Ott
Lengersdorf

Abitur 2024 | *Leistungskurs*

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik am Berufskolleg – Berufliches Gymnasium
– Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung –

Nordrhein-Westfalen

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Oberstudienrat

Norbert Lengersdorf

Oberstudienrat am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

* * * * *

16. Auflage 2023

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0447-16
ISBN 978-3-8120-1048-1

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält nur auf die neue Prüfungsordnung für das Berufskolleg in Nordrhein-Westfalen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2024 im Fach Mathematik an beruflichen Gymnasien im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung.

Die Aufgaben behandeln nur Themen, die in den Abiturvorgaben 2024 für den Leistungskurs Mathematik, Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung, aufgeführt sind.

Die zentrale Abiturprüfung 2024 besteht aus zwei Teilen, einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil A und einem Prüfungsteil B mit Hilfsmittel (GTR bzw. CAS)

Die Aufgaben für den Leistungskurs sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten: Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra.

Durch die Vorgaben für die schriftliche Abiturprüfung 2024 werden inhaltliche Schwerpunkte festgelegt.

Die **Analysis** behandelt im Abitur 2024 als Schwerpunkt ganzrationale Funktionen und Exponentialfunktionen und die Modellierung von berufsbezogenen Anwendungen mithilfe dieser Funktionstypen: Marktpreistheorie, Konsumenten- und Produzentenrente, Modelle der vollständigen Konkurrenz und des Monopols, Absatz- und Umsatzentwicklung.

Die **Lineare Algebra** hat die Schwerpunkte Lineare Gleichungssysteme und stochastische Matrizen. Das Leontief-Modell, Innerbetriebliche Verflechtungen, mehrstufige Produktionsprozesse und logistische Zusammenhänge werden als Anwendungen behandelt.

Schwerpunkt in der **Stochastik** ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, die Binomialverteilung und ökonomische Anwendungen wie die Preiskalkulation.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben. An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung 2024

Leistungskurs

Die schriftliche Abiturprüfung umfasst den Aufgabenteil A (Bearbeitung ohne Hilfsmittel) und den Aufgabenteil B (Bearbeitung mit Hilfsmitteln).
Der Aufgabenteil A besteht aus **vier Pflichtaufgaben** und **vier Wahlaufgaben**, aus denen zwei von den Prüflingen ausgewählt werden.
Der Aufgabenteil B besteht aus drei Pflichtaufgaben.
Bei mindestens zwei der Aufgaben des Aufgabenteils A und B sind Anwendungsbezüge aus Wirtschaft und Verwaltung vorgesehen.

neu im Abi'24

Aufgabenteil A Bearbeitung ohne Hilfsmittel				**Aufgabenteil B Bearbeitung mit Hilfsmittel**	
Pflichtaufgaben		Wahlaufgaben (zwei aus vier, beliebig)		Pflichtaufgaben	
Analysis	5	Analysis	5	Analysis	30
Analysis	5	Analysis	5	Stochastik	30
Stochastik	5	Stochastik	5	Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	30
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5	Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5		
Summe	20	Summe	10	Summe	90
Gesamtsumme: 120 BE + 5 BE (Darstellungsleistung) = **125 BE**					

Organisation

Zu Beginn der Bearbeitungszeit erhalten die Prüflinge die beiden zu bearbeitenden Aufgabenteile A und B. Die zugelassenen Hilfsmittel (GTR oder CAS; Formelsammlung) werden noch nicht ausgegeben.
Die Prüflinge geben individuell nach Bearbeitung ihre Ausarbeitungen zum Aufgabenteil A ab und erhalten im Gegenzug Zugang zu den zugelassenen Hilfsmitteln (GTR oder CAS; Formelsammlung).
Die Arbeitszeit einschließlich Auswahlzeit beträgt 300 Minuten
Für Prüflinge, die die Aufgaben und die Lösungen des Prüfungsteils A vorzeitig abgeben, verlängert sich entsprechend die Bearbeitungszeit für den Prüfungsteil B.
Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Prüfungsteilen der Klausur zugelassen.

Operatoren und Dokumentation von Lösungen

1 Allgemeine Bemerkungen zu den Aufgabenstellungen

Der Prüfling wird nicht zur Nutzung einer bestimmten Technologie aufgefordert, da das Erkennen der Sinnhaftigkeit des Einsatzes des Taschenrechners eine selbstständige Leistung ist. Die Vorgehensweise und Darstellung der Lösung muss unabhängig von der gewählten Technik nachvollziehbar dokumentiert werden.
Der Schüler hat zu verdeutlichen, wie er mit welchen Eingaben mit der genutzten Technik zu welchen Ergebnissen gelangt ist. Die Dokumentation erfolgt immer mit mathematischen Regeln unter Nutzung der Fachsprache.

2 Beispiele zu einigen der häufig genutzten Operatoren

2.1

Operator	Beschreibung
Angeben, Nennen	Objekte, Sachverhalte, Begriffe, Daten ohne nähere Erläuterungen bzw. Begründungen und ohne Darstellung von Lösungsansätzen oder Lösungswegen aufzählen

Erläuterungen: Der Prozess der Ergebnisermittlung bleibt gegebenenfalls im Dunkeln-somit auch die Wahl des Hilfsmittels. „Angeben /Nennen“ erfordert Einsicht in den Sachzusammenhang oder den mathematischen Zusammenhang.

Beispiel: ...und geben Sie eine mögliche Kostenfunktion an.

(Abitur 2017 LK CAS, Analysis 2.1.3)

Erwartungshorizont:

Kostenfunktion z.B. mit c = 12: $K(x) = \frac{1}{400}x^3 - \frac{1}{15}x^2 + 12x + 200$

2.2

Operator	Beschreibung
Erläutern	Strukturen und Zusammenhänge erfassen, in Einzelheiten verdeutlichen und durch zusätzliche Informationen verständlich machen

Erläuterungen: Beispielsweise kann zur Problemlösung ein Sachzusammenhang durch zusätzlich hergeleitete Informationen mit eigenen Worten dargelegt werden oder aber auch ein Vorgehen verständlich beschrieben werden.

Beispiel:

Erläutern Sie anhand der kurzfristigen und der langfristigen Preisuntergrenze, ob die Rasolux GmbH einen Preis von 700GE/ME unterbieten kann.

(Abitur 2017 GK Analysis 2.2.1)

Erwartungshorizont:

kPUG: Minimierung der variablen Stückkosten $k_v(x) = 10x^2 - 240x + 1920$

Notwendige und hinreichende Bedingung bei quadratischen Funktionen mit positivem Leitkoeffizient: $k'_v(x) = 0$ $20x - 240 = 0 \Leftrightarrow x = 12$ kPUG: $k_v(12) = 480$ (GE/ME)

LPUG: Minimierung der Stückkosten $k(x) = 10x^2 - 240x + 1920 + \frac{7840}{x}$

Darstellung des Graphen im Intervall von 0 bis 20 liefert den Tiefpunkt $(14 \mid 1080)$

LPUG 1080 GE/ME. Ein Preis von 700GE/ME kann kurzfristig, aber nicht langfristig unterschritten werden.

2.3

Operator	Beschreibung
Berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen

Erläuterungen: Der Ansatz, der auf der symbolischen Ebenen zur Lösung führt, ist zu dokumentieren. Der sich anschließende Lösungsweg muss unter Beibehaltung mathematischer Regeln nachvollziehbar dargestellt werden. Wenn ein GTR/CAS für einen Lösungsschritt verwendet wird, ist der Ansatz und der logische Schritt zu dokumentieren.

Beispiel: Berechnen Sie den maximalen Gewinn (Abitur 2017 LK GTR, Analysis 2.2.1.2)

Erwartungshorizont

Gewinnmaximum: $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$

Ableitungen: $G'(x) = -3x^2 + 12x - 1{,}25$; $G''(x) = -6x + 12$

Notwendige Bedingung: $G'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 3{,}89 \vee x_2 = 0{,}11$

Mit $G''(3{,}89) < 0$ und $G(3{,}89) = 23{,}32$ gilt:

Bei einer Produktion von 3,89 ME wird der maximale Gewinn von 23,32 GE erzielt.

2.4

Operator	Beschreibung
Bestimmen, Ermitteln	Zusammenhänge bzw. Lösungswege finden und die Ergebnisse formulieren.

Erläuterungen: Die Wahl der Mittel (z.B. ob graphisch oder numerisch) bleibt offen. Durch Spezifizierung wie „Ermitteln Sie graphisch" oder „Bestimmen Sie rechnerisch" würde die Verwendung der Werkzeugebene des GTR bzw. CAS beschränkt.
Beim graphischen ermitteln von Lösungen kann dies durch Anfertigung einer Zeichnung auf Papier oder durch Darlegung der Lösungsschritte beim graphischen Lösen mit GTR bzw. CAS erfolgen.

Beispiel: Gehen Sie davon aus, dass gilt: $a = \frac{1}{225}c - \frac{23}{450}$ und $b = -30a$
Ermitteln Sie den Bereich, in dem der Parameter c liegen muss, damit K eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion ist … . (Abitur 2017 LK CAS, Analysis 2.1.3)

Erwartungshorizont

Mit $b^2 \leq 3 \cdot a \cdot c$ ist folgende Ungleichung zu lösen: $(\frac{23}{15} - \frac{2}{15}c)^2 \leq 3(\frac{1}{225}c - \frac{23}{450}) \cdot c$

Lösung mit CAS: $11{,}5 \leq c \leq 46$

(Die Erläuterungen zu den Operatoren sind der Rückkopplungsveranstaltung zum Zentralabitur 2017 entnommen, Qualitäts-und Unterstützungs-Agentur-Landesinstitut für Schule NRW)

Operatorenliste

Operator	Erläuterung
erläutern	Strukturen und Zusammenhänge erfassen, in Einzelheiten verdeutlichen und durch zusätzliche Informationen verständlich machen
skizzieren, graphisch darstellen	wesentliche Eigenschaften von Sachverhaltenoder Objekten graphisch darstel-len – auch Freihandskizzen möglich
untersuchen	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien bearbeiten
vergleichen	Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln
begründen	Sachverhalte auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen – hierbei sind Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen
bestimmen,ermitteln	Zusammenhänge bzw. Lösungswege finden und die Ergebnisse formulieren
beurteilen, Stellung nehmen	zu einem Sachverhalt ein eigenständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren und begründen
herleiten, formulieren	eine Formel oder einen Zusammenhang aus bekannten Sachverhalten nachvollziehbar entwickeln
klassifizieren	eine Menge von Objekten nach vorgegebenen oder sinnvoll selbstständig zu wählenden Kriterien in Klassen einteilen
zeigen	Aussagen oder Sachverhalte unter Nutzung von gültigen Schlussregeln, Berechnungen bestätigen
beschreiben	Strukturen, Sachverhalte, Verfahren unter Verwendung der Fachsprache angemessen wiedergeben
bestätigen	Aussagen oder Sachverhalte mathematisch verifizieren
dokumentieren, darstellen	Gedankengang bzw. Herleitung der Problemlösung darlegen
veranschaulichen, verdeutlichen	einen Sachverhalt mit verbalen oder graphischen Erläuterungen versehen
angeben, nennen	Objekte, Sachverhalte, Begriffe, Daten ohne nähere Erläuterungen, Begrün dungen und ohne Darstellung von Lösungsansätzen oder Lösungswegen aufzählen
berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen
zeichnen	hinreichend exakte graphische Darstellungen von Objekten oder Daten anfertigen
beweisen, widerlegen, nachweisen	Beweise im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen und Analogien, führen
vereinfachen, umformen	Terme, Aussagen, Formeln mittels geeigneter Strategien an den jeweiligen Sachverhalt anpassen

I Hilfsmittelfreier Teil der zentralen Abiturprüfung

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung – Analysis

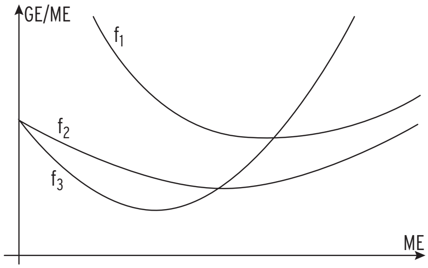
Dieser Teil der Abiturprüfung enthält 4 Aufgaben entsprechend den Abiturvorgaben, davon mindestens zwei mit Anwendungsbezug.

Analysis **Lösungen Seite 22**

Punkte

Aufgabe 1

Zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, c, d > 0$, $b < 0$, x in ME, $K(x)$ in GE, sind in der nebenstehenden Abbildung die Graphen der Grenzkostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion dargestellt.

