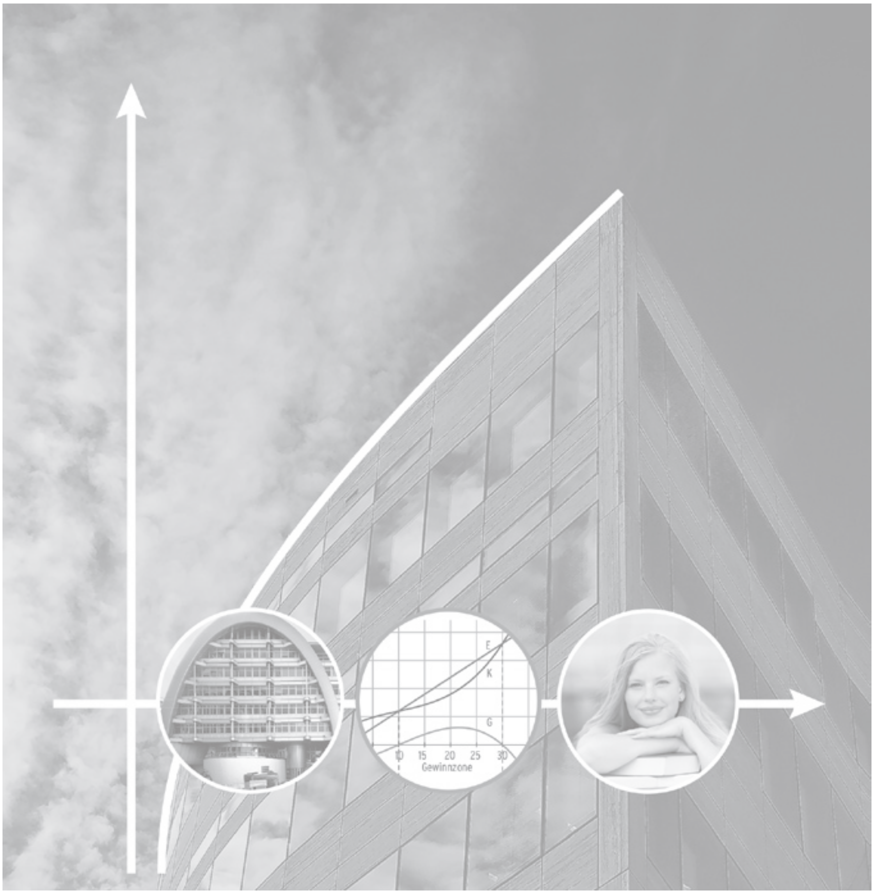
Ott

Abitur 2024 | *eA – GTR und CAS*

Nach den Vorgaben des Kerncurriculum 2018

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik an Beruflichen Gymnasien
– Wirtschaft, Gesundheit und Soziales

Niedersachsen



Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap

Die Verfasser:

Roland Ott
Oberstudienrat

Maria Krogmann
Oberstudienrätin

Umschlag: Kreis rechts: www. adpic.de

* * * * *

Quellennachweis der Prüfungsaufgaben: Niedersächsisches Kultusministerium

18. Auflage 2023

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0223-18
ISBN 978-3-8120-1047-4

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung wurde der neuen Prüfungsordnung für Berufliche Gymnasien in Niedersachsen 2024 angepasst. Sie richten sich an Schülerinnen und Schüler zur Vorbereitung auf das Abitur an Beruflichen Gymnasien mit den Fachrichtungen Wirtschaft sowie Gesundheit und Soziales im Kurs mit erhöhtem Anforderungsniveau (eA). Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung 2024 in Niedersachsen sind die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (BS, 2012) und das Kerncurriculum Mathematik für das berufliche Gymnasium (KC, 2018).
Aufgrund von Vereinbarungen der Länder im Zusammenhang mit der Entwicklung der gemeinsamen Abituraufgabenpools werden in Niedersachsen ab der Abiturprüfung im Jahr 2024 einige inhaltsbezogenen Kompetenzen zusätzlich vorausgesetzt. Diese sind vollumfänglich berücksichtigt:

- Funktion $\ln(x)$, $\sqrt{x}$ und deren Verschiebung, Streckung, Spiegelung
- Sinus im Prüfungsteil A
- Umkehrfunktion (Definitionsmenge/Wertemenge, Zusammenhang zwischen Funktion und Umkehrfunktion, Term ermitteln)
- Analytische Geometrie

Operatoren, die für das Fach Mathematik besondere Bedeutung haben, werden in der Tabelle Seite 58 erläutert und konsequent in Abiturarbeiten verwendet.
Im ersten Teil des Buches werden Aufgabentypen ohne Hilfsmittel vorgestellt, die in Pool 1 und 2 sowie in die Prüfungsgebiete Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie/Lineare Algebra unterteilt sind. Anschließend folgt ein neuer Aufgabenblock zur Prüfungsvorbereitung für den Prüfungsteil B mit Aufgaben zur Analytischen Geometrie die mit Hilfsmittel und CAS oder GTR gelöst werden. Im dritten Teil werden Abituraufgaben der letzten Jahre vorgestellt und ausführlich gelöst. Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.
Insgesamt sind die Aufgaben als Übungsaufgaben zu verstehen, sowohl im Umfang als auch in den Fragestellungen. Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten. Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.
Da die Aufgabensammlung allen Schülerinnen und Schüler bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.
Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Zentralabitur

Berufliches Gymnasium Wirtschaft, Gesundheit und Soziales

Erhöhtes Anforderungsniveau (eA), GTR bzw. CAS

Hinweise für den Prüfling für das Abitur 2024

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik besteht aus zwei Teilen: **Prüfungsteil A** **Prüfungsteil B**

Für das erhöhte Anforderungsniveau (eA) beträgt die gesamte Prüfungszeit 330 Minuten. Zu Prüfungsbeginn stehen den Prüflingen sowohl die Aufgaben des Prüfungsteils A als auch die Aufgaben des Prüfungsteils B zur Bearbeitung zur Verfügung. Die Prüflinge entscheiden selbst über den Zeitpunkt, zu dem sie die Bearbeitung des Prüfungsteils A abgeben und die Hilfsmittel erhalten.
Dieser Zeitpunkt muss auf erhöhtem Anforderungsniveau innerhalb der ersten 100 Minuten nach Prüfungsbeginn liegen.

Prüfungsteil A:

- Bearbeitung ohne digitale Mathematikwerkzeuge, ohne Formelsammlung. Als Hilfsmittel sind nur die üblichen Zeichenmittel zugelassen.
- Maximale Bearbeitungszeit: die ersten 100 Minuten.
- **4 Pflichtaufgaben** (2 aus Analysis und je 1 aus den anderen Sachgebieten)
  \+ **2 Wahlaufgaben** (je 2 aus jedem Sachgebiet zur Auswahl)
  = **6 Bearbeitungsaufgaben im Prüfungsteil A**
- Bei jeder dieser 6 Aufgaben können fünf Bewertungseinheiten (BE) erreicht werden. 30 BE von insgesamt 120 BE.

Prüfungsteil B:

Nach Abgabe der Unterlagen des Prüfungsteils A werden die Hilfsmittel an den Prüfling ausgegeben.

- Verbleibende Zeit der gesamten Prüfungszeit von 330 Minuten
- Die Prüflinge wählen aus jedem der 3 Sachgebiete jeweils eine von zwei Aufgaben aus.

Analysis 40 BE	Stochastik 25 BE	Lineare Algebra/Analytische Geometrie 25 BE
1A; 1B	2A; 2B	3A; 3B

- Erlaubte Hilfsmittel: Zeichenmittel; eingeführter Taschenrechner (mit Hand buch): GTR oder CAS; eingeführte Formelsammlung.

1 Prüfungsteil A: Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

Aufgaben zum Prüfungsteil A (Pool 1 und Pool 2)

POOL 1 Analysis

Lösungen Seite 24/25

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x} + 2$; $x \neq 0$. Das Schaubild von f hat im Punkt $P(1 \mid v)$ die Tangente t. Ermitteln Sie eine Gleichung von t.

Die Tangente t schneidet die x-Achse im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = ax^4 - x^2$, $a > 0$.

a) Bestimmen Sie $\int_0^1 f_a(x)dx$.

b) Die Graphen von f_a schneiden die x-Achse an den Stellen $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{a}}$; $x_{2,3} = 0$; $x_4 = \sqrt{\frac{1}{a}}$.
Bestimmen Sie a so, dass x_1 und x_4 den Abstand 4 haben.

Aufgabe 3

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 4

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1 \mid 1)$ ist der Hochpunkt des Schaubilds. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 5

K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{x-3} - 2$.

Die Tangente an K an der Stelle $x = 3$ schneidet die Asymptote von K in S.

Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 6

Die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 3x$; $x \in \mathbb{R}$, hat die Nullstellen $-1{,}5$, 0 und 2.

Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2}(x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx$.

Interpretieren Sie den Integralwert mit Hilfe geeigneter Flächenstücke.

Aufgabe 7

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 8

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4e^{2x} - 2$.

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(0{,}5) = -1$.

Aufgabe 9 Lösungen Seite 25/26

Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(1) $f(2) = 1$

(2) $f'(2) = 0$

(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$

(4) Für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 5$

Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat. Skizzieren Sie eine möglichen Verlauf des Graphen.

Aufgabe 10

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 11

Die täglichen Heizkosten eines Hauses werden durch k(t) dargestellt.

Dabei ist t die Zeit in Tagen seit dem 1. Januar 2020.

Was bedeutet $\int_0^{90} k(t)dt$ bzw. $\frac{1}{90} \int_0^{90} k(t)dt$?

Aufgabe 12

Die Entwicklung der Gesamtkosten der Produktion von Fahrrädern kann durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}5x^3 - 8x^2 + 45x + 70$ mit $D_K = [0; 13]$ beschrieben werden.

Berechnen Sie das Minimum der variablen Stückkosten und interpretieren Sie ihr Ergebnis.

POOL 1 Stochastik Lösungen Seite 26

Aufgabe 1

Ein Fußballspieler verwandelt erfahrungsgemäß 80 % aller Strafstöße.

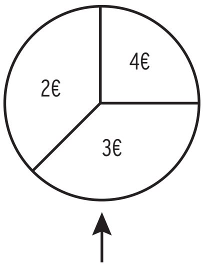
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er von vier Strafstößen
- nur den letzten?
- mindestens einen?

b) Für ein Ereignis C gilt: $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}8^b \cdot a^2$

Geben Sie geeignete Werte für a, b und k an. Beschreiben Sie das Ereignis C in Worten.

Aufgabe 2

Bei einem Glücksspiel wird das abgebildete Glücksrad benutzt. Als Einsatz bezahlt man 3 €. Das Glücksrad wird einmal gedreht. Man erhält den Betrag ausbezahlt, dessen Sektor über dem Pfeil zu stehen kommt. Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn.



Aufgabe 3

Eine Urne enthält 5 rote, 3 weiße und 2 gelbe Kugeln.

a) Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man keine gelbe Kugel?

b) Nun werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden Kugeln die gleiche Farbe?

Aufgabe 4 **Lösungen Seite 26**

Bei einer Lotterie führen 5 % der Lose zu einem Gewinn. Nils kauft 14 Lose. Geben Sie jeweils eine Aufgabenstellung an, deren Lösung auf die folgende Weise berechnet wird.

a) $P(A) = \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

b) $P(B) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{12} + \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

c) $P(C) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{14}$

d) $14 \cdot 0{,}05$

POOL 1 Lineare Algebra Lösungen Seite 26

Aufgabe 1

Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Es gelte $\vec{v}_{i+1}^{\,T} = \vec{v}_i^{\,T} \cdot A$ mit $i \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\vec{v}_2$.

b) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit den kleinstmöglichen Werten $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ so, dass $\vec{w}^{\,T} \cdot A = \vec{w}^{\,T}$ gilt.

Aufgabe 2

Betrachtet werden die Matrizen A und B mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ sowie eine Matrix C.

a) Zeigen Sie, dass B die zu A inverse Matrix ist.

b) Für die Matrix C gilt: $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Begründen Sie, dass gilt: $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1{,}5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4300 \\ 4250 \\ 4950 \end{pmatrix}$$

Ersetzen Sie die Zahl 1,5, sodass das geänderte LGS eindeutig lösbar ist mit $x_2 = 800$.

Aufgabe 4

Drei Betriebe B_1, B_2 und B_3 sind nach dem LEONTIEF-Modell miteinander verflochten. Die gegenseitige Belieferung und die Abgabe an den Markt betragen derzeit in ME:

	B_1	B_2	B_3	Konsum	Produktion
B_1	a	10	20	20	100
B_2	20	b	20	10	80
B_3	20	20	c	0	80

Bestimmen Sie die fehlenden Werte und berechnen Sie die Inputmatrix. In der nächsten Periode sollen folgende Mengen produziert werden: B_1 150 ME, B_2 100 ME und B_3 110 ME. Berechnen Sie den zugehörigen Konsumvektor.

Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung – Lösungen

POOL 1 Analysis

(Aufgaben Seite 6)

Aufgabe 1

$f(x) = \frac{2}{x} + 2;\ x \neq 0;\quad f'(x) = -\frac{2}{x^2};\ f'(1) = -2;\ f(1) = 4$

Tangente t im Punkt P(1 | 4): $y = -2x + c$

Punktprobe mit P ergibt: $4 = -2 + c \Leftrightarrow c = 6$

Gleichung von t: $y = -2x + 6$

Die Tangente t schneidet die x-Achse im Punkt S(3 | 0): $-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Aufgabe 2

a) $\int_0^1 f_a(x)dx = \int_0^1 (ax^4 - x^2)dx = \left[\frac{a}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{5}a - \frac{1}{3}$ $\quad (a > 0)$

b) Mit $x_1 < x_4$ gilt für den Abstand $x_4 - x_1 = \sqrt{\frac{1}{a}} - \left(-\sqrt{\frac{1}{a}}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{a}}$

Bedingung für Abstand 4: $2\sqrt{\frac{1}{a}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{a}} = 2$

Quadrieren: $\frac{1}{a} = 4$

Gesuchter a-Wert: $a = \frac{1}{4}$

Aufgabe 3

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4;\ f'(x) = -3x^2 + 6x - 1;\ f''(x) = -6x + 6$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $\quad -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Mit $f(1) = -3$ und $f'(1) = 2$ erhält man mit $y = mx + c$ die Tangente in W(1 | – 3):

$-3 = 1 \cdot 2 + c \Rightarrow c = -5$

Gleichung der Tangente: $y = 2x - 5$

Aufgabe 4

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c;\ f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen: $f(0) = 0 \quad \Leftrightarrow d = 0$

$f'(0) = 0 \quad \Leftrightarrow c = 0$

H(1 | 1) der Hochpunkt: $f(1) = 1 \quad \Leftrightarrow a + b + c + d = 1$

$f'(1) = 0 \quad \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0$

c und d eingesetzt: $a + b = 1$ und $3a + 2b = 0$

Additionsverfahren: $-b = -3 \Leftrightarrow b = 3$ $\quad$ Einsetzen ergibt $a = -2$.

Funktionsterm: $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Aufgabe 5

$f(x) = e^{x-3} - 2;\ f'(x) = e^{x-3}$

Mit $f(3) = -1$ und $f'(3) = 1 = m$ erhält man mit $y = mx + c$ die Tangente in P(3 | – 1):

$-1 = 1 \cdot 3 + c \Rightarrow c = -4$

Gleichung der Tangente: $y = x - 4$

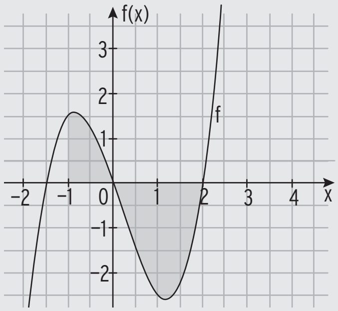
Schnitt mit der Asymptote: $y = -2$: $\quad -2 = x - 4 \Leftrightarrow x = 2$

Koordinaten von S(2 | – 2)

Lösungen POOL 1 Analysis

(Aufgaben Seite 6)

Aufgabe 6



$\int_{-1}^{2}(x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = -\frac{10}{3} + \frac{13}{12} = -\frac{9}{4}$

Das Flächenstück zwischen dem Graphen von f und der x-Achse oberhalb der x-Achse ist um 2,25 kleiner als das Flächenstück zwischen dem Graphen von f und der x-Achse unterhalb der x-Achse.

Aufgabe 7

Schnittstellen von f und g durch Gleichsetzen: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 3 = 2x$

Nullform: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Lösung mit Formel: $x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad x_{1|2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$

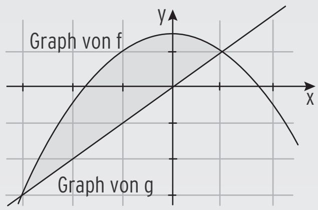
Schnittstellen = Integrationsgrenzen: $x_1 = -3;\quad x_2 = 1$

Integration von – 3 bis 1 über f(x) – g(x):

$\int_{-3}^{1}(f(x) - g(x))dx = \int_{-3}^{1}(-x^2 + 3 - 2x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x - x^2\right]_{-3}^{1}$

$= -\frac{1}{3} + 3 - 1 - (-\frac{1}{3}(-3)^3 + 3(-3) - (-3)^2) = \frac{32}{3}$

Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt $\frac{32}{3}$ FE.



Aufgabe 8

$f(x) = 4e^{2x} - 2$; Stammfunktion: $F(x) = 2e^{2x} - 2x + c;\ c \in \mathbb{R}$

Bedingung für c: $F(0{,}5) = -1$: $F(0{,}5) = 2e^1 - 1 + c = -1 \Leftrightarrow c = -2e$

Gesuchte Stammfunktion: $F(x) = 2e^{2x} - 2x - 2e$

Aufgabe 9

(Aufgaben Seite 7)

Bedeutung der Bedingungen:

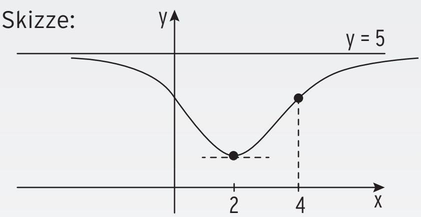
(1) $f(2) = 1$ Der Graph von f verläuft durch (2 | 1)

(2) $f'(2) = 0$ Der Graph von f hat in x = 2 eine waagrechte Tangente

(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$ Der Graph von f hat in x = 4 eine Wendestelle.

(4) Für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gilt:
$f(x) \to 5$
Der Graph von f hat eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung y = 5.

Skizze:



Aufgabe 10

Ableitung von f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$ mit der Produktregel und der Kettenregel

Mit $u(x) = 2x^2 + 5 \Rightarrow u'(x) = 4x$ und $v(x) = e^{-2x} \Rightarrow v'(x) = -2e^{-2x}$

Lösungen POOL 1 Analysis

(Aufgaben Seite 7)

Aufgabe 10: Fortsetzung

folgt durch Einsetzen in $f'(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$: $f'(x) = (2x^2 + 5) \cdot (-2e^{-2x}) + 4x\, e^{-2x}$

Zusammenfassen durch Ausklammern: $f'(x) = e^{-2x}\left((2x^2 + 5) \cdot (-2) + 4x\right)$

Erste Ableitung von f: $f'(x) = e^{-2x}\left(-4x^2 + 4x - 10\right)$

Aufgabe 11

$\int_0^{90} k(t)dt$: gesamte Heizkosten über 90 Tage seit dem 1. Januar 2020.

$\frac{1}{90} \int_0^{90} k(t)dt$: durchschnittliche tägliche Heizkosten über 90 Tage seit dem 1. Januar 2020.

Aufgabe 12

variable Stückkosten $k_v(x) = 0{,}5x^2 - 8x + 45$; $k_v'(x) = x - 8$; $k_v''(x) = 1 > 0$

Minimum der variablen Stückkosten: $k_v'(x) = 0$ für $x = 8$; $k_v(8) = 13$

Interpretation: Der minimale Verkaufspreis, bei dem bereits die fixen Kosten als Verlust in Kauf genommen werden, beträgt 13 GE/ME.

Lösungen POOL 1 Stochastik

Aufgabe 1

a) ● P(nur den letzten) = $0{,}2^3 \cdot 0{,}8 = 0{,}0064$

● P(mindestens einen) = 1 – P(keinen) = $1 - 0{,}2^4 = 0{,}9984$

b) $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}8^b \cdot a^2$ für $k = 2$; $a = 0{,}2$; $b = 8$

Ereignis C: Der Spieler hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 80 % und verwandelt 8 von 10 Strafstößen.

Aufgabe 2

x_i	2 €	3 €	4 €
Gewinn	– 1 €	0 €	1 €
$P(X = x_i)$	0,375	0,375	0,25

Erwartungswert für den Gewinn in €: $E(X) = -1 \cdot 0{,}375 + 1 \cdot 0{,}25 = -0{,}125$

Aufgabe 3

a) 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
P(keine gelbe Kugel) = $0{,}8^3 = 0{,}512$

b) 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen
P(gleiche Farbe) = P(rr) + P(ww) + P(gg) = $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{14}{45}$

Aufgabe 4

(Aufgaben Seite 8)

a) A: Nils zieht genau 3 Gewinnlose.

b) B: Nils zieht 2 oder 3 Gewinnlose.

c) C: Nils gewinnt mindestens einmal. $P(C) = 1 - P(X = 0) = P(X \geq 1)$

d) Durchschnittlich zu erwartende Anzahl von Gewinnlosen unter 14 Losen

2 Prüfungsteil B der Abiturprüfung – Analytische Geometrie –

Formelsammlung

neu im Abi'24

Analytische Geometrie

In der (zweidimensionalen) **Ebene** sind die Punkte $A(a_1|a_2)$ und $B(b_1|b_2)$ gegeben.

Ortsvektor von A: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

Betrag (Länge des Vektors) von $\overrightarrow{OA}$: $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Im (dreidimensionalen) **Raum** sind die Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ gegeben.

Ortsvektor von A: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Betrag (Länge des Vektors) von $\overrightarrow{OA}$: $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **kollinear** (parallel) wenn gilt: $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$; $k \in \mathbb{R}$

Einheitsvektor $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$

Länge der Strecke *AB* $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Mittelpunkt *M* einer Strecke *AB* $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

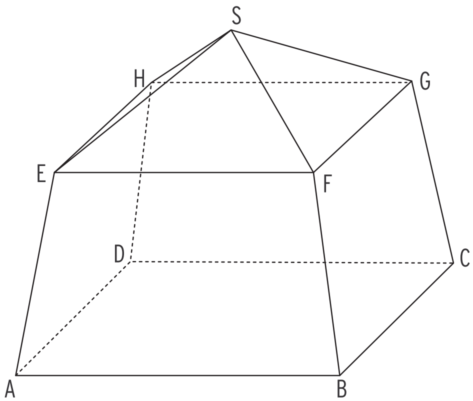
Orthogonalität $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

Aufgaben zu Analytischer Geometrie

Prüfungsaufgaben mit GTR/CAS

Aufgabe 1 Lösung Seite 52

Eine Verpackung für Schokotrüffel hat die Form eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfes mit einer aufgesetzten geraden quadratischen Pyramide als Deckel.
Die Kantenlänge $\overline{AB}$ des Pyramidenstumpfs beträgt 10 cm, die Kantenlänge $\overline{EF}$ seiner Deckfläche 8 cm.
Der Pyramidenstumpf ist 6 cm hoch.
Insgesamt hat die Verpackung eine Höhe von 9 cm. 1 LE = 1 cm



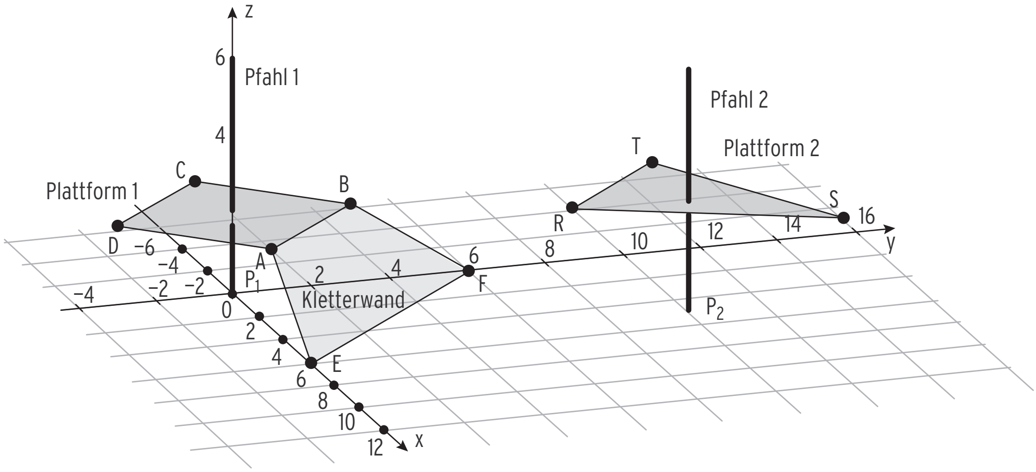
a) Die Punkte B(10|10|0), D(0|0|0) und F(9|9|6) sind Eckpunkte des Pyramidenstumpfes. Die Spitze der aufgesetzten Pyramide ist S(5|5|9).
Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte A, E und H an.

b) Ermitteln Sie die Größe des Winkels γ, den die Seitenwand ABFE mit der Grundfläche ABCD einschließt.

Berechnen Sie den größten Abstand zweier Punkte innerhalb der Verpackung.

Aufgabe 2 Lösung Seite 53

Die Abbildung zeigt modellhaft wesentliche Elemente einer Kletteranlage: zwei Plattformen, die jeweils um einen vertikal stehenden Pfahl gebaut sind, sowie eine Kletterwand, die an einer der beiden Plattformen angebracht ist.



Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-y-Ebene den horizontalen Untergrund; eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit. Die Punkte, in denen die Pfähle aus dem Untergrund austreten, werden durch $P_1(0|0|0)$ und $P_2(5|10|0)$ dargestellt. Außerdem sind die Koordinaten der Eckpunkte $A(3|0|2)$, $B(0|3|2)$, $E(6|0|0)$, $F(0|6|0)$, $R(5|7|3)$, $S(8|13|3)$ und $T(2|10|3)$gegeben.
Die Materialstärke aller Bauteile der Anlage soll vernachlässigt werden.

a) In den Mittelpunkten der oberen und unteren Kante der Kletterwand sind die Enden eines Seils befestigt, das 20% länger ist als der Abstand der genannten Mittelpunkte. Berechnen Sie die Länge des Seils.

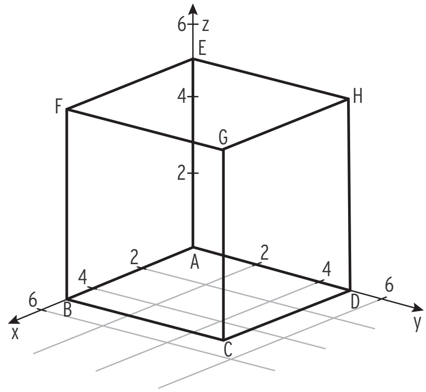
b) Zeigen Sie, dass die Kletterwand die Form eines Trapezes hat, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

c) Die Mittelpunkte der oberen und unteren Kante der Kletterwand sind M_1 und M_2.

Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Vektoren $\overrightarrow{M_1 M_2}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ einschließen. Beschreiben Sie den Winkel.

Aufgabe 3 Lösung Seite 54

Die Abbildung zeigt den Würfel ABCDEFGH mit G(5|5|5) und H(0|5|5) in einem kartesischen Koordinatensystem.
Die Punkte I(5|0|1), J(2|5|0), K(0|5|2) und L(1|0|5) liegen jeweils auf einer Kante des Würfels.



a) Zeichnen Sie das Viereck IJKL in die Abbildung ein.

b) Begründen Sie, dass das Viereck IJKL ein Trapez ist, in dem zwei Seiten gleich lang sind.
Weisen Sie nach, dass die Seite $\overline{IL}$ des Trapezes doppelt so lang ist wie die Seite $\overline{JK}$.

c) Berechnen Sie die Größe eines Innenwinkels des Trapezes IJKL.

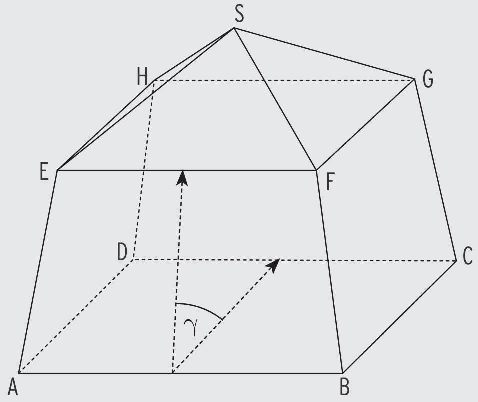
Aufgabe 4 Lösung Seite 54

Gegeben sind die Punkte A (4 | 0 | 1), B (4 | 5| 1) und C (1 | 0 | 5).
Beweisen Sie: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und rechtwinklig.
Bestimmen Sie einen Punkt P so, dass die Punkte A, B, C und P die Eckpunkte eines Quadrates sind.

Lösungen Analytische Geometrie

Aufgabe 1

Aufgabe Seite 46



a) $|\overline{AB}| = 10$, $|\overline{EF}| = 8$ $h_{PS} = 6$; $h_V = 9$
B(10|10|0), D(0|0|0); F(9|9|6) ; S(5|5|9)
Koordinaten der Eckpunkte
A(10| 0|0); E(9|1|6); H(1|1|6)

b) Winkel γ zwischen Seitenwand ABFE und ABCD (Grundebene = xy-Ebene) entspricht dem Winkel zwischen den Verbindungsvektoren der Seitenmitten

$$\vec{a}_{ABFE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad \vec{b}_{ABCD} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Formel mit cos: $\cos(\gamma) = \dfrac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{37}} \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{37}}\right) \approx 80{,}5°$

Die Seitenwand ABFE schließt mit der Grundfläche ABCD einen Winkel von etwa 80,5° ein.
Der größte Abstand zweier Punkte innerhalb der Verpackung
besteht zwischen einem Eckpunkt z. B. D und dem diagonal liegenden Eckpunkt z. B. F

$$|\overrightarrow{DF}| = \left|\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9^2 + 9^2 + 6^2} = \sqrt{198} \approx 14{,}1$$

Der größte Abstand zweier Punkte innerhalb der Verpackungbeträgt etwa 14,1 cm.

Aufgabe 2 Aufgabe Seite 47

a) Die Mittelpunkte von $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$ sind $M_1(1{,}5|1{,}5|2)$ und $M_2(3|3|0)$.

$$\left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1{,}5^2 + 1{,}5^2 + (-2)^2} \approx 2{,}9$$

Seillänge: $l = 1{,}2 \cdot 2{,}9 = 3{,}5$

Das Seil ist etwa 3,5 m lang.

b) Für die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}$ gilt: $2 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

also sind $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$ parallel.

Es ist $\left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{13}$ und $\left|\overrightarrow{BF}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{13}$, also haben $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ die gleiche Länge.

c) Mit einem Vektor $\overrightarrow{M_1 M_2} = \begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\-2\end{pmatrix}$ und einem Vektor der x-y-Ebene z. B. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ergibt sich:

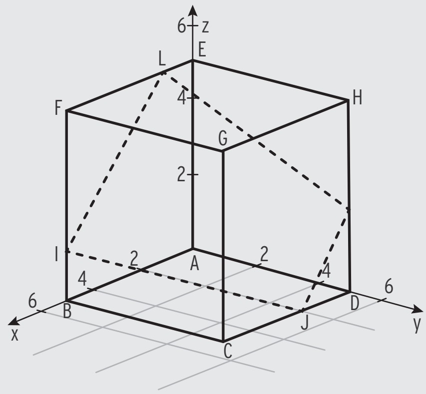
$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\-2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\frac{\sqrt{34}}{2} \cdot \sqrt{2}} \approx 0{,}7276$$

$\alpha = \cos^{-1}(0{,}7276) \approx 43°$

Die Kletterwand steht mit dem Untergrund in einem Winkel von 43°

(bzw. einen Winkel von 137°).

Aufgabe 3 Aufgabe Seite 48



Punkte des Würfels:
I(5|0|1), J(2|5|0), K(0|5|2) ,L(1|0|5)

a) Viereck IJKL in der Abbildung

b) $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\left|\overrightarrow{IJ}\right| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \left|\overrightarrow{KL}\right|$

$\overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{JK}$

d.h. $\overline{IL}$ ist doppelt so lang wie $\overline{JK}$ und die beiden Seiten sind parallel zueinander.

c) Der Innenwinkel mit dem Scheitel L wird mit α bezeichnet.

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{LI}}{\left|\overrightarrow{LK}\right| \cdot \left|\overrightarrow{LI}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{8}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{32}}$$, also $\alpha \approx 76°$

Aufgabe 4 Aufgabe Seite 48

Seitenlängen:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(4-4)^2 + (5-0)^2 + (1-1)^2} = 5$

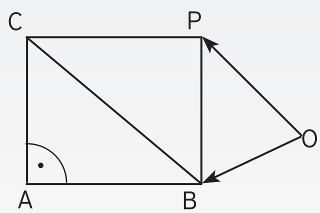
$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(1-4)^2 + (5-1)^2} = 5$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(1-4)^2 + (0-5)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{50}$

Zwei Seiten sind gleichlang, also ist das Dreieck gleichschenklig.
Der Satz des Pythagoras ist erfüllt: $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$
Das Dreieck hat einen rechten Winkel bei A.

Es gilt: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Der Punkt P(1 | 5 | 5) ergänzt das Dreieck zu einem Quadrat.



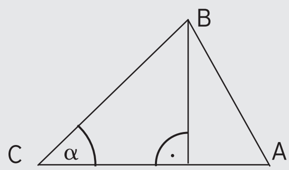
Bemerkung: $\overrightarrow{AB}$ verläuft parallel zur x_2-Achse.
P lässt sich auch mit Hilfe einer Skizze bestimmen.

Aufgabe 5 Aufgabe Seite 49

a) Der Winkel des Sonnensegels bei C wird eingeschlossen von $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$.

Mit $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|} = \frac{68}{\sqrt{89}\,\sqrt{74}} = 0{,}84$$



Schnittwinkel $\alpha = 33{,}1°$

Flächeninhalt des Sonnensegels

Höhe im Dreieck:

$\sin\alpha = \frac{h}{\overline{CB}} \Rightarrow h = \sin\alpha \cdot \overline{CB} = \sin 33{,}1° \cdot \sqrt{89}$

Flächeninhalt:

$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h = \frac{1}{2}\sqrt{74} \cdot \sin 33{,}1° \cdot \sqrt{89} = 22{,}16$

Der Flächeninhalt des Sonnensegels beträgt ca. 22,16 m^2.

b) Die Lichtstrahlen treffen senkrecht auf das Sonnensegel, wenn

der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -16 \\ -5 \\ -41 \end{pmatrix}$ senkrecht auf $\overrightarrow{CA}$ und auf $\overrightarrow{CB}$ steht.

$\begin{pmatrix} -16 \\ -5 \\ -41 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{CA} = -16 \cdot (-7) + (-5) \cdot 6 + (-41) \cdot 2 = 0$ und $\begin{pmatrix} -16 \\ -5 \\ -41 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

Aufgabe 6 Aufgabe Seite 50

a) Koordinaten der Eckpunkte des Vordaches:

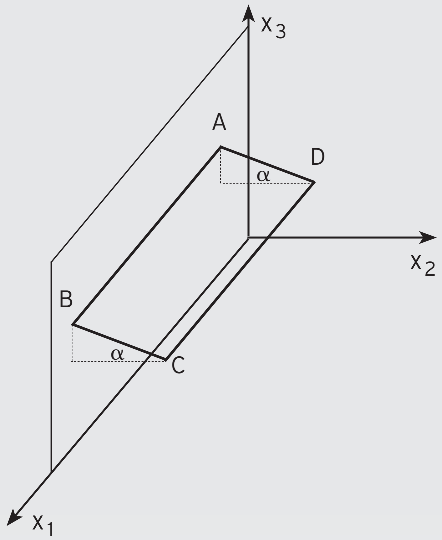
A(0,5 | 0 | 3); B(9,5 | 0 | 3);

C(9,5 | 2 | 2,5); D(0,5 | 2 | 2,5)

Neigungswinkel des Vordaches:

$\tan(\alpha) = \frac{0{,}5}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha \approx 14{,}04°$

(Winkel der Strecke AD zur Waagrechten)



b) Länge der Drahtseile

Hakenposition: H(5 | 0 | 5);

$\overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{HD} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{HD}| = \sqrt{4{,}5^2 + 4 + 2{,}5^2} = \sqrt{30{,}5} \approx 5{,}52$

Die Länge eines Drahtseiles beträgt ca. 5,52 m.

Winkel zwischen den Drahtseilen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}}{30{,}5} = \frac{-10}{30{,}5} \Rightarrow \alpha \approx 109{,}4°$$

c) Für den Richtungsvektor der Stangen gilt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = 0$

d. h. der Richtungsvektor der Stangen steht senkrecht auf den

Richtungsvektoren der Ebene E.

Die Stangen verlaufen also rechtwinklig zum Vordach.

Verankerungspunkt in der x_1x_2-Ebene: $S_1(0{,}5 \mid 1{,}375 \mid 0)$

zu zeigen: $\overrightarrow{S_1D} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ Mit $\overrightarrow{S_1D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}625 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ ergibt sich $k = 0{,}625 = \frac{5}{8}$

Länge der Stangen: $\frac{5}{8}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \frac{5}{8}\sqrt{17} \approx 2{,}58$

Die Stangen sind etwa 2,58 m lang.

3 **Zentralabitur** Mathematik eA an beruflichen Gymnasien zur Vorbereitung auf das Abitur 2024

Operatorenliste

Operator	Erläuterung
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
herleiten	Aus bekannten Sachverhalten oder Aussagen muss nach gültigen Schlussregeln mit Berechnungen oder logischen Begründungen die Entstehung eines neuen Sachverhaltes dargelegt werden. In einer mehrstufigen Argumentationskette können Zwischenschritte mit digitalen Mathematikwerkzeugen durchgeführt werden – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen. Für die Berechnung der Extrempunkte einer Funktion f ist es beispielsweise nicht zulässig, diese direkt aus dem Graphen von f abzulesen.
bestimmen, ermitteln	Ein möglicher Lösungsweg muss dargestellt und das Ergebnis formuliert werden. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
klassifizieren	Eine Menge von Objekten muss nach vorgegebenen oder selbstständig zu wählenden Kriterien in Klassen eingeteilt werden. Eine Begründung der vorgegebenen bzw. selbstgewählten Kriterien wird ggf. gesondert gefordert.

Operator	Erläuterung
vergleichen	Sachverhalte, Objekte oder Verfahren müssen gegenübergestellt und Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede müssen festgestellt werden. Ggf. müssen Vergleichskriterien festgelegt werden. Eine Bewertung wird ggf. gesondert gefordert.
untersuchen	Eigenschaften von oder Beziehungen zwischen Objekten müssen herausgefunden und dargelegt werden. Je nach Sachverhalt kann zum Beispiel ein Strukturieren, Ordnen oder Klassifizieren notwendig sein. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

Angepasster Prüfungsteil A
zur Vorbereitung auf das Abitur 2024

Prüfungsteil A:

- Bearbeitung ohne elektronische Hilfsmittel, ohne Formelsammlung.
  Als Hilfsmittel sind nur die üblichen Zeichenmittel zugelassen.
- Maximale Bearbeitungszeit: die ersten 100 Minuten.
- **4 Pflichtaufgaben** (2 aus Analysis und je 1 aus den anderen Sachgebieten)
  \+ **2 Wahlaufgaben** (je 2 aus jedem Sachgebiet zur Auswahl)
  = **6 Bearbeitungsaufgaben im Prüfungsteil A**
- 25 % der erreichbaren Bewertungseinheiten (BE), 30 BE von insgesamt 120 BE.

Um diesen neuen Anforderungen gerecht zu werden, wurde der Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel) für alle folgenden Abiturjahrgänge 2018 bis 2023 so gestaltet, wie er in der **Abiturprüfung 2024** dem Prüfling vorliegt:

- **4 Pflichtaufgaben** (2 aus Analysis und je 1 aus den anderen Sachgebieten)
- **6 Wahlaufgaben** (je 2 aus jedem Sachgebiet zur Auswahl)

Die Autoren wünschen viel Erfolg.

Zentralabitur 2018 **Mathematik** **Berufliches Gymnasium**

– In Anlehnung an die Prüfungsbedingungen 2024 –

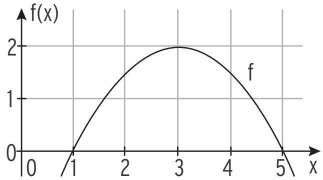
Prüfungsteil A

Lösungen Seite 78- 81

Pflichtaufgaben

Aufgabe P1

Die Abbildung zeigt den Graphen einer quadratischen Funktion f.



a) Geben Sie eine Gleichung der Funktion f an. (2 BE)

b) Gegeben sind die beiden Terme

(I) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$ und (II) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{f(4) - f(x)}{4 - x}$; $x \neq 4$

Beschreiben Sie ihre jeweilige Bedeutung in Bezug auf den Graphen von f (2 BE)

c) Veranschaulichen Sie den Wert des Terms $4 \cdot 2 - \int_1^5 f(x)dx$. (2 BE)

Aufgabe P2

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x}$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$.

a) Gegeben ist die Gleichung $\frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} = \frac{2}{a}$.

Bestimmen Sie eine Lösung für x. (2 BE)

b) Bestimmen Sie alle Werte für a so, dass der vertikale Abstand der Graphen von f_a und f_a' an der Stelle $x = 0$ mindestens 3 beträgt. (3 BE)

Aufgabe P3

a) Betrachtet werden die Matrizen A, B, C und D.

A hat 3 Zeilen und 7 Spalten, d.h. das Format von A ist 3×7.

B hat das Format 7×2 und $D = A \cdot B \cdot C$ hat das Format 3×4.

Geben Sie das Format der Matrix C an. (1 BE)

b) Gegeben sind die Matrizen

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a\,(a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $Z = \begin{pmatrix} 9 & b^2 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

Es gilt: $Z = X \cdot Y$.

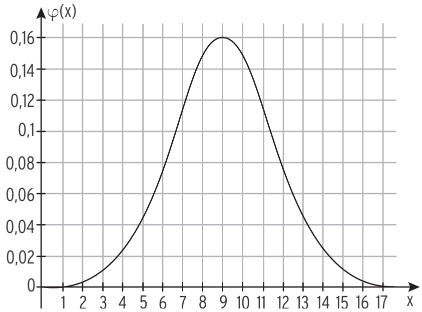
Bestimmen Sie alle möglichen Werte für a, b und c. Geben Sie die Anzahl der Lösungen der Form (a; b; c) an. (2 BE)

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

– In Anlehnung an die Prüfungsbedingungen 2024 –

Aufgabe P4

Gegeben ist die Dichtefunktion φ einer normalverteilten Zufallsgröße X mit einer Standardabweichung $\sigma_X = 2{,}5$
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wird durch $P(6{,}5 \leq X \leq 11{,}5)$ beschrieben.



a) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A in der Abbildung grafisch dar.
Geben Sie den Erwartungswert μ_X an. (2 BE)

b) Eine Zufallsgröße Y ist normalverteilt mit $\mu_Y = 7$ und $\sigma_Y = 1{,}25$. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses B wird durch $P(4{,}5 \leq Y \leq 9{,}5)$ beschrieben.
Untersuchen Sie, welches der beiden Ereignisse A oder B eine größere Wahrscheinlichkeit aufweist. (3 BE)

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

– In Anlehnung an die Prüfungsbedingungen 2024 –

Prüfungsteil A Wahlaufgaben

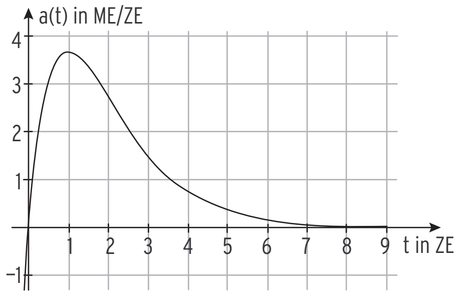
Bearbeiten Sie zwei der sechs Wahlaufgaben W1 bis W6.

Aufgabe W1

Die PRINTFIX AG fertigt innovative und hochwertige 3D-Drucker. Der momentane Absatz in Mengeneinheiten pro Zeiteinheit (ME/ZE) kann durch den Graphen a des Produktlebenszyklus $a(t) = 10t \cdot e^{-t}$ mit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschrieben werden.

a) Skizzieren Sie den Graphen der momentanen Absatzveränderung in das nebenstehende Koordinatensystem. (2BE)

b) Bestimmen Sie ausschließlich mit Hilfe der notwendigen Bedingung den Zeitpunkt, an dem die PRINTFIX AG die meisten 3D-Drucker pro ZE absetzt. (3 BE)

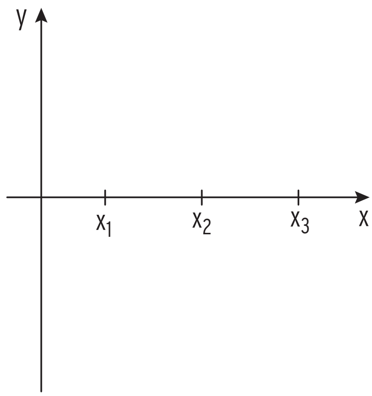


Aufgabe W2

Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f′ und zweiter Ableitungsfunktion f″ hat folgende Eigenschaften:

- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
- Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
- f′ hat ein Minimum an der Stelle x_3 .

Die Abbildung zeigt die Positionen von x_1, x_2 und x_3 .



a) Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist. (2 BE)

b) Skizzieren Sie in der Abbildung einen möglichen Graphen von f. (3 BE)

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium
Prüfungsteil Wahlaufgaben

Aufgabe W3

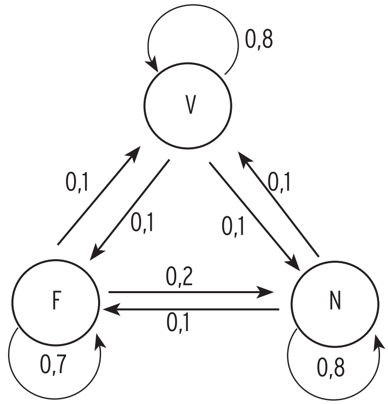
Betrachtet wird ein Dreieck ABC mit $A(0 \mid 0 \mid 0)$ und $B(3 \mid 5 \mid -4)$. Das Dreieck hat die folgenden Eigenschaften:

- Das Dreieck ist sowohl gleichschenklig als auch rechtwinklig.
- $\overline{AB}$ ist eine Kathete des Dreiecks.
- Die zweite Kathete des Dreiecks liegt in der x_1x_3-Ebene.

Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punkts, der für C infrage kommt. (5 BE)

Aufgabe W4

Die Nutzer einer Kantine werden hinsichtlich der Auswahl eines Menüs in drei Gruppen eingeteilt: Esser des Nudelgerichts (N), Esser des Fleischgