tredition®

www.tredition.de

tredition®
www.tredition.de

Umschlaggestaltung: Hans-Albrecht Zahn
Lektorat: Anne Zahn

Verlag und Druck: tredition GmbH, Halenreie 40-44,
22359 Hamburg

ISBN
Paperback: 978-3-7469-4516-3
Hardcover: 978-3-7469-4517-0
e-Book: 978-3-7469-4518-7

RECHNEN
IN
BEWEGUNG

RECHENFÄHIGKEITEN ENTWICKELN –
RECHENPROBLEME (Dyskalkulie, Arithmaphobie) ÜBERWINDEN

mit über 350 Übungen

INHALT

Einstieg:

Denken und Rechnen ist eine grundlegende menschliche Fähigkeit, welche wir in allen Lebensbereichen brauchen. Beim Rechnen schulen wir unser Bewusstsein.

In allen Kulturen werden Denken, Logik und Verstand geschult. Es entstanden die verschiedensten **Denkübungen, Rätselspiele und mathematische Aufgaben**. Das **Schachspiel** oder Strategiespiele haben schon römische Soldaten gepflegt. Auch heute wird in Kreuzworträtseln, Silbenrätseln, Denksportaufgaben, Suchbildern oder Kombinationsrätseln Logik und Denken trainiert.

Ein Urbild rationalen Denkens ist das **Zählen und Rechnen**. **Die Zahlwahrnehmung** ist ein innerer Prozess, bei dem keine äußere Sinneswahrnehmung notwendig ist. Die Zahl „Drei" ist nirgends in der Außenwelt zu finden. „Drei" wird nicht dadurch erkannt, dass man drei Vögel, drei Schiffe, drei Flugzeuge oder drei andere Gegenstände sieht. Die Zahl „Drei" ist nicht in der Eigenschaft dieser Gegenstände verborgen. Sie wird auch nicht durch eine äußere visuelle oder auditive Wahrnehmung, sondern durch die **innere Wahrnehmung der eigenen Bewegungstätigkeit** erkannt. Der Mensch muss erkennen, dass er dreimal geschaut hat. Die eigene innere Bewegung gilt es zu erfassen.

Der Bewegungssinn ist die Basis des Zahlverständnisses und Rechnens. Wer rechnen lernen will, muss sich **selbst bewegen** und seine **eigenen Bewegungen bewusst** wahrnehmen. Das wird auch in der Geometrie deutlich. Ein **Kreis oder ein Dreieck** ist in erster Linie ein **innerer Bewegungsakt.** Die äußere visuelle Wahrnehmung ist nur Ausdruck der inneren Bewegungsform. Der äußerlich gezeichnete Kreis ist unter dem Elektronenmikroskop eine Buckelpiste mit vielen Ecken und Kanten. Den perfekten Kreis gibt es nur als inneres Ideal.

Auch die Rechenarten selbst (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) sind eine Form der „inneren Bewegung“. Der Rechnende ordnet und gliedert Mengen. Beim Rechnen handelt es sich um einen inneren Bewegungsprozess, der aber auch äußerlich konkret vollzogen werden muss.

Probleme beim Erlernen des Rechnens gibt es meistens dann, wenn die konkrete Bewegungsbasis zu schnell verlassen wird. Das kleine Kind nimmt seine Finger zum Zählen und Rechnen. Es macht sich die Zahlen in seinen eigenen Bewegungen bewusst. Viele Lehrer unterbinden dieses Fingerrechnen schnell, weil sie glauben, dass das abstrakte, intellektuelle Rechnen das eigentliche Ziel des Rechnens sei.

Wer Rechnen lernen oder Rechenprobleme lösen will, muss praktisch tätig werden. Es gilt mit Material zu rechnen, Zeichnungen und Bilder zu gestalten und rechnerische Anordnungen und Gliederungen zu vollziehen.