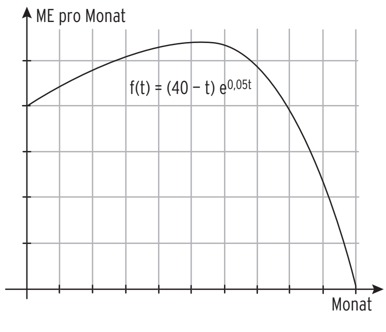


1.1 Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen die entsprechende ökonomische Funktion begründet zu. 3

1.2 Beweisen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge bei $x = -\frac{b}{2a}$ liegt. 3

Aufgabe 2

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit $f(t) = (40 - t)e^{0,05t}$, (t in Monaten, $f(t)$ in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann. 2

2.2 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei $t = 20$ liegt. 4

($f''(t) = -\frac{1}{400}\, t\, e^{0,05t}$ kann verwendet werden.)

Analysis

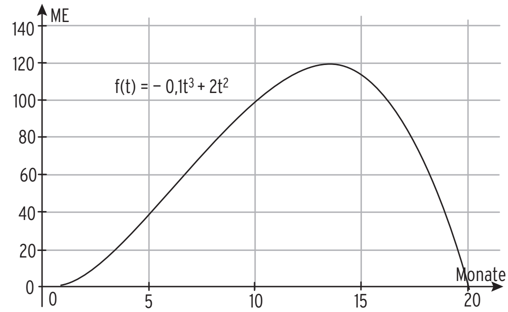
Aufgabe 3 **Lösungen Seite 23** **Punkt**

Die monatlichen Absatzzahlen eines neuartigen Produkts werden mit

$f(t) = -\frac{1}{10}t^3 + 2t^2$

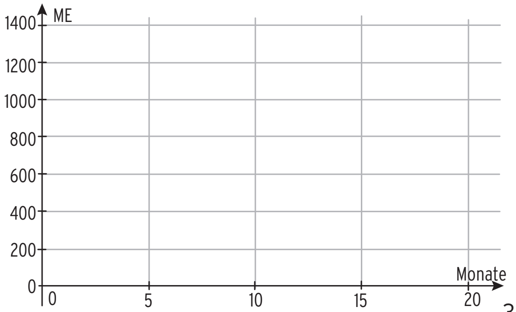
(t in Monaten, f(t) in ME/Monat)

modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



3.1 Bestimmen Sie die in den ersten 20 Monaten insgesamt abgesetzte Menge. 3 Punkte

3.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem den Graphen der Funktion, die den Gesamtabsatz in Abhängigkeit von der Zeit angibt. 3

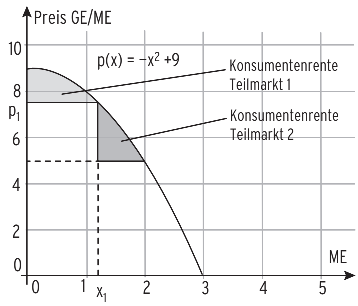


Aufgabe 4

Die Preisentwicklung eines Produkts entspricht der Nachfragefunktion p mit

$p(x) = -x^2 + 9$; x in ME, p(x) in GE/ME.

Das Produkt wird auf dem Teilmarkt 1 für p_1 GE/ME und auf dem Teilmarkt 2 für 5 GE/ME verkauft. Es werden insgesamt 2 ME abgesetzt (vgl. nebenstehende Abbildung).



4.1 Beschreiben Sie den Einfluss der Höhe des Preises p_1 auf die Konsumentenrente des jeweiligen Teilmarkts. 2

4.2 Weisen Sie nach, dass die gesamte Konsumentenrente optimal abgeschöpft wird, wenn $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ (ME) ist. 4

Analysis

Aufgabe 5 **Lösungen Seite 24** **Punkte**

Die folgende Tabelle gibt die Stückkosten k, die variablen Stückkosten k_v und die Grenzkosten K′ zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K an (x in ME; K(x) in GE):

x	1	2	3	4	5	6	7	8
k(x)	201,0	124,0	97,0	84,0	77,8	76,0	77,6	82,0
$k_v(x)$	57,0	52,0	49,0	48,0	49,0	52,0	57,0	64,0
K′(x)	51,0	44,0	43,0	48,0	59,0	76,0	99,0	128,0

Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen allein unter Zuhilfenahme der Tabellenwerte:

1.1 Das Betriebsminimum liegt bei 4 ME. 2

1.2 Die Kosten steigen zwischen 0 und 4 ME degressiv. 2

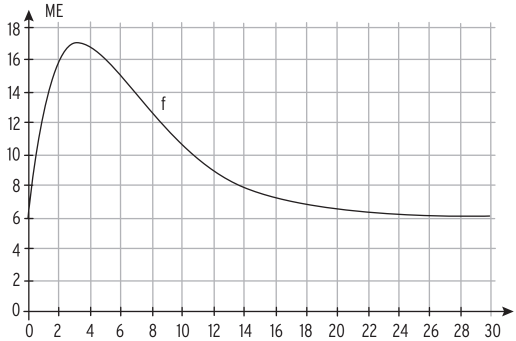
1.3 Die Fixkosten belaufen sich auf 144 GE. 2

Aufgabe 6

Die Absatzentwicklung eines Produktes wird durch die folgende Funktion beschrieben:

$f(t) = 9t \cdot e^{-0{,}3t} + 6$

dabei steht $t > 0$ für die Monate und f(t) für den Absatz in ME pro Monat.



1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die monatlichen Absatzzahlen maximal werden (notwendiges Kriterium genügt). 4

2 Nehmen Sie mit Hilfe des Graphen Stellung zu der folgenden Aussage:
In der zweiten Hälfte des ersten Jahres liegt der Zeitpunkt des maximalen Absatzrückganges. 2

Analysis

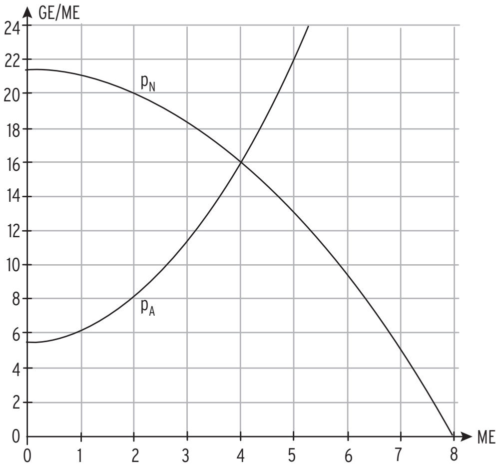
Aufgabe 7 **Lösungen Seite 24/25** **Punkte**

Gegeben sind folgende Angebotsfunktion p_A und Nachfragefunktion p_A:

$p_A(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3}$

$p_N(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3}$

x in ME, p(x) in GE/ME

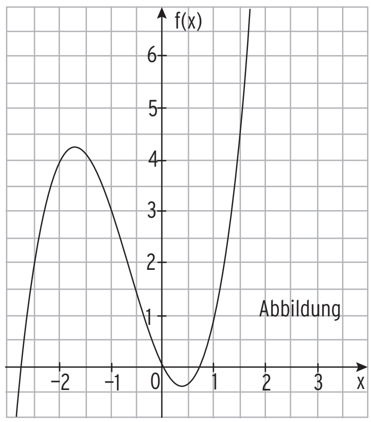


1 Berechnen Sie das Marktgleichgewicht. 4

2 Begründen Sie anhand der Graphen, dass die Konsumentenrente geringer ist als die Produzentenrente. 2

Aufgabe 8

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x$. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.



1 Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion f.

2 Entscheiden Sie begründet mit Hilfe einer Zeichnung in der Abbildung, ob die Gerade g mit $y = \frac{1}{2}x + 5$ eine Tangente am Graphen von f im Punkt P (− 2 | 4) ist. 6

Lösungen – Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung – Analysis

Hilfsmittelfreier Teil der Zentralen Abiturprüfung

Aufgabe 1 (Aufgaben Seite 12)

1.1 Der Graph der Grenzkostenfunktion schneidet den Graphen der variablen Stückkostenfunktion im Betriebsminimum, den der Stückkostenfunktion im Betriebsoptimum. Also gehört f_3 zur Grenzkostenfunktion. Die kurzfristige Preisuntergrenze ist geringer als die langfristige Preisuntergrenze, so dass f_2 der variablen Stückkostenfunktion und f_1 der Stückkostenfunktion zugeordnet werden kann.

1.2 Minimum der variablen Stückkosten:

$k_v(x) = a\,x^2 + bx + c$; $\quad k_v'(x) = 2ax + b$

Notwendig und hinreichend bei ertragsgesetzlicher Kostenfunktion:

$k_v'(x) = 0 \qquad 2ax + b = 0$

$x = -\frac{b}{2a}$; da $a > 0$ Minimalstelle

Aufgabe 2

2.1 Nullstellenbetrachtung

$f(t) = 0 \qquad (40 - t)e^{0,05t} = 0$

da $e^{0,05t} \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ $\qquad t = 40$

Nach 40 Monaten verschwindet das Produkt vom Markt.

2.2 Extremwertbetrachtung: Notwendige Bedingung $f'(t) = 0$

$f'(t) = 0,05(40 - t)e^{0,05t} - e^{0,05t} = e^{0,05t}\,(0,05(40 - t) - 1)$

(Produkt- und Kettenregel)

$f'(t) = 0 \qquad 0,05(40 - t) - 1 = 0$

$1 - 0,05t = 0$

$t = 20$

Dazu hinreichend für Maximum ($f''(20) = -\frac{1}{400} \cdot 20 \cdot e^1 = -\frac{e}{20} < 0$

Alternativ: $f'(20) = e^{0,05 \cdot 20}\,(0,05(40 - 20) - 1) = e^1 \cdot 0 = 0$

Lösungen – Analysis

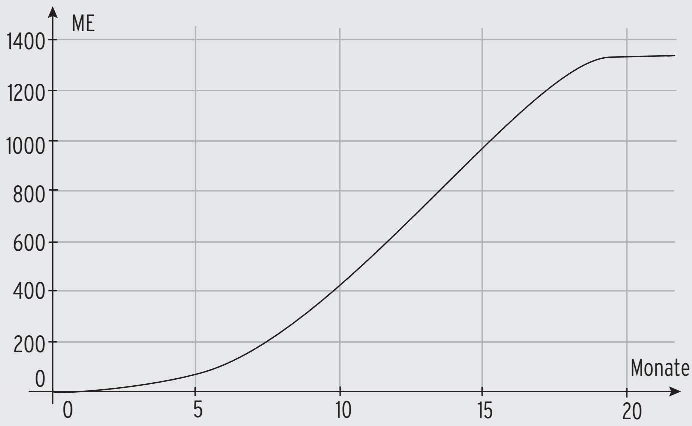
Aufgabe 3

(Aufgaben Seite 13)

3.1 Die gesamte Absatzmenge der ersten 20 Monate wird mit dem Integral berechnet.

$$\int_0^{20} f(t)dt = \int_0^{20} \left(-\frac{1}{10}t^3 + 2t^2\right)dt = \left[-\frac{1}{40}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^{20} = -4000 + \frac{16000}{3} \approx 1333{,}3 \text{ (ME)}$$

3.2



Aufgabe 4

4.1 Bei Erhöhung des Preises p_1 wird die Konsumentenrente im Teilmarkt 1 geringer und gleichzeitig die des Teilmarkts 2 höher. Bei Verringerung des Preises verhält es sich umgekehrt.
(Bei einem Preis p_1 von 9 GE/ME erlischt der Teilmarkt 1, bei einem Preis p_1 von 5 GE/ME erlischt der Teilmarkt 2.)

4.2 Damit die Konsumentenrente höchstmöglich abgeschöpft wird, muss der Preis p_1 so gewählt werden, dass der Flächeninhalt des Rechtecks unter dem Flächenstück zur Konsumentenrente Teilmarkt 1 möglichst groß wird (dadurch wird die Konsumentenrente möglichst klein).

$A(x) = x \cdot f(x) - 5x = -x^3 + 9x - 5x = -x^3 + 4x$

Extremwertbetrachtung: $A'(x) = 0$ $\qquad -3x^2 + 4 = 0$

$x^2 = \frac{4}{3}$

Mit $x > 0$: $\qquad x = \sqrt{\frac{4}{3}}$

Dazu hinreichend: $A''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -6\sqrt{\frac{4}{3}} < 0$

Lösungen – Analysis

Aufgabe 5

(Aufgaben Seite 14)

1.1 Die variablen Stückkosten und die Grenzkosten sind im Betriebsminimum gleich, also ist aus der Tabelle abzulesen: $x_{BM} = 4$. Die Aussage ist also wahr.

1.2 Die Grenzkostenfunktion K' gibt den Kostenzuwachs an. Dieser nimmt nur bis 3 ME ab (degressiver Zuwachs), danach wieder zu (progressiver Zuwachs). Daher ist die Aussage falsch.

1.3 Die Stückkostenfunktion und die variable Stückkostenfunktion unterscheiden sich nur durch den Term $\frac{K_{fix}}{x}$.

Daher gilt: $K_{fix} = k(1) - k_v(1) = 201 - 57 = 144$.

Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 6

1 $f(t) = 9t \cdot e^{-0{,}3t} + 6$; $f'(t) = 9 \cdot e^{-0{,}3t} + (-0{,}3) \cdot 9t \cdot e^{-0{,}3t} = 9 \cdot e^{-0{,}3t}(1 - 0{,}3t)$

(mit Produkt und Kettenregel)

Notwendige Bedingung: $f'(t) = 0$ $\quad 9(1 - 0{,}3t) = 0 \quad (e^{-0{,}3t} \neq 0)$

$-0{,}3t + 1 = 0$

$t = \frac{1}{0{,}3} = \frac{10}{3}$

Der maximale Absatz wird im 4. Monat erreicht.

2 Der stärkste Absatzrückgang entspricht dem Wendepunkt mit re/li-Krümmungswechsel.

Dieser liegt laut Graph bei ungefähr (8 | 12,5). Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 7

(Aufgaben Seite 15)

1 Schnittpunkt von Angebots- und Nachfragefunktion:

$p_A(x) = p_N(x)$ $\quad \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3}$

$x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow x = \pm 4$

Da negative Produktionswerte ökonomisch sinnlos sind, liegt die Gleichgewichtsmenge bei 4 ME. Der Gleichgewichtspreis liegt bei 16 GE/ME: $\quad p_A(4) = p_N(4) = 16$

Die Abbildung bestätigt das Ergebnis.

2 Der Inhalt der zwischen dem Graphen von p_N und $y = 16$ eingeschlossenen Fläche stellt den Geldwert der Konsumentenrente dar, der Flächeninhalt zwischen $y = 16$ und dem Graphen von p_A den Geldwert der Produzentenrente. Die Fläche der Konsumentenrente ist kleiner als die Fläche der Produzentenrente, somit ist die Konsumentenrente geringer als die Produzentenrente.

Lösungen – Analysis

Aufgabe 8

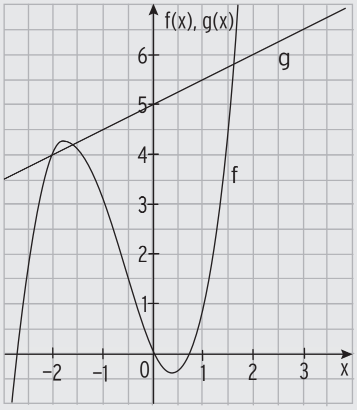
(Aufgaben Seite 15)

1 Nullstellen: $f(x) = 0$ $x^3 + 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 2) = 0$

Also $x_1 = 0$. Zusätzlich: $x^2 + 2x - 2 = 0$

$x_{2|3} = -1 \pm \sqrt{1+2}$

Die drei Nullstellen sind $x_1 = 0$, $x_{2|3} = -1 \pm \sqrt{3}$.



2 Einzeichnen der Geraden g (siehe Abbildung rechts). Man sieht deutlich, dass g den Graphen von f im Punkt P (− 2 | 4) nicht berührt, sondern schneidet. Daher kann g keine Tangente am Graphen von f im Punkt P sein.

Aufgabe 9

(Aufgaben Seite 16)

(1) Es gilt: $f'(x) = 3x^2 + 6x$. Das Vorzeichen des Koeffizienten vor x^2 entscheidet, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist. Weil $3 > 0$ gilt, ist die Parabel nach oben geöffnet.

Oder: Die Parabel von f ′ besitzt die Nullstellen $x = -2$ und $x = 0$, denn sie sind die lokalen Extremstellen von f. Nur dazwischen fällt der Graph von f, also liegt die Parabel von f ′ für $-2 < x < 0$ unterhalb der x-Achse. Die Parabel muss also nach oben geöffnet sein.

(2) $c = -3$ oder $c = 1$. Damit es genau zwei Nullstellen gibt, muss der Graph von g_c die x-Achse im Hochpunkt oder im Tiefpunkt berühren. Somit muss entweder der Graph von f (Hochpunkt H(− 2 | 3)) um drei Einheiten nach unten oder um eine Einheit nach oben (Tiefpunkt T(0| − 1)) verschoben werden.

Aufgabe 10

(1) Am Graphen ist erkennbar, dass $x = 2$ die vermutliche Nullstelle ist.

Zum rechnerischen Nachweis: Setze $x = 2$ in $f(x)$ ein.

Wegen $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$ ist $x = 2$ eine Nullstelle von f.

(2) Je größer a wird, desto weiter wird der entsprechende Graph der Funktion f nach links verschoben. Damit $x = -1$ eine Nullstelle wird, muss der Graph von f um drei Einheiten nach links verschoben werden, also muss $a = 3$ gelten.

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung – Stochastik

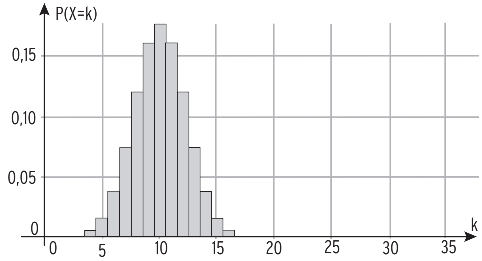
Hilfsmittelfreier Teil der Zentralen Abiturprüfung

Stochastik — **Lösungen Seite 54**

Punkte

Aufgabe 1

Bei der Produktion eines Elektrobauteils kommt es bei durchschnittlich 20 % der Bauteile zu statischen Aufladungen, die Probleme beim weiteren Verarbeitungsprozess bewirken können.
X ist die binomialverteilte Zufallsgröße, die die Anzahl problematischer Elektrobauteile bei einer Tagesproduktion von 50 Bauteilen angibt.



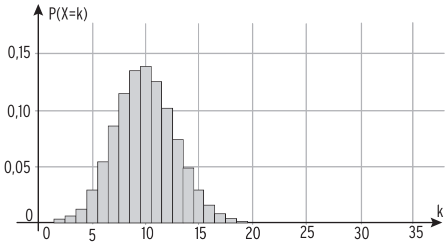


Abb. 2

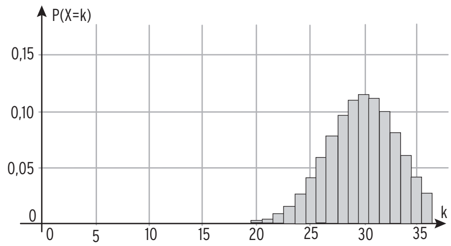


Abb. 3

1.1	Prüfen Sie, welche der obigen Abbildungen die zu X gehörige Verteilung ist.	2
1.2	Bestimmen Sie mit der von Ihnen ausgewählten Graphik näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl statisch aufgeladener Elektroteile um weniger als zwei vom Erwartungswert E(X) abweicht.	4

Aufgabe 2

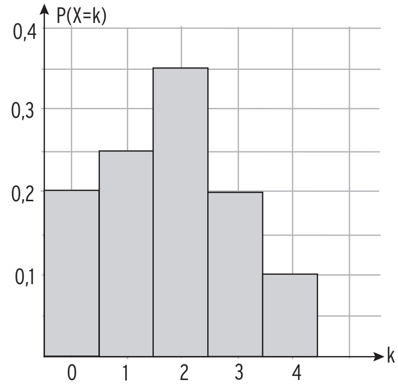
2.1	Ein Unternehmen, das Leuchtmittel an zwei Standorten A und B herstellt, prüft deren Lebensdauer. Die ZufallsgrößeX gibt für ein Leuchtmittel von Standort A die Lebensdauer in Stunden an, Y die für ein Leuchtmittel aus B. Es gilt $E(X) = E(Y)$ und $\sigma(X) < \sigma(Y)$ Erklären Sie, was diese Beziehungen für die Verteilung der Lebensdauer eines Leuchtmittels bedeuten.	3
2.2	Die Zufallsgröße Z nimmt genau die Zahlenwerte 0, 1, 2, 3, 4 mit positiven Wahrscheinlichkeiten an. Entwickeln Sie für Z eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, so dass der Erwartungswert von Z zwischen 0 und 1 liegt.	3

Stochastik

Lösungen Seite 54/55

Punkte

Aufgabe 3



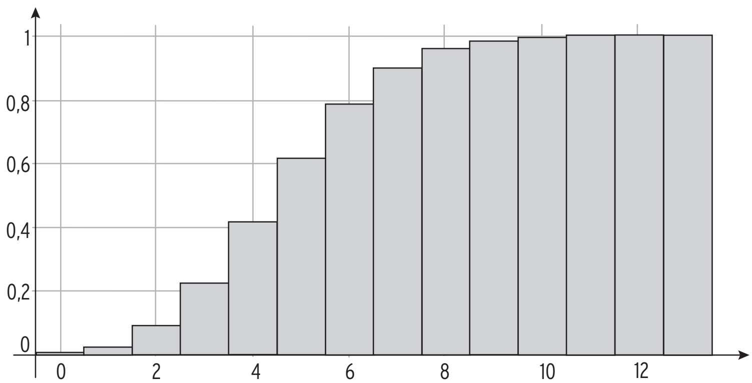
Ein Unternehmen macht mit seinem Produkt einen Gewinn zwischen 0 und 4 Geldeinheiten. Es liegen unterschiedliche Angaben zu den Gewinnwahrscheinlichkeiten vor.

3.1 Erklären Sie, warum der obige Graph nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer ganzzahligen Zufallsgröße beschreiben kann. 2

3.2 Die ZufallsgrößeX gibt den Gewinn, den das Unternehmen mit seinem Produkt macht, an. Die obige Graphik stellt für einen Gewinn von 0 GE, 3 GE und 4 GE die Wahrscheinlichkeiten richtig dar. Es ist bekannt, dass der erwartete Gewinn bei 1,7 GE liegt. Ermitteln Sie die korrekten Wahrscheinlichkeiten für X = 1 und X = 2. 4

Aufgabe 4

25 % der Mitarbeiter/-innen eines Großunternehmens klagen über eine zu hohe Arbeitsbelastung. Das Balkendiagramm gibt die kumulierte Binomialverteilung für eine Stichprobe von n = 20 an.



4.1 Geben Sie allein unter Zuhilfenahme des Diagramms die ungefähren Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse an:

A: Genau 6 Mitarbeiter/-innen sind unzufrieden.

B: Weniger als 8 Mitarbeiter/-innen fühlen sich überlastet.

C: Mindestens 15 Mitarbeiter/-innen sind zufrieden. 3

Stochastik **Lösungen Seite 55**

Aufgabe 4 Fortsetzung **Punkte**

4.2 Nach Einführung eines neuen Arbeitszeitmodells beklagen nur noch 2 von 20 Personen die Arbeitsbelastung. Beurteilen Sie mit Hilfe des Diagramms, ob mit 90 % Sicherheitswahrscheinlichkeit von einer geringeren Unzufriedenheit als 25 % ausgegangen werden kann. 3

Aufgabe 5

Eine Textilfabrik stellt unter anderem weiße T-Shirts her. Von diesen werden 50 % gefärbt und 50 % bestickt. Beim Färben sind 10 % der T-Shirts nicht farbecht, 20 % der anderen Hälfte sind fehlerhaft bestickt.

5.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar. 3

5.2 Die Herstellungskosten für alle T-Shirts betragen im Mittel 0,2 GE pro Stück. Die korrekt gefärbten T-Shirts werden zu einem Preis von 2 GE pro Stück, die fehlerhaft gefärbten T-Shirts werden als 2. Wahl zu einem Preis von 1 GE pro Stück verkauft. Die korrekt bestickten T-Shirts erzielen einen Erlös von 2,5 GE pro Stück, wohingegen die fehlerhaft bestickten T-Shirts zusätzliche Kosten in Höhe von 1 GE pro Stück verursachen. Berechnen Sie den durchschnittlich zu erwartenden Stückdeckungsbeitrag. 3

Aufgabe 6

Eine verbeulte Münze wird mehrfach geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf „Wappen“ fällt, beträgt p.

6.1 Geben Sie jeweils einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse A und B an: 3

A: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen“.

B: Bei 5 Würfen fällt genau dreimal „Wappen“, darunter bei den ersten beiden Würfen zweimal.

6.2 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 3 Würfen dreimal „Wappen“ fällt, ist 0,216. Untersuchen Sie, ob das Ergebnis „Wappen“ wahrscheinlicher ist als das Ergebnis „Zahl“. 2

Stochastik **Lösungen Seite 56**

Lösungen Seite 56

Aufgabe 7 **Punkte**

Bei der Herstellung eines Produktes sind durchschnittlich 20 % der Teile fehlerhaft.

Zu Testzwecken werden der laufenden Produktion einige Teile entnommen.

7.1 Es sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der entnommenen Teile angibt, die fehlerhaft sind. Begründen Sie, warum man die Zufallsvariable X als binomialverteilt annehmen kann. 3

7.2 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die ersten beiden entnommenen Teile nicht fehlerhaft sind. 1

7.3 Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis A und ein Ereignis B an, so dass gilt:

$P(A) = 0{,}2^{10}$ $\qquad$ $P(B) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}2^{10} \cdot 0{,}8^{40}$ 2

Aufgabe 8

Von den 100 Schülerinnen und Schülern einer Jahrgangsstufe wählt die eine Hälfte als Naturwissenschaft Physik, die andere Hälfte Biologie.

Die Jahrgangsstufe umfasst insgesamt 60 Mädchen. 30 % sind Jungen und haben Physik gewählt.

8.1 Stellen Sie den gegebenen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar. 3

8.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten,

- dass eine zufällig ausgewählte Schülerin Physik gewählt hat,
- dass ein zufällig ausgewählter Teilnehmer des Biologie-Kurses männlich ist.

3

Aufgabe 9

Die Zürla-Kohlin GmbH bezieht von einem Zulieferer seit Jahren selbstsichernde Muttern in großen Mengen, bei denen zwei Fehlerarten auftreten: Falsche Form und fehlerhaftes Gewinde.

Insgesamt sind nur 90 % aller Muttern fehlerfrei, d. h. sie haben weder eine falsche Form noch ein fehlerhaftes Gewinde. 5 % der Muttern haben eine falsche Form. 40 % der Muttern mit falscher Form haben auch ein fehlerhaftes Gewinde.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Mutter mit fehlerhaftem Gewinde auch ein falsche Form? 5

Stochastik **Lösungen Seite 57**

Aufgabe 10 **Punkte**

Ein Supermarkt verwendet für die Bearbeitung zurückgegebener Pfandflaschen eine Maschine. Diese soll einwandfreie Flaschen von deformierten Flaschen unterscheiden. Zurückgegebene Flaschen werden entweder von der Maschine abgewiesen oder angenommen. Dabei unterlaufen dem Gerät auch Fehler: Es werden manchmal auch einwandfreie Flasche abgewiesen oder deformierte Flasche angenommen. Eine Übersicht über Wahrscheinlichkeiten in diesem Zusammenhang liefert die noch unvollständige Vierfeldertafel (Tabelle).

	Flasche angenommen	Flasche abgewiesen	
Flasche einwandfrei	0,9405	0,0095	0,95
Flasche deformiert	0,0015	0,0485	0,05
	$\boxed{}$	$\boxed{}$	

a) In den beiden doppelt umrandeten Kästchen der letzten Zeile fehlen zwei Wahrscheinlichkeiten in dem vorliegenden Sachzusammenhang. Berechnen Sie beide Wahrscheinlichkeiten und geben Sie diese in den Kästchen an.

b) Geben Sie die Bedeutung der beiden Wahrscheinlichkeiten aus 10.1 in dem vorliegenden Sachzusammenhang an.

c) Eine Flasche wird abgewiesen. Ermitteln Sie einen Term, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass die Flasche in Ordnung ist.

6

Hinweis: Die konkrete Berechnung wird nicht verlangt.

Aufgabe 11

Erfahrungsgemäß sind 4 % der produzierten Smartphones eines Herstellers defekt. Ein Lieferant erhält ein Paket mit 50 Smartphones des Herstellers.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens ein defektes Smartphone?
Geben Sie einen Term an. 3

Stochastik **Lösungen Seite 57/58**

Aufgabe 12

a) Ein Fußballspieler verwandelt erfahrungsgemäß 80 % aller Strafstöße.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er von vier Strafstößen

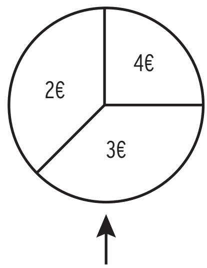
- nur den letzten?
- mindestens einen?

b) Für ein Ereignis C gilt: $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}8^b \cdot a^2$

Geben Sie geeignete Werte für a, b und k an.

Beschreiben Sie das Ereignis C in Worten.

Aufgabe 13



Bei einem Glücksspiel wird das abgebildete Glücksrad benutzt. Als Einsatz bezahlt man 3 €. Das Glücksrad wird einmal gedreht. Man erhält den Betrag ausbezahlt, dessen Sektor über dem Pfeil zu stehen kommt. Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn.

Aufgabe 14

Eine Urne enthält 5 rote, 3 weiße und 2 gelbe Kugeln.

a) Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man keine gelbe Kugel?

b) Nun werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden Kugeln die gleiche Farbe?

Aufgabe 15

Bei einer Lotterie führen 5 % der Lose zu einem Gewinn. Nils kauft 14 Lose. Geben Sie jeweils eine Aufgabenstellung an, deren Lösung auf die folgende Weise berechnet wird.

a) $P(A) = \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

b) $P(B) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{12} + \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

c) $P(C) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{14}$

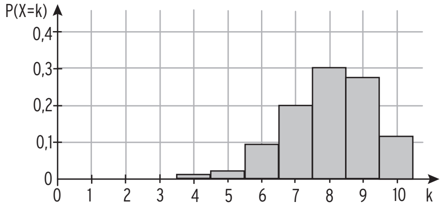
d) $14 \cdot 0{,}05$

Stochastik **Lösungen Seite 58**

Aufgabe 16 **Punkte**

Ein Basketballspieler wirft 10 Freiwürfe.Die Anzahl seiner Treffer wird mit k bezeichnet und durch die Zufallsgröße X beschrieben. Die Zufallsgröße X wird als binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,8 angenommen.

In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

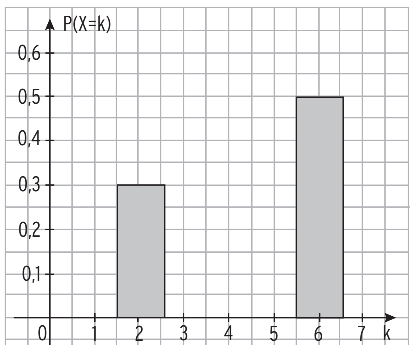


a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Basketballspieler mindestens 8-maltrifft. 2

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, keinen Treffer zu erzielen, kleiner als $\frac{1}{1\,000\,000}$ ist. 3

Aufgabe 17

Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsgröße X festgelegt, welche die drei Werte 2, 4 und 6 annehmen kann. In der Abb. ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X unvollständig dargestellt.



a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit P(X = 4) an. Berechnen Sie den Erwartungswert von X. 3

b) Das Zufallsexperiment wird zweimal unter gleichen Bedingungen durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsgröße notiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt dieser beiden Werte den Wert 12 ergibt. 3

Stochastik

Lösungen Seite 59

Punkte

Aufgabe 18

In einer Urne befinden sich zu Beginn eines Zufallsexperiments drei schwarze Kugeln (S) und zwei weiße Kugeln (W), siehe Abbildung 1.

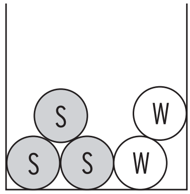


Abbildung 1

Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Zu dem Zufallsexperiment wurde das Baumdiagramm aus Abbildung 2 erstellt.

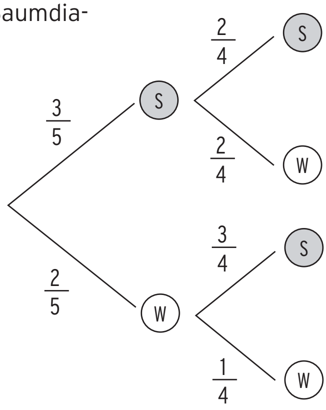


Abbildung 2

(1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dem Zufallsexperiment mindestens eine schwarze Kugel gezogen wird. 3

(2) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X. 3

Aufgabe 19

In den Urnen U1 und U2 befinden sich Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden:

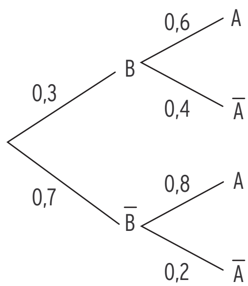
U1 : 6 rote und 4 blaue Kugeln
U2 : 1 rote und 4 blaue Kugeln

1.1 Aus der Urne U1 werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben. 2

1.2 Es wird eine der beiden Urnen zufällig ausgewählt. Aus dieser wird eine Kugel zufällig gezogen. Die gezogene Kugel ist rot. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel aus der Urne U1 stammt. 3

Aufgabe 20

Für ein zweistufiges Zufallsexperiment hat ein Schüler das abgebildete Baumdiagramm korrekt gezeichnet und beschriftet.



a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A})$.

b) Erstellen Sie zum selben Sachverhalt eine entsprechende Vierfeldertafel.

Lösungen - Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung – Stochastik

Hilfsmittelfreier Teil der Zentralen Abiturprüfung

Lösungen Stochastik

Aufgabe 1 (Aufgaben Seite 46)

1.1 Da $E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}2 = 10$ ganzzahlig ist, muss der maximale Wert $P(X = 10)$ sein. Abbildung 3 erfüllt dies nicht. Nur für $p = 0{,}5$ ist die Binomialverteilung symmetrisch, so dass für $p = 0{,}2$ nur Abbildung 2 möglich ist.

1.2 Da $E(X) = n \cdot p = 10$, sind die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von 9, 10 oder 11 statisch aufgeladenen Elektrobauteilen aufzusummieren.
Aus der Abb. 2 liest man
$0{,}14 + 0{,}14 + 0{,}13 = 0{,}41$ ab, also ca. 40 % Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 2

2.1 Der Erwartungswert entspricht der durchschnittlich zu erwartenden Lebensdauer eines Leuchtmittels. Diese ist für die in A und B produzierten jeweils gleich. Die geringere Standardabweichung bei X bedeutet, dass die Lebensdauer eines Leuchtmittels aus A im Vergleich zu einem aus B durchschnittlich weniger weit von der erwarteten Lebensdauer abweicht.

2.2 Mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilung:

z_i	0	1	2	3	4	Summe
$P(Z = z_i)$	0,80	0,05	0,05	0,05	0,05	1

$E(Z) = 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}2 = 0{,}5$

Aufgabe 3 (Aufgaben Seite 47)

3.1 Die Summe der Wahrscheinlichkeiten beträgt
$0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}35 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1{,}1 > 1$.

3.2 Mit $a = P(X = 1)$ und $b = P(X = 2)$ ergibt sich

Summe Einzelwahrscheinlichkeiten:	I. $0{,}2 + a + b + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$
Erwartungswert:	II. $a + 2b + 0{,}6 + 0{,}4 = 1{,}7$
Vereinfachung:	I. $a + b = 0{,}5$
	II. $a + 2b = 0{,}7$
II. − I. ergibt	$b = 0{,}2$
einsetzen ergibt $a = 0{,}3$	

Lösungen Stochastik

Aufgabe 4

(Aufgabe Seite 47/48)

4.1 X gibt die Anzahl unzufriedener Mitarbeiter/-innen an.

A: $P(X = 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 5) = 0{,}78 - 0{,}62 = 0{,}16$

B: $P(X < 8) \approx 0{,}9$

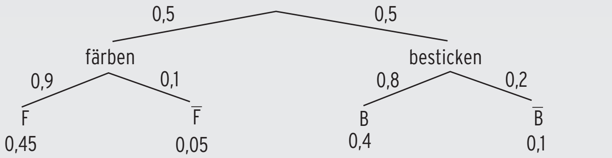
C: $P(X \leq 5) \approx 0{,}62$

4.2 Da die Wahrscheinlichkeit maximal 2 unzufriedene Mitarbeiter/-innen bei $p = 0{,}25$ zu haben mit $P(X \leq 2) \approx 0{,}1$ ungefähr 10 % beträgt, kann mit 90 % Sicherheitswahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden, dass die Zufriedenheit gesteigert wurde.

Aufgabe 5

(Aufgaben Seite 48)

5.1 Baumdiagramm



F = Färbung ok, $\overline{F}$ = Färbung fehlerhaft, B = Korrekt bestickt, $\overline{B}$ = fehlerhaft bestickt

5.2 Durchschnittlich zu erwartender Stückdeckungsbeitrag

Sei X die Zufallsgröße, die den Stückdeckungsbeitrag beschreibt.

$E(X) = 2 \cdot 0{,}45 + 1 \cdot 0{,}05 + 2{,}5 \cdot 0{,}4 - 1 \cdot 0{,}1 - 0{,}2 = 1{,}65$

Der zu erwartende Stückdeckungsbeitrag beträgt 1,65 GE.

Aufgabe 6

6.1 Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: $\binom{5}{3} p^3 \cdot (1-p)^2$

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: $p^2 \cdot \binom{3}{1} p \cdot (1-p)^2$

6.2 Das Ergebnis "Wappen" ist wahrscheinlicher, da gilt: $0{,}216 > 0{,}5^3 = 0{,}125$.

oder: $\sqrt[3]{0{,}216} = 0{,}6 > 0{,}5$

Aufgabe 7

(Aufgaben Seite 49)

7.1 Die Zufallsvariable ist binomialverteilt:

Für jedes Teil gibt es nur zwei Möglichkeiten, nämlich entweder defekt oder nicht defekt. Es wird zwar ohne Zurücklegen gezogen, aber da die Grundgesamtheit sehr groß und die Stichprobe verhältnismäßig klein ist, bleibt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Zug gleich.

Lösungen Stochastik

Aufgabe 7 Fortsetzung

(Aufgaben Seite 49)

7.2 $P(E) = 0{,}8^2 = 0{,}64$ Hinweis: $\binom{50}{40} = \binom{50}{10}$

7.3 A: die ersten zehn Teile sind fehlerhaft.

B: es werden 50 Teile gezogen, davon sind genau 10 fehlerhaft.

Aufgabe 8

8.1 Es ergibt sich die Vierfeldertafel:

	weiblich	männlich	
Physik	0,2	0,3	0,5
Biologie	0,4	0,1	0,5
	0,6	0,4	1

8.2 Mit dem Satz von Bayes ergibt sich:

$P_w(Ph) = \frac{P(Ph \cap w)}{P(w)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}$

$P_{Bio}(m) = \frac{P(Bio \cap m)}{P(Bio)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = \frac{1}{5}$

Alternativ können die gesuchten Wahrscheinlichkeiten aus einem Baumdiagramm entnommen werden.

Aufgabe 9

FF: falsche Form; RF: richtige Form

FG: fehlerhaftes Gewinde; RG: fehlerfreies Gewinde

Gegeben: $P(FF) = 0{,}05$; $P_{FF}(FG) = 0{,}4$; $P(RF \cap RG) = 0{,}90$

Gesucht: $P_{FG}(FF)$

$P_{FF}(FG) = 0{,}4$ $P_{FF}(FG) = \frac{P(FF \cap FG)}{P(FF)} = 0{,}4$

$P(FF \cap FG) = 0{,}05 \cdot 0{,}4 = 0{,}02$

Aufstellen einer Vierfeldertafel:

Geg. im Text: 0,90; 0,05

40 % von 0,05 = *0,02*

	FF	RF	gesamt
FG	*0,02*	0,05	0,07
RG	0,03	**0,90**	0,93
gesamt	**0,05**	0,95	1

$P_{FG}(FF) = \frac{P(FF \cap FG)}{P(FG)} = \frac{0{,}02}{0{,}07} = \frac{2}{7}$

Lösungen Stochastik

Aufgabe 10 (Aufgaben Seite 50)

a) 0,9405 + 0,0015 = 0,942 und 0,0095 + 0,0485 = 0,058 .

	Flasche angenommen	Flasche abgewiesen	
Flasche einwandfrei	0,9405	0,0095	0,95
Flasche deformiert	0,0015	0,0485	0,05
	0,942	0,058	1

b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 94,2 % wird eine Flasche von der Maschine angenommen und mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,8 % wird eine Flasche von der Maschine abgewiesen.

c) Man teilt den Anteil der abgewiesenen einwandfreien Flaschen durch den Anteil aller abgewiesenen Flaschen. Das ergibt: $\frac{0{,}0095}{0{,}0095 + 0{,}0485}$.

Aufgabe 11

X: Anzahl der defekten Smartphones unter 50 Smartphones;

X ist $B_{50;0{,}04}$- verteilt

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$= \binom{50}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}04^1 \cdot 0{,}96^{49}$$

Aufgabe 12 (Aufgaben Seite 51)

a) P(nur den letzten) $= 0{,}2^3 \cdot 0{,}8 = \frac{4}{625} = 0{,}0064$

P(mindestens einen) = 1 – P(keinen) = $1 - 0{,}2^4 = 0{,}9984$

b) $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}8^b \cdot a^2$ für k = 8; a = 0,2; b = 8

Ereignis C: Der Spieler hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 80 % und verwandelt 8 von 10 Strafstößen.

Aufgabe 13

x_i	2 €	3 €	4 €
Gewinn	− 1 €	0 €	1 €
$P(X = x_i)$	0,375	0,375	0,25

Erwartungswert für den Gewinn: $E(X) = -1 \cdot 0{,}375 + 1 \cdot 0{,}25 = -0{,}125$

Lösungen Stochastik

Aufgabe 14

(Aufgaben Seite 51)

a) 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

P(keine gelbe Kugel) = $0{,}8^3 = \frac{64}{125} = 0{,}512$

b) 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen

P(gleiche Farbe) = P(rr) + P(ww) + P(gg) = $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{14}{45} \approx 0{,}31$

Aufgabe 15

a) $P(A) = \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$ A: Nils zieht ganau 3 Gewinnlose.

b) $P(B) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{12} + \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

B: Nils zieht 2 oder 3 Gewinnlose.

c) $P(C) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{14}$ C: Nils zieht mindestens ein Gewinnlos.

d) $14 \cdot 0{,}05$ Durchschnittlich zu erwartende Anzahl von Gewinnlosen unter 14 Losen

Aufgabe 16

(Aufgaben Seite 52)

X ist binomialverteilt mit n = 10; p = 0,8

a) $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

Ablesen ergibt den Näherungswert: $0{,}30 + 0{,}27 + 0{,}11 = 0{,}68$

b) $P(X = 0) = 0{,}2^{10}$

Abschätzung: $0{,}2^{10} = \left(\frac{2}{10}\right)^{10} = \frac{2^{10}}{10^{10}} = \frac{1024}{10\,000\,000\,000} = \frac{1{,}024}{10\,000\,000}$

$$0{,}2^{10} = \frac{0{,}1024}{1\,000\,000} < \frac{1}{1\,000\,000}$$

Aufgabe 17

a) $P(X = 4) = 1 - 0{,}3 - 0{,}5 = 0{,}2$

Erwartungswert von X: $E(X) = 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}5 = 4{,}4$

b) Das Produkt 12 kann hier auf zwei Möglichkeiten erreicht werden: 2;6 und 6;2.

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit:

$P(12) = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}30$

Lösungen Stochastik

Aufgabe 18

(Aufgaben Seite 53)

(1) P(„mindestens eine schwarze Kugel“) = 1 – P(„keine schwarze Kugel“)

P(„mindestens eine schwarze Kugel“) $= 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der mindestens eine schwarze Kugel gezogen wird, beträgt 90%.

(2) Anhand der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X kann der Erwartungswert $\mu = E(X)$ berechnet werden:

k	0	1	2
P(X = k)	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}1$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0{,}6$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0{,}3$

$\mu = E(X) = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 1{,}2$

Der Erwartungswert μ der Zufallsgröße X beträgt 1,2.

Aufgabe 19

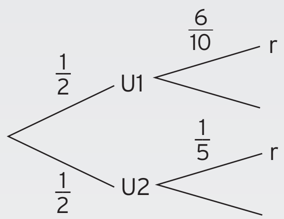
1.1 P („beide Kugeln haben die gleiche Farbe“) = P(rr) + P(bb)

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{15}$$

1.2 Mithilfe eines Baumdiagramms erhält man:

$$P(E_2) = \frac{P(U1 \wedge r)}{P(r)}$$

$$P(E_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$$

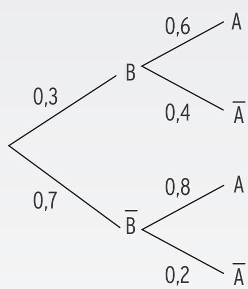


Aufgabe 20

a) $P(\overline{A}) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}26$

b) Vierfeldertafel

	A	$\overline{A}$	
B	0,18	0,12	0,3
$\overline{B}$	0,56	0,14	0,7
	0,74	0,26	1



II Teil II der zentralen Abiturprüfung mit Hilfsmittel (GTR)

1 Analysis

Mathematische Formeln Wirtschaft und Verwaltung

Kostenfunktionen x: Ausbringungsmenge in ME y: Gesamtkosten in GE	Gesamtkostenfunktion K mit	$K(x) = K_v(x) + K_f$
	Ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit	$K(x) = ax3 + bx2 + cx + d$
	K wächst degressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) < 0$
	K wächst progressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) > 0$
	Funktion der variablen Gesamtkosten	$K_v(x)$
	Funktion der gesamten Stückkosten k (Funktion der Durchschnittskosten)	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
	Funktion der variablen Stückkosten k_v	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
	Grenzkostenfunktion	$K'(x)$ Kostenzuwachs
	Grenzstückkostenfunktion	$k'(x)$
	Betriebsoptimum (Minimalstelle von k(x))	x_{BO}
	Langfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BO})$
	Betriebsminimum (Minimalstelle von $k_v(x)$)	x_{BM}
	kurzfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BM})$
	Nachfragefunktion (Preis-Absatz-Funktion)	$p_N(x)$
	Angebotsfunktion	$p_A(x)$
	Gleichgewichtsmenge	x_G; Schnittstelle von $p_N(x)$ und $p_A(x)$
	Gleichgewichtspreis	$p_G = p_N(x_G) = p_A(x_G)$
	Marktgleichgewicht MG	$MG\ (x_G \mid p_G)$
	Konsumentenrente Differenz zwischen den theoretisch möglichen und den tatsächlichen Ausgaben für ein Produkt.	$\int_0^{x_G} (p_N(x) - p_G)dx$
	Produzentenrente Differenz aus erzieltem Umsatz und mindestens erwartetem Umsatz.	$\int_0^{x_G} (p_G - p_A(x))dx$
	Erlösfunktion	$E(x) = p \cdot x$; p Preis pro ME $E(x) = p_N(x) \cdot x$; $p_N(x)$ Preis abhängig von x
	Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
	Grenzgewinnfunktion	$G'(x)$
	Gewinnschwelle	x_{GS} 1. positive Nullstelle von G
	Gewinngrenze	x_{GG} 2. positive Nullstelle von G
	gewinnmaximale Ausbringungsmenge Maximalstelle von G(x): G′(x) = 0	x_{max}
	Cournot'scher Punkt	$C(x_{max} \mid p_N(x_{max}))$
	Stückdeckungsbeitrag d = dB	$dB(x) = p(x) - k_v(x)$
	Deckungsbeitrag D = DB	$DB(x) = G(x) + K_{fix} = E(x) - K_v(x)$

Formelsammlung Analysis

Bezeichnungen:

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Menge der reellen Zahlen ohne Null

$\mathbb{R}_+^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$ Menge der positiven reellen Zahlen

$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$ Menge der positiven reellen Zahlen mit Null

Ableitungsregeln

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x)$

Kurzform: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Kurzform: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Kettenregel: $f(x) = g(u(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$

für Exponentialfunktion $f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = (e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$

Integrationsregeln:

Integration durch Substitution

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c; \quad a \neq 0$$

Produktintegration (partielle Integration)

$$\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$$

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung Analysis

Aufgabe 1 **Lösung Seite 77** **Punkte**

Der Pharmakonzern Harma AG stellt schmerzlindernde Präparate als klassische Tablette, Brausetablette, Granulat oder Kautablette her. Diese werden in drei Produktionsabteilungen gefertigt. Regelmäßig führt die Marketingabteilung der Harma AG verschiedenartige Marktanalysen durch.

1.1 Die Analyse für das Produkt Niap free ergibt, dass sich die Angebotspreise auf dem Markt durch die Funktion p_A darstellen lassen und die Nachfragesituation durch p_N beschrieben werden kann.

$p_A(x) = 0{,}1(x + 2)^2 + 5;$ $p_N(x) = 12 - a \cdot x^2;\ x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0,\ a > 0.$

Dabei gibt x die angebotenen bzw. die nachgefragten Mengen in ME an und $p_A(x)$ bzw. $p_N(x)$ geben die Preise in GE pro ME an. Bei dem Parameter a handelt es sich um einen konjunkturabhängigen Parameter.

1.1.1 Geben Sie die Sättigungsmenge in Abhängigkeit vom Parameter a an. 4

1.1.2 Berechnen Sie den Wert des Parameters a, für den die Gleichgewichtsmenge bei 4,4 ME liegt. 5

1.1.3 Die Marketingabteilung behauptet: „Wenn a = 0,15 ist und die Gleichgewichtsmenge bei 4,4 ME liegt, dann ist das Verhältnis zwischen der Konsumentenrente und der Produzentenrente ausgeglichen, also 1 : 1.“ Beurteilen Sie diese Aussage unter Verwendung entsprechender Stammfunktionen. 8

1.1.4 Die Preise für das Standardschmerzmittel Niap free sind innerhalb der europäischen Gemeinschaft sehr unterschiedlich. Aus diesem Grund will die EU für dieses Präparat einen einheitlichen Preis festlegen. Zurzeit liegt der Gleichgewichtspreis über dem zukünftig festgesetzten Preis.
Interpretieren Sie, wie sich dies auf die Produzentenrente auswirkt. 4

1.2 Neben diesem Standardschmerzmittel Niap free werden ständig neue rezeptfreie schmerzlindernde Präparate in verschiedenen Varianten entwickelt. Für den Produktlebenszyklus des neu entwickelten Schmerzmittels Niap vita geht die Marketingabteilung von der Funktion f_b aus. Diese beschreibt den Umsatz in GE pro Jahr in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren.

$f_b(t) = 0{,}5 \cdot b \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot b \cdot t - 0{,}2};\ b, t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq 0,\ b > 0.$

Der Parameter b spiegelt die Stärke des Konkurrenzdrucks wider.
Berechnen Sie für b = 0,5 zu welchem Zeitpunkt der Umsatzanstieg für das Produkt *Niap Vita* am größten ist. Auf die hinreichende Bedingung kann durch schlüssige Argumentation verzichtet werden. 7

(Teile aus Abitur 2014, Berufskolleg NRW)

Aufgabe 2 **Lösung Seite 78/79**

Mobiltec führt eine umfangreiche Marktanalyse für den Absatz von Handys mit Navigationssystem durch. Die Ergebnisse stehen der Marketingabteilung zur Verfügung.

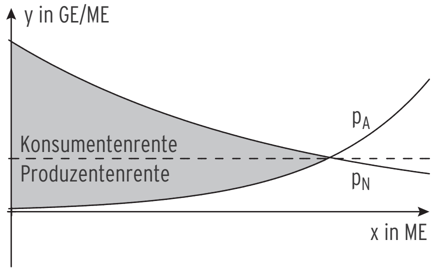
3.1 Angebot und Nachfrage nach den Handys mit Navigationssystem werden demnach durch die Angebotsfunktion p_A und die Nachfragefunktion p_N mit

$p_A(x) = e^{0,5x-3}$ und $p_N(x) = e^{-0,2x+4}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $0 \leq x \leq 15$

beschrieben. Dabei gibt x die angebotene bzw. nachgefragte Menge in ME und p_A bzw. p_N den jeweiligen Preis in GE/ME an.

3.1.1 Berechnen Sie die Menge und den Preis im Marktgleichgewicht.

3.1.2 Ermitteln Sie die Produzentenrente und die Konsumentenrente unter der Voraussetzung, dass die Gleichgewichtsmenge bei 10 ME liegt.



3.2 Mobiltec plant im Frühjahr die Einführung eines neuen Handys, welches mit einer weltweiten Navigationsfunktion ausgestattet werden soll. Die Unternehmensleitung rechnet bei der Einführung des Handys mit einer Absatzentwicklung, die sich durch die folgende Funktion A näherungsweise beschreiben lässt:

$A(t) = 20e^{-0,01t^2+0,12t}$, $t \in \mathbb{R}$; $t > 0$

Dabei gibt t die Zeit in Monaten nach der Einführung an, A(t) die Absatzzahlen in Tausend Stück pro Monat.

3.2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt t, in dem der maximale monatliche Absatz erreicht wird.

3.2.2 Berechnen Sie den maximalen monatlichen Absatz.

3.3 Für Handytyp 2 legt das Controlling folgende Absatzfunktion zugrunde:

$B(t) = \frac{1}{10}(t+5)\, e^{-0,1t+5}$. Dabei gibt t die Zeit in Monaten nach der Einführung und B(t) die Absatzzahlen in Tausend Stück pro Monat an.

3.3.1 Zeigen Sie, dass der Gesamtabsatz der ersten z Monate nach der Markteinführung durch folgende Gleichung dargestellt werden kann:

$\int_0^z B(t)dt = e^{-0,1z+5}(-z-15) + 15e^5$ mit $z \in \mathbb{R}$ und $z \geq 0$

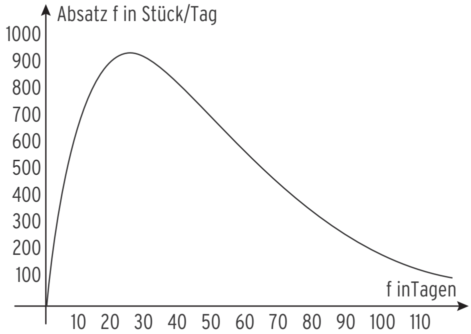
3.3.2 Berechnen Sie den Gesamtabsatz der ersten 20 Monate nach der Markteinführung.

3.3.3 Beurteilen Sie die durch B(t) prognostizierte Entwicklung des Gesamtabsatzes über eine sehr lange Zeit.

(Teile aus Berufskolleg 2011, NRW.)

Aufgabe 3 **Seite 1/2** **Lösung Seite 79/80**

Einige Wochen vor Beginn der WM kommt das Unternehmen Agrema auf die Idee ein WM Gesellschaftsspiel auf den Markt zu bringen. Daher wird der zu erwartende Absatz, also der Lebenszyklus des Produktes, untersucht.
Das Unternehmen vermutet einen exponentiellen Verlauf, der folgender Funktionsgleichung genügt: $f_{a,b}(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt}$; $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b > 0$.
Dabei sei durch die Variable t ($t \geq 0$) die Zeit in Tagen ab der Produkteinführung und durch $f_{a,b}(t)$ der Tagesabsatz in Stück pro Tag beschrieben.



Da sich das Spiel direkt auf WM-Spiele bezieht, soll durch einen erhöhten Werbeeinsatz das Spiel schnell auf dem Markt bekannt werden.

1 Das Unternehmen strebt an, bereits am 7. Tag einen Tagesabsatz von 500 Stück zu erreichen. Außerdem soll die Steigerung des Tagesabsatzes an diesem Tag noch 50 Stück/Tag betragen.

1.1 Zeigen Sie, dass sich für die erste Ableitung der Funktion f folgende Funktionsgleichung ergibt: $f'_{a,b}(t) = (a - a \cdot b \cdot t)e^{-bt}$.

1.2 Bestimmen Sie die Parameterwerte a und b auf drei Dezimalstellen genau.

2 Es hat sich gezeigt, dass die Funktion mit dem Parameterwert a = 100 den zu erwartenden Absatz gut darstellt. Rechnen Sie in den folgenden Aufgabenteilen mit a = 100. Also gilt $f_b(t) = 100 \cdot t \cdot e^{-bt}$

2.1 Zeigen Sie, dass zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{b}$ der Tagesabsatz maximal ist.

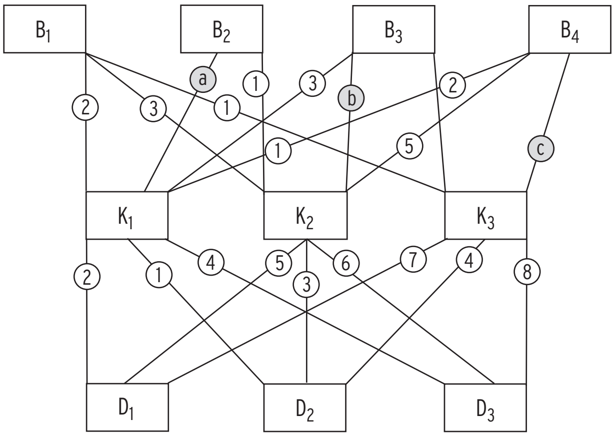
2.2 Bestimmen Sie b und den zugehörigen Zeitpunkt t für den Fall, dass der maximale Tagesabsatz bei 1 000 Stück/Tag liegt.

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 114**

Punkte

Die Druckfix GmbH stellt Drucker mit neuartiger Drucktechnik her. Verschiedene Abteilungen des Unternehmens beschäftigen sich mit der Analyse der Produktionssituation.
Im Hauptwerk der Druckfix GmbH werden in der ersten Produktionsstufe aus den vier Basisteilen B_1 bis B_4 die drei Komponenten K_1 bis K_3 gefertigt. Diese werden dann in einer zweiten Produktionsstufe gemäß dem Verflechtungsdiagramm zu den drei verschiedenen Druckern D_1 bis D_3 zusammengesetzt.



Weiterhin ist die Matrix C_{BD}, die die Anzahl der Basisteile je Drucker angibt, bekannt: $C_{BD} = \begin{pmatrix} 26 & 15 & 34 \\ 13 & 7 & 22 \\ 50 & 29 & 64 \\ 41 & 24 & 50 \end{pmatrix}$

1 Geben Sie die benötigte Anzahl der Basisteile je Komponente und die benötigte Anzahl der Komponenten je Drucker in Form von Matrizen A_{BK} und B_{KD} an. Berechnen Sie die fehlenden Parameter a, b und c. 9

2.1 Berechnen Sie die Inverse zur Komponenten-Drucker Matrix B_{KD} und zeigen Sie, dass sich die fehlenden Werte der Basisteile-Komponenten Matrix A_{BK} mit Hilfe dieser Inversen bestimmen lassen. 7

2.2 Beurteilen Sie, ob sich das Vorgehen aus 2.1 auf beliebige zweistufige Produktionsprozesse übertragen lässt. 2

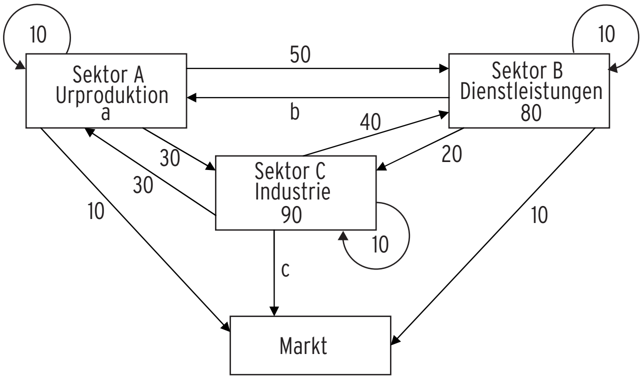
3 Bei der Druckerproduktion entstehen folgende variable Kosten:
Kosten der Basisteile:

	B_1	B_2	B_3	B_4
Kosten in Euro pro Basisteil	3	2	5	1

Aufgabe 10 **Lösung Seite 126**

Punkte

Drei Sektoren einer Volkswirtschaft sind nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten. Die Zusammenhänge sind in dem Verflechtungsdiagramm zu ersehen. Die Angaben erfolgen in Geldeinheiten (GE).



a) Bestimmen Sie die Parameter a, b und c .
   Nach den Ergebnissen der Marktforschung wird erwartet, dass zukünftig Güter und Dienstleistungen im Wert von 20,96 GE von Sektor A und jeweils 32,75 GE von Sektor B und C an den Markt abgegeben werden.
   Berechnen Sie den neuen Produktionsvektor und ermitteln Sie die prozentuale Produktionsveränderung der Sektoren B und C im Vergleich zur Ausgangssituation.

12

b) Absatzschwierigkeiten fordern, dass der Sektor B keine Güter und Dienstleistungen mehr an den Markt abgibt. Der Wert der Güter und Dienstleistungen in GE, den die beiden anderen Sektoren insgesamt produzieren, soll dann gleich groß sein.
   Berechnen Sie das Verhältnis zwischen den Marktabgaben des Sektors A und des Sektors C unter der Voraussetzung, dass die Technologiematrix

   $A = \frac{1}{360}\begin{pmatrix} 36 & 225 & 120 \\ 144 & 45 & 80 \\ 108 & 180 & 40 \end{pmatrix}$ lautet. 10

3 Stochastik

Formelsammlung zur Stochastik

Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$

Für das Gegenereignis $\overline{A}$: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Additionssatz $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Multiplikationssatz $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Zufallsvariable X: $e_i \rightarrow X(e_i) = x_i$

Erwartungswert: $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$

Varianz: $V(X) = (x_1 - (E(X))^2 \cdot P(X = x_1) + \ldots + (x_n - (E(X))^2 \cdot P(X = x_n)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Binomialverteilung B(n; p; k)

Die Zufallsgröße X ist **binomialverteilt:** $X \sim B_{n;\,p}$

Formel von Bernoulli $P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

Erwartungswert $\mu = E(X) = n \cdot p$

Varianz: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Kumulierte Binomialverteilung **F(n; p; k):**

Linksseitiges Intervall: $P(X \leq 8) = F(n; p; 8)$

Ablesen aus der Tabelle der **kumulierten Binomialverteilung**

Punktwahrscheinlichkeit: $P(X = 8) = B(n; p; 8)$

Ablesen aus der Tabelle der Binomialverteilung

Rechtsseitiges Intervall: $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$

Intervallwahrscheinlichkeit: $P(3 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 2)$

Hypothesentest (Signifikanztest):

Fehler 1. Art (α-Fehler): Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese H_0 abgelehnt wird, obwohl sie richtig ist.

Fehler 2. Art (β-Fehler): Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese H_0 nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist.

Die bei einem Test bzw. einer Untersuchung akzeptierte Wahrscheinlichkeit, bei einer Entscheidung einen Fehler 1. Art zu begehen, nennt man auch Signifikanzniveau α.

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung Stochastik

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 145**

Im Bereich Thermodruck verwendet die Druckfix GmbH neben den Walzen aus eigener Herstellung auch Walzen, die regional hergestellt werden und solche, die aus Asien importiert werden. Vor dem Einbau einer Walze durchläuft diese bei Druckfix eine Qualitätsanalyse. Defekte Walzen werden als Ausschuss aussortiert.
Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die jährliche Bezugsmenge, die Ausschussquote und den Bezugspreis

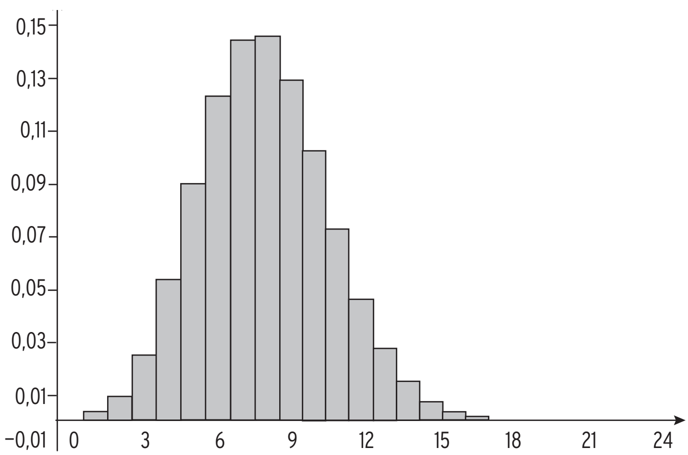
Herkunft	**Druckfix**	**Regional**	**Asien**
Bezugsmenge (Stück)	2000	3000	5000
Ausschussquote (%)	2	5	8
Bezugspreis (€/Stück)	49,98	39,37	18,69

1 Für die Preiskalkulation wird der Bezugspreis der defekten Walzen auf die intakten Walzen umgelegt.
Ermitteln Sie die jährliche Ausschussmenge, die Anzahl intakter Walzen und den durchschnittlichen Einstandspreis für eine intakte Walze.

2 Einer Lieferung aus Asien wird eine Stichprobe von 100 Walzen entnommen und hinsichtlich ihrer Qualität untersucht. Man kann davon ausgehen, dass die Verteilung der Zufallsgröße X: „Anzahl der defekten Walzen in der Stichprobe" binomialverteilt ist.

2.1 Bestimmen Sie den Erwartungswert der Verteilung und die Wahrscheinlichkeit, dass X tatsächlich den Erwartungswert annimmt.

2.2 Das folgende Histogramm zeigt die Verteilung der Zufallsgröße X.



Aufgabe 1 **Seite 2/2**

2.2 Prüfen Sie mit Hilfe des Histogramms folgende Aussagen der Qualitätsabteilung:

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 20 Walzen defekt sind, ist so gut wie Null.

B: Die Wahrscheinlichkeit, dass 9 Walzen defekt sind, ist größer als die von jeder anderen Anzahl defekter Walzen.

C: Es ist gleich wahrscheinlich 6 oder 9 defekte Walzen in der Stichprobe zu haben.

D: Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Walzen defekt sind, ist kleiner als 3%.

2.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Walzen defekt sind.

Gehen Sie im weiteren Verlauf von Lieferungen im Umfang von n = 100 und binomialverteilten Zufallsgrößen aus.

3 Es werden alle 100 Walzen einer regionalen Lieferung einer Qualitätsanalyse unterzogen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Defekt beträgt p = 0,05.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Höchstens 2 Walzen sind defekt.

B: Es gibt mindestens 3 defekte Walzen.

C: Es befinden sich mindestens 4 und höchstens 7 defekte Walzen in der Stichprobe.

D: In der Stichprobe befindet sich die erwartete Menge intakter Walzen.

E: Alle Walzen sind intakt.

(NRW Berufskolleg 2010.)

Aufgabe 2 **Lösung Seite 146**

Punkte

Der Küchenhersteller K-Küchen hat eine Luxus-Küche für das obere Preissegment entwickelt, die sich durch ein hochwertiges Schubladensystem, Echtholzfronten und eine patentierte Schrankbeleuchtung von den bisher produzierten Produktlinien unterscheidet. Von einem Zulieferer bezieht K-Küchen das neuartige Scharniersystem, bei dem sich die Schubladen nach nur leichter Berührung selbsttätig schließen.
Durchschnittlich sind 5 % der Scharniere defekt.

3.1 Die gelieferte Ware soll nur bei hinreichender Qualität angenommen werden. Der Küchenhersteller prüft vor der Warenannahme eine Stichprobe von 5 Kartons mit je 20 Scharnieren.

3.1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse: 6

E_1: In der Stichprobe von 100 Scharnieren befinden sich höchstens so viele defekte Scharniere, wie „zu erwarten" ist.

E_2: In einem zufällig ausgewählten Karton mit 20 Scharnieren befinden sich mehr als zwei defekte Scharniere.

3.1.2 Die Ware soll abgelehnt werden, wenn sich unter den 5 geprüften Kartons der Stichprobe mindestens ein Karton mit mehr als 3 defekten Scharnieren befindet. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Karton mehr als 3 defekte Scharniere enthalten sind, liegt bei ca. 1,59 %.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ablehnung der Lieferung. 5

3.2 Ermitteln Sie die Anzahl der mindestens zu testenden Scharniere, bei der mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens ein defektes Scharnier zu finden ist. 8

3.3 Vor der Auslieferung der Luxus-Küchen überprüft K-Küchen die Beleuchtungen. Erfahrungsgemäß funktionieren 10 % der Beleuchtungen nicht einwandfrei. Ein nachträglicher Austausch der defekten Beleuchtung kostet das Unternehmen 80 € pro Küche.
Ein Prüfgerät, das die Beleuchtungen bereits vor dem Einbau prüft, kann für 580 € erworben werden. Sein Einsatz kostet täglich 30 € und ein Austausch der als defekt eingestuften Beleuchtung kostet dann nur 20 €. Das Testgerät erkennt mit 99 %-iger Sicherheit eine defekte Beleuchtung, allerdings zeigt es auch bei 2 % der funktionierenden Beleuchtungen einen Defekt an.

3.3.1 Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm. 4

3.3.2 In 100 Tagen werden insgesamt 1000 Küchen produziert. 7
Beurteilen Sie, ob die Anschaffung des Testgeräts zu einer Kostenersparnis führt.

(Teile aus NRW Berufskolleg 2012.)

Aufgabe 3 **Seite 1/2** **Lösung Seite 148**

Punkte

Das Unternehmen Agrema AG fertigt unter anderem Fan-Fahnen für die Frauen-Weltmeisterschaft 2011.

2.1 Die Fahnen werden in 40er-Paketen an Shops in ganz Deutschland verkauft. Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl der minderwertigen Fahnen in einem Paket. Gehen Sie davon aus, dass X binomialverteilt ist. Der Mitarbeiter für Qualitätsanalyse erstellt für X ein Diagramm der kumulierten Wahrscheinlichkeiten (vgl. Abb. 1)

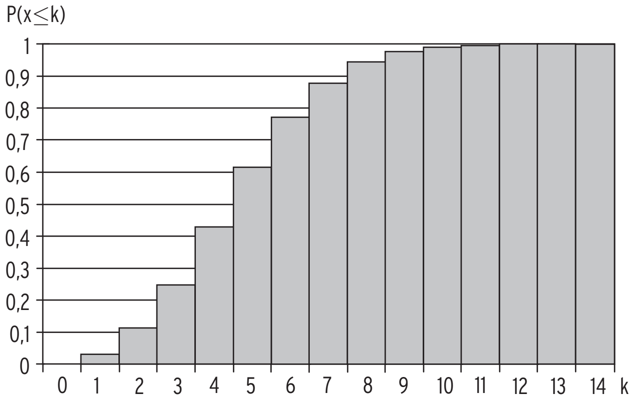


Abb. 1: Kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ für k minderwertige Fahnen von $n = 40$ Fahnen. Für alle k mit $k > 14$ beträgt die gerundete kumulierte Wahrscheinlichkeit 1

Beurteilen Sie anhand des vorgegebenen Diagrammes folgende Aussagen. 11

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Paket höchstens fünf Fahnen minderwertig sind, beträgt ca. 62 %.

B: Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Paket genau 4 Fahnen minderwertig sind, beträgt ungefähr 0,42.

C: Die Wahrscheinlichkeit, dass 13 oder 14 minderwertige Fahnen im Paket sind, ist annähernd gleich hoch.

D: Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zwei Fahnen minderwertig sind beträgt ca. 90%.

E: Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Paket mindestens zwei und höchstens sechs minderwertige Fahnen sind, beträgt ca. 55 %.

Aufgabe 3	**Seite 2/2**	**Punkte**

2.2 Genauere Untersuchungen der Qualität der Fahnen ergeben eine Ausschusswahrscheinlichkeit von 12,5%. Die Paketgröße soll auf 50 Fahnen aufgestockt werden. Es wird festgelegt, dass ein Paket nicht bezahlt werden muss, wenn sich darin mehr als 8 minderwertige Fahnen befinden.

2.2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein verkauftes Paket nicht berechnet wird. 4

2.2.2 Ermitteln Sie den Verkaufspreis eines Pakets, wenn das Unternehmen im Durchschnitt einen Paketpreis von 320 GE erzielen will. 4

2.2.3 Ein besonders interessierter Kunde möchte Fahnen aus der laufenden Produktion begutachten. Untersuchen Sie, wie viele Fahnen er entnehmen müsste, bis er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine minderwertige Fahne gezogen hat. 6

Die Agrema AG bezieht Rohpolyester für die Fahnen von dem Unternehmen CheijDong aus Taiwan. Nach Aussage des Unternehmens sind höchstens 4 % der Polyesterbahnen fehlerhaft und damit Ausschuss. Die Ware wird beim Eingang durch eine Stichprobe mit Umfang $n = 50$ überprüft.

2.3 Ermitteln Sie für $p = 0{,}04$ die zu erwartende Anzahl fehlerhafter Polyesterbahnen und die durchschnittlich zu erwartende Abweichung. 4

(NRW Berufskolleg 2011.)

Aufgabe 4 **Lösung Seite 149**

Ein Importeur von Elektroartikeln bietet preisgünstige Laptops an, die von einem asiatischen Unternehmen hergestellt werden.
Ein Elektronikfachmarkt bezieht diese Laptops. Nach Angaben des Importeurs sind die gelieferten Geräte zu 95 % fehlerfrei. Gehen Sie zur Vereinfachung beim Testen vom Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ aus.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der unter 20 Laptops

- kein Laptop,
- höchstens zwei Laptops,
- mindestens einer, aber weniger als fünf Laptops fehlerhaft sind.

Man möchte erreichen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % alle Laptops fehlerfrei sind. Ermitteln Sie, ab welchem Stichprobenumfang diese Bedingung nicht mehr erfüllt wird.

Aufgabe 5 **Lösung Seite 149**

Diagnostische Tests werden zum Erkennen von Krankheiten eingesetzt.
Für die Krankheit Maladia gibt es den diagnostischen Test T_1, der bei einer repräsentativen Personengruppe eingesetzt wurde und bei 12 % der getesteten Personen positiv ausfiel. Von dem Test T_1 weiß man, dass bei einer an Maladia erkrankten Person mit 85 % Wahrscheinlichkeit ein positives Testergebnis eintritt, dass aber auch bei einer nicht erkrankten Person mit 3 % Wahrscheinlichkeit ein positives Testergebnis eintritt. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine gestestete Person krank ist, ca. 11 % beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand mit einem positiven Testergebnis krank ist?

Aufgabe 6 **Lösung Seite 150**

Punkte

Die Cylenda AG ist wichtiger Zulieferer für die Zayoto Ltd.und stellt unter anderem in hoher Stückzahl Chips für Mobiltelefone her. Aufgrund von technischen Problemen wird davon ausgegangen, dass durchschnittlich 10 % der Chips fehlerhaft sind.
Alle produzierten Chips werden in Kartons zu je 50 Stück verpackt und ausgeliefert.

3.1 Bei einer Lieferung von Chips wird ein Karton untersucht.

3.1.1 Geben Sie die zu erwartende Anzahl defekter Chips in einem Karton an. 3

3.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl defekter Chips um höchstens 3 vom erwarteten Wert abweicht. 4

3.1.3 Ermitteln Sie die Mindestanzahl der Chips, die untersucht werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,95 mindestens ein defekter Chip dabei ist. 5

3.2 Für die Chips sind folgende Zahlungsmodalitäten vereinbart:
Aus einer Lieferung wird zunächst der Inhalt eines zufällig ausgewählten Kartons mit 50 Chips überprüft. Befinden sich darin höchstens fünf defekte Chips, so wird die gesamte Sendung angenommen und der volle Preis gezahlt. Sind genau sechs Chips defekt, so wird die Ware ebenfalls angenommen, jedoch wird für die gesamte Sendung nur 80 % des Preises gezahlt. Sind mehr als sechs Chips defekt, so wird die gesamte Lieferung abgelehnt und die Cylenda AG muss die Kosten für die Entsorgung in Höhe von 0,60 € pro Chip übernehmen.
Die Produktion eines Chips kostet die Cylenda AG 8,00 €.

3.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
A: Die Ware wird zum vollen Preis angenommen.
B: Die Ware wird zum reduzierten Preis angenommen.
C: Die Ware wird abgelehnt. 6

3.2.2 Ermitteln Sie den Preis pro Chip, damit der zu erwartende Gewinn je Chip bei 5,00 € liegt. 5

3.3 Eine Lieferung umfasst 2 000 Chips.

3.3.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Lieferung höchstens 215 Chips fehlerhaft sind. 3

3.3.2 Ermitteln Sie für die Anzahl der fehlerhaften Chips in einer Lieferung die Grenze k , die nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 überschritten wird. 3
(NRW Berufskolleg 2013.)

Aufgabe 7 **Lösung Seite 151**

Punkte

Der Pharmakonzern Harma AG stellt schmerzlindernde Präparate als klassische Tablette, Brausetablette, Granulat oder Kautablette her. Diese werden in drei Produktionsabteilungen gefertigt.

3.1 Niap vita wird in Form von Lutschpastillen angeboten, die zusätzlich noch Extrakte aus der Cranberry enthalten. Je 12 Pastillen werden in eine Primärverpackung mit Aromaschutzversiegelung verpackt. Die Verpackungsanlage arbeitet nicht immer zuverlässig. Bekannt ist, dass zwei voneinander unabhängige Fehler auftreten können: Es fehlen Pastillen (1,5 %) oder die Versiegelung ist undicht (3 %).

3.1.1 Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerfreie Primärverpackung bei annähernd 96 % liegt. 3

3.1.2 Untersuchen Sie, wie weit die Fehlerwahrscheinlichkeit bei der Versiegelung gesenkt werden müsste, um zu erreichen, dass die Verpackungsanlage insgesamt zu durchschnittlich 97,515 % fehlerfrei arbeitet. 4

3.2 Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass 96 % der Primärverpackungen in Ordnung sind und legen Sie eine binomialverteilte Zufallsgröße zugrunde.

3.2.1 Beurteilen Sie die folgende Behauptung der Qualitätsprüfer: „Wenn mindestens 75 Primärverpackungen geprüft werden, dann wird mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens eine Primärverpackung gefunden, die nicht in Ordnung ist.“ 5

3.2.2 Es werden je fünf Primärverpackungen in eine Schachtel verpackt, so dass diese 60 Pastillen *Niap Vita* enthalten soll. 4

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für eine einwandfreie Schachtel an.

3.3 Auf Grund des Einsatzes einer neuen Verpackungsmaschine ist eine Schachtel mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % fehlerfrei. Je 50 Schachteln kommen in ein Versandpaket für den Einzelhandel.

3.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Versandpaket höchstens zwei fehlerhafte Schachteln enthält. 4

3.3.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die zu erwartende Anzahl von Schachteln mit fehlerhaftem Inhalt in einem Versandpaket nicht überschritten wird. 4

3.3.3 Eine Apotheke bestellt ein Paket des Produktes Niap vita. Die Sendung wird reklamiert, wenn in diesem Paket mehr als drei Schachteln mit fehlerhaftem Inhalt aufgefunden werden.
Berechnen Sie hierfür die Wahrscheinlichkeit. 3

(NRW Berufskolleg 2014)

Aufgabe 8 Lösung Seite 152

Die LION GmbH, ein Hersteller für Sportartikel, fertigt große Mengen von Fahrradtrikots, die in den Farben rot, grün und gelb bedruckt werden. Dabei ist die Hälfte der hergestellten Fahrradtrikots rot, 23 % sind grün und der Rest gelb. Die Produktion der Trikots erfolgt in den zwei voneinander unabhängigen Arbeitsgängen „Nähen" und „Bedrucken". Obwohl man aus Erfahrung weiß, dass 7 % der Trikots nach dem Nähen einen Nähfehler aufweisen, werden **alle** Fahrradtrikots bedruckt. 95 % haben den dem Arbeitsgang „Bedrucken" keine Druckfehler.
Bei der Endkontrolle kommen die Trikots mit den unterschiedlichen Farben nacheinander in zufälliger Reihenfolge an. Zehn der nacheinander ankommenden Trikots werden betrachtet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

A: Mindestens sechs Trikots sind rot bedruckt
B: Die ersten sechs Trikots sind grün bedruckt
C: Höchstens zwei Trikots sind gelb bedruckt

Bei der Vermarktung interessieren im Wesentlichen einwandfreie Trikots. Dabei gilt, dass Trikots, die entweder Näh- oder Druckfehler haben, mit einem 30%igen Nachlass vom Preis eines fehlerfreien Trikots verkauft werden. Trikots mit Näh- und Druckfehlern sind Ausschuss, der Hersteller kann hierfür lediglich 1,50 € pro Trikot erzielen.
Berechnen Sie unter diesen Bedingungen den Preis für ein fehlerfreies Trikot, damit eine Tagesproduktion von 2250 Stück für 41242,50 € verkauft werden kann.
(Teile aus Abitur 2006, Fachgymnasium Niedersachsen.)

Aufgabe 9 **Lösung Seite 153**

Das Unternehmen Mobiltec produziert Handys mit integrierter Navigationsfunktion.

Außerdem hat es sich auf die Herstellung und den Vertrieb von Handyschalen spezialisiert.Die Handyschalen werden in Kartons zu je 100 Stück auch an den Großhandel verkauft. Untersuchungen haben ergeben, dass bei 10% aller produzierten Schalen Fehler in der Farbpigmentierung auftreten.

1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
A: In einem Karton befinden sich genau fünf Handyschalen mit fehlerhafter Farbpigmentierung.
B: In einem Karton weisen weniger als drei Handyschalen diesen Fehler auf.
C: In einem Karton sind mehr als sieben Handyschalen fehlerhaft.
D: Ein Karton enthält weniger als 90 fehlerfreie Handyschalen.

2 Vor dem Verlassen des Werkes werden die Handyschalen einer Endkontrolle unterzogen. Weisen Sie nach, dass mehr als 21 Handyschalen überprüft werden müssen, um mit mindestens 90%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine fehlerhafte Schale zu finden.

3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 kontrollierten Handyschalen die Anzahl der fehlerhaften Handyschalen um höchstens die Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.

4 Die Handyschalen werden nach der Herstellung in einer dreistufigen Kontrolle auf Mikrorisse geprüft und ggf. aussortiert. In der ersten Kontrollstufe wird dieser Fehler mit 70 %-iger Wahrscheinlichkeit, in der zweiten Kontrollstufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % und in der dritten Kontrolle mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % erkannt. Wird ein Riss bei der ersten Kontrolle entdeckt, so entstehen dem Unternehmen Mobiltec Kosten in Höhe von 0,75 €.
Wird dieser Fehler erst in der zweiten Kontrolle entdeckt, betragen die Kosten 1,50 €.

Wird ein Mikroriss jedoch erst in der dritten Kontrolle entdeckt, dann liegen die Kosten bei 5 €. Wenn ein Handy mit einem Mikroriss ausgeliefert wird, so wird es mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% reklamiert. Die Ersatzbeschaffung kostet 50 €.
Die Zufallsgröße X gibt die Kosten in Euro an, die eine Handyschale mit diesem Fehler verursacht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und die durchschnittlich zu erwartenden Kosten.

(NRW Berufskolleg 2011.)

Aufgabe 10 **Lösung Seite 154**

Eine Befragung hat ergeben, dass 40 % der Einwohner einer Kleinstadt einem Verein angehören. Zudem wurde festgestellt, dass 70 % aller Vereinsmitglieder männlichen Geschlechts sind. Von den Personen, die keinem Verein angehören, sind 65 % weiblich.
Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

- eine zufällig ausgewählte Person männlich ist,
- eine zufällig ausgewählte männliche Person einem Verein angehört.

Aufgabe 11 **Seite 1/2** **Lösung Seite 154**

Der Bausatz für das Regal „Vario II“ wird in zwei Produktionsstufen gefertigt.
Aus Erfahrung weiß man, dass in der ersten Produktionsstufe die Fehlerquote 12 % und in der zweiten 9,5 % beträgt. Die Fehler auf beiden Produktionsstufen treten unabhängig voneinander auf.

1 Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für einen fehlerhaften Regalbausatz ungefähr 0,2 beträgt.

2 Gehen Sie davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen fehlerhaften Regalbausatz $p = 0{,}2$ ist. Der laufenden Produktion wird eine Stichprobe von 10 Regalbausätzen entnommen.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die letzten zwei entnommenen Regalbausätze fehlerhaft sind.

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nur die beiden zuletzt entnommenen Regalbausätze fehlerhaft sind.

2.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in der Probe insgesamt zwei Regalbausätze fehlerhaft sind.

Aufgabe 11 **Seite 2/2**

3 Bei 11,5 % der Regalbausätze treten die beiden voneinander unabhängigen Fehlertypen A und B einzeln oder gemeinsam auf.
Fehlertyp A: „Der Regalbausatz weist Kratzer auf."
Fehlertyp B: „Die Bedienelemente des Regalbausatzes klemmen."

3.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler A, wenn bekannt ist, dass der Fehler B eine Wahrscheinlichkeit von 8,5% besitzt.

3.2 Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit nur einer der Fehler A oder B auftritt.

4 Bei der Endkontrolle der Regalbausätze wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % ein fehlerhafter Regalbausatz erkannt und zunächst aussortiert. In 1 % der Fälle wird ein einwandfreier Bausatz versehentlich aussortiert. Insgesamt weisen 3 % der Bausätze tatsächlich einen Fehler auf.

4.1 Berechnen Sie den Anteil der als einwandfrei ausgelieferten Regalbausätze.

4.2 Zeigen Sie, dass ein Grund für eine spätere berechtigte Reklamation durchschnittlich nur einmal unter 1600 ausgelieferten Regalbausätzen vorkommt.

4.3 Die Kosten der Endkontrolle betragen zurzeit 0,20 € pro Regalbausatz.
Eine berechtigte Reklamation verursacht Kosten in Höhe von 500 €.
Eine Verbesserung des Kontrollgeräts durch ein Zusatzmodul würde einmalig 450 € kosten und bei der Kontrolle des einzelnen Bausatzes Kosten in Höhe von 0,25 € verursachen. Allerdings würde laut Techniker das neue Modul dafür sorgen, dass durchschnittlich nur noch einmal unter 3200 Regalbausätzen eine berechtigte Reklamation vorkommt.
Im nächsten Jahr wird mit einer Produktion von 10000 Regalbausätzen gerechnet.Der Anteil der als einwandfrei ausgelieferten Regalbausätze beträgt beim alten Kontrollgerät ohne Zusatzmodul 96 % und beim verbesserten Kontrollgerät mit Zusatzmodul 95 %.
Beurteilen Sie, ob sich die Anschaffung des neuen Moduls für das nächste Jahr lohnt.
Gehen Sie davon aus, dass ungerechtfertigte Reklamationen vernachlässigbar geringe Kosten verursachen.
Weisen Sie nach, ab welcher Produktionsmenge sich eine Umstellung auf das neue Modul lohnt.
(Berufskolleg, NRW 2009)