelverzerrung, Streckung
$\mathbf{u}, \mathbf{v}$	Verschiebungs-, Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{F}, \mathbf{R}$	Deformations-, Rotationstensor
$\mathbf{U}, \mathbf{V}$	rechter, linker Strecktensor
$\mathbf{C}, \mathbf{B}$	rechter, linker Cauchy-Green-Tensor
$\mathbf{G}, \mathbf{A}$	Green-Lagrange, Green-Almansi-Dehnungstensor
$\mathbf{H}$	Hencky-(logarithmischer) Dehnungstensor
$\epsilon, \hat{\epsilon}$	technischer Verzerrungstensor (Lagrange, Euler)
pf, pb	Vorschieben (<i>push forward</i>), Zurückziehen (<i>pull back</i>)
J	Volumenverhältnis (verformt/unverformt)

L	Geschwindigkeitsgradient (Euler)
D, W	Deformationsrate, Spintensor
$\mathcal{L}(\mathbf{K})$	Lie-Ableitung (des Tensors K)

Kinetik der Verformung:

σ, τ	Cauchy-, Kirchhoff-Spannungstensor (Euler)
P, S	1., 2. Piola-Kirchhoff-Tensor (Lagrange)
T	Biot-Spannungstensor
t	spezifische Flächenkraft (Spannungsvektor)
b	spezifische Volumenkraft
v, v_0	Volumen/Teilvolumen (verformt, unverformt)
∂v	Oberfläche (eines Volumens)
Γ_u, Γ_t	gelagerter, belasteter Teil der Oberfläche
ρ, ρ_0	Dichte (verformt, unverformt)
m	Masse (eines Volumens)
p, l	Impuls, Drehimpuls (eines Volumens)
$\delta \mathbf{u}, \delta W$	virtuelle Verschiebung, virtuelle Arbeit

Konstitutivmodelle:

σ, ε	Spannung, Dehnung (Rheologie)
$\sigma^d, \mathbf{s}$	Deviator (des Spannungstensors), Deviatorvektor
$\varepsilon^d, \mathbf{e}$	Deviator (des Verzerrungstensors), Deviatorvektor
μ, σ_F	Haft-/Reibkoeffizient, Fließspannung
$\alpha, \boldsymbol{\alpha}$	Rückspannung (Rheologie), Rückspannungstensor
η	dynamische Viskosität
$\dot{\gamma}$	plastischer Multiplikator
$\mathcal{D}$	Dissipation (Clausius-Planck-Ungleichung)
$f(\sigma, \dots)$	Fließfunktion
ψ, ϕ	freie Energie, Dissipationspotential
G	Schubmodul
λ, μ	Lamé-Parameter (Elastizität)
κ, ν	Kompressionsmodul, Querkontraktionszahl