Nicht umsonst heißt der Untertitel dieser Arbeit „Rechnen in Bewegung“. In über 350 praktischen Übungsaufgaben, welche in dieser Arbeit aufgeführt werden, kann ein Bewusstsein der Zahlen- und Rechenprozesse erworben werden.

Inhaltlich wird der mathematischen Stoff der Grund und Mittelstufe gehandelt. Es ist der Unterrichtsstoff, welcher in den Klassenstufen 1-8 erarbeitet wird. Es geht also um das Rechnen mit natürlichen Zahlen, Brüchen, Minus-, Potenz- und Wurzelzahlen sowie den algebraischen Zahlen.

In diesem Sinn hoffe ich, dass jeder, der das Rechnen lernen will, Freude in der Welt der Zahlen entwickeln kann. Ich wünsche auch denen, deren Rechenprozesse „blockiert“ sind, dass sie wieder in Bewegung kommen. Kinder und Erwachsene, die sich für schwach und unbegabt im Rechnen halten, können wieder **Neugier und Spaß am Rechnen** gewinnen, wenn sie erst einmal merken, welch **wunderbare Geheimnisse in der Zahlenwelt verborgen** sind.

I.KAPITEL

GRUNDLAGEN

Logisches Denken
Zahlenverständnis
Zahlwahrnehmung
Rechenprobleme

I GRUNDLAGEN

1.1 LOGISCHES DENKEN UND RECHNEN

Wir bilden unser Bewusstsein, indem wir **Zusammenhänge** erfassen. Durch das Denken schaffen wir eine innere Ordnung und können uns auf der Welt orientieren. Mit dem Begriff „**Intelligenz“** wird die Fähigkeit des logischen Denkens zum Ausdruck gebracht. In Intelligenztests wird diese Eigenschaft „getestet.“ Dabei handelt es sich um **Aufgaben**, in denen bestimmte **logische Zusammenhänge** erkannt werden sollen. **Logische Aufgaben und Rätsel** wurden schon immer benutzt, um das Denken zu schulen. Bereits in der Antike gab es viele solcher Rätsel.

Beispiel „Rätsel vom Menschen“:
Was läuft morgens auf vier Beinen, mittags auf zwei Beinen und abends auf drei Beinen?
Lösung: der Mensch; er krabbelt als Kind auf „vier Beinen“, als Erwachsener geht er auf zwei Beinen, als alter Mensch braucht er noch einen Stock und geht auf drei Beinen.

Die ältesten Rätsel stammen ca. 2500 vor Christus. Die Ägypter formulierten bereits folgendes mathematische Rätsel.

Beispiel: Katzen-und Mäuse Rätsel.
Es gibt sieben Häuser, in jedem Haus wohnen sieben Katzen. Jede Katze fängt sieben Mäuse, von denen jede sieben Kornähren gefressen hat. In jeder Ähre sind sieben Samen. Nun soll die Anzahl der involvierten Objekte herausgefunden werden.
Lösung:

$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 19607$

Wie in der Einleitung erwähnt, geschieht die Entwicklung des logischen Denkens zunächst hauptsächlich über das **Tun.** Jede Alltagstätigkeit, sei es den Tisch decken, das Geschirr abtrocknen oder Feuer machen, basiert auf einer logischen Abfolge von Einzelschritten. Logische Zusammenhänge lassen sich auch rein in der Vorstellung trainieren. Welches kleine Kind spielt nicht gerne Memory oder versucht Rätsel zu lösen?

Auch für die Erwachsenen sind Rätsel eine gute Möglichkeit, Denken und Verstand **zu schulen**. Da gilt es Einzelheiten zu analysieren und wieder in einen neuen Zusammenhang zu stellen. Einige weitere Beispiele sollen hier genannt werden.

Beispiel: Wolf, Ziege und Kohlkopf
Ein Mann möchte zusammen mit einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf einen Fluss überqueren, doch das Boot kann außer ihm nur einen weiteren Passagier fassen. Er kann weder den Wolf mit der Ziege noch die Ziege mit dem Kohl unbeaufsichtigt am Ufer zurück lassen. Aufgabe ist es, einen Plan zu entwickeln, der diese Bedingungen einhält und mit möglichst wenigen Überfahrten auskommt.
Zur Lösung sollte der Mann zunächst mit der Ziege den Fluss überqueren, sie am anderen Ufer lassen und alleine zurückkehren. Anschließend fährt er den Wolf zur anderen Seite, lässt diesen dort und kehrt mit der Ziege zurück. Diese lässt er zurück und setzt mit dem Kohlkopf über und kehrt allein zurück. Schließlich bringt er die Ziege ein zweites Mal ans Zielufer, womit das Problem gelöst ist. Eine alternative Lö-

sung ergibt sich, wenn Wolf und Kohl in der obigen Reihenfolge ausgetauscht werden.

Solche Aufgaben regen das logische Denken an und fordern unseren Verstand heraus. Damit lassen sich auch die Grundfähigkeiten üben, welche wir zum Rechnen brauchen. Oft geht es auch darum, **Denkfehler aufzudecken**. Dazu ist folgende Aufgabe geeignet:

Beispiel: Flasche Wein
Drei Männer haben in einem Wirtshaus eine Flasche Wein getrunken. Die Bedienung bringt eine Rechnung über 30 €. Jeder Gast zahlt einen Zehner. Der Wirt sagt zur Bedienung, die Flasche habe nur 25 € gekostet und sie möge den Gästen die restlichen 5 € zurückgeben. Da diese aber zu faul zum Rechnen ist, steckt sie 2 € als Trinkgeld ein, und gibt jedem 1 € zurück.
Nachdem jeder Gast 10 € gezahlt und dann einen1 € zurückbekommen hat, zahlt also jeder effektiv nur 9 €. Das macht 3 mal 9 ist 27 plus zwei Euro für die Bedienung als Trinkgeld; das sind zusammen 29 €. Es fehlt also 1€. Wo ist er geblieben?

Für das Zahlenverständnis und das Rechnen braucht jeder Mensch logisches Denken. Es gilt Einzelheiten zu differenzieren und zu analysieren. Danach müssen die Ergebnisse wieder in einen neuen Zusammenhang gebracht werden.

Nicht umsonst wird die Mathematik in **allen Lebensbereichen** gebraucht. Mathematische Formeln und Algorithmen gibt es in allen Fachgebieten. In der **Naturwissenschaft** ist das den meisten Menschen klar. Jeder hat in der

Physik solche mathematischen Zusammenhänge gelernt. Wenn wir beim Autofahren die Geschwindigkeit auf dem Tacho ablesen, bedienen wir uns solcher Formeln. Wir setzen die zurückgelegte Strecke in Beziehung zur Zeit und sagen dann, wir fahren 100 km pro Stunde, also Geschwindigkeit = Strecke /Zeit oder V = S/t. Aber auch in der **Psychologie, Soziologie, Politik und Wirtschaft** werden Zusammenhänge über Zahlen und Funktionen dargestellt.

1.2 ZAHLENVERSTÄNDNIS

1.21 Die Zahlen als Quantitäten - Ordnungsfolge

Mit Hilfe der **Zahlen** wird in der Welt eine **quantitative Ordnung** hergestellt. Jedes Element **(jede Zahl)** hat in der Zahlenfolge einen **genauen Standort**. Es gibt einen **Anfang**, der mit der Zahl „Eins“ beginnt und dann geordnet fortgeführt wird. Auch wird meist ein **vorläufiges Ende** gesetzt, indem z.B. eine Zahlenreihe bei 10, 100 oder bei 1000 endet. Jede Zahl hat in diesem System ihren genau festgelegten Platz.

Die Zahlenfolge ist dadurch bestimmt, dass mit der Zahl „Eins“ begonnen wird und ein Nachfolger für sie bestimmt wird, nämlich die Zahl „Zwei. Die Zahl „Zwei“ hat wiederum einen **Nachfolger**, nämlich die Zahl „Drei“. Der **italienische Mathematiker Peano** hat Axiome in dieser Weise formuliert, in der die Welt der natürlichen Zahlen logisch festgelegt wird.

Beim **Zählen** wird diese Ordnungsfolge in Worte gefasst. Mit dem **Niederschreiben** der entsprechenden **Ziffern** erhält die Zahlenfolge eine **äußere Form**.

Beim Zählen genügt es nicht, nur die **sprachliche Zahlenfolge** zu sprechen. Es muss auch eine **Zuordnung zu den Gegenständen** getroffen werden, wenn die **Anzahl** einer Menge bestimmt werden soll. Wenn sich jemand verzählt, dann ordnet er Gegenstände und Zahlworte nicht richtig zu. Er verzählt sich. **Äußeres Sprechen und inneres Zuordnen der Gegenstände** müssen **synchron** ablaufen.
Anfangs lassen sich die Kinder oft vom **Strom der Zahlenfolge mitreißen**. Sie plappern die Zahlenfolge vor sich hin. Das Zählen muss aber noch bewusster und kontrollierter geschehen. Dazu ist es hilfreich auch **rückwärts zu zählen.** Die Kinder brauchen eine Orientierung in der Zahlenfolge. Es gilt sich den Anfangs- und Endpunkt einer Zahlenreihe, die Mitte, Nachbarzahlen usw. klar zu machen.

Eine weitere **Strukturierung der Zahlenwelt** kommt durch das **Einmaleins** zustande. Beim Zweiereinmaleins wird immer eine Zahl ausgelassen (… 2...4...6 usw.). Bei der Dreierreihe werden immer zwei Zahlen übersprungen (…3…6…9 usw.). Die Einmaleins Reihen sind eine besondere Art des Zählens. In der Zehnerreihe wiederholt sich das Zählen auf einer nächsten Ebene. Es erschließt sich dem Lernenden das Dezimalsystem, das einem den Überblick über die schier endlose Menge von Zahlen verschafft.

Auf diese Weise können auch **Gesetzmäßigkeiten der Zahlenwelt** erkannt werden. Es gibt Zahlen, die eine Fülle von Einmaleins Reihen in sich bergen. In der Zahl 60 ist die Einer- Zweier- Dreier- Vierer- Fünfer- Sechser- und Zehnerreihe enthalten ist, während die Zahl 59 bis auf die Zahl 1 in keiner Reihe enthalten ist (Primzahlen).
Die **Zahlenfolge** wird am besten gelernt, indem sie „**verleiblicht“** wird. Auf natürliche Weise geschieht dies, indem mit den Fingern gezählt wird oder auf die abzuzählenden Gegenstände ge-

deutet wird (Abzählen). Das **körperliche Bewegen und Sprechen** ist wichtig und kann verstärkt werden, indem beim Zählen gelaufen, gesprungen, gehüpft oder geworfen wird. Indem die Zahlenreihen und das Einmaleins „auswendig“ gelernt werden, verbindet sich der Lernende „leibhaftig“ mit der Zahlenstruktur.

1.22 Die Zahlen als Qualitäten

Die Zahlen sind einerseits sinnlichkeitsfrei, d.h. die sie werden nicht durch die Gegenstände, die gezählt werden, definiert, andererseits sind die Zahlen in gewisser Weise in **der sinnlichen Welt** verborgen. Es gibt Dinge in der Welt, die gibt es **nur einmal**. Das verdeutlicht sich auch in der Sprache. Das **Wort „Eins“** ist mit dem Wort **„einzig“, „einmalig“, „einzigartig“, „einig“** usw. verwandt. Mit der Zahl „Eins“ ist das „Individuelle“ und „Einzigartige“ als Qualität verbunden. Das Wort **„zwei“** ist mit Begriffen wie **Zwist,** Zweifel usw. verwandt. Da taucht eine Qualität der **Spannung** und **Polarität** auf.

Insofern haben Zahlen nicht nur einen quantitativen sondern auch qualitativen Charakter. Die Qualität der Zahlen wird durch eine **meditative Betrachtung** erfasst.

Diese Art der Zahlenbetrachtung wurde in früheren Kulturen und auch im Mittelalter intensiv gepflegt. Es handelte sich um die geistigen Grundlagen der Zahlen.

Ernst Bindel hat diesen Aspekt in einem Buch beschrieben.[1] Es trägt den Untertitel „Die Zahl im Spiegel der Kulturen – Elemente einer spirituellen Geometrie und

[1] Ernst Bindel Die geistigen Grundlagen der Zahlen, Verlag Freies Geistesleben, Neue Auflage August 2003

Arithmetik“. Diese Art der Zahlenbetrachtung regt den Geist des Menschen auf eine ganz andere Weise an. Es taucht eine Stimmung des fragenden Staunens auf, das für alles initiative und eigenständige Lernen Voraussetzung ist.
Jeder kann sich durch meditative, empfindende Betrachtungen, Geschichten, Ausdrucksbewegungen, imaginative Bildern usw. diesen Aspekt der Zahlen erarbeiten.

1.23 Die Zahlen als geordnete Mengen

Schließlich sind Zahlen auch Mengen. Sie sind ganzheitliche Gliederungsstrukturen, die es zu erfassen gilt. Das wird in den **Grundrechenarten (**Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren) deutlich. Verschiedene Mengen lassen sich in sehr unterschiedlicher Art zusammenfassen oder auseinander gliedern. In der Waldorfpädagogik spricht man von **Haufenrechnungen**.

Beispielsweise können 12 Elemente in verschiedene Haufen geteilt werden. Da sind zwei Haufen von 6 + 6, oder von 7 + 5 oder 8 + 4 usw. möglich.
Systematisch ergeben sich für die additive Gliederung der Zahl 12 folgende Möglichkeiten.

12 = 1 + 11
12 = 2 + 10
12 = 3 + 9
12 = 4 + 8
12 = 5 + 7
12 = 6 + 6
12 = 7 + 5
12 = 8 + 4
12 = 9 + 3
12 = 10 + 2
12 = 11 + 1

Das ist ein ganzheitliches Vorgehen, in dem der Überblick über das Ganze im Vordergrund steht. Natürlich lässt sich auch „nicht ganzheitlich“ vorgehen. Dann werden isoliert irgendwelche Additionsaufgaben erfunden, z.B.:

2+3 = 5
4+5 = 9
2 + 10 = 12
3+11 = 14
usw.

Eine strukturelle Erkenntnis über mathematische Zusammenhänge wird dadurch nicht erworben. Das gilt für alle Rechenarten. Auch beim Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren kann „ganzheitlich“ oder „einzelheitlich“ vorgegangen werden.

1.3 ZAHLEN, RECHNEN UND BEWEGUNG

R. Steiner weist darauf hin, dass der Zahlbegriff auf den inneren Leibessinnen, besonders dem sog. **Eigenbewegungssinn**, beruht. Deshalb gilt es sich zu bewegen und seine eigenen Bewegungen wahrzunehmen.

Wenn zu schnell mit festen Rechenformeln und Algorithmen gearbeitet wird, besteht die Gefahr, dass das lebendige Rechnen darunter leidet. Die motorische, bildhafte und zeichnerische Bewegung sind Basis des Rechenverständnisses.

1.31 Motorische Bewegung

Bewegung ist auch die Voraussetzung der Bewusstseins- und Sprachentwicklung. Diese setzt erst richtig ein, wenn die motorische Entwicklung bis zu einem gewissen Grad entwickelt ist. Erst wenn das kleine Kind greifen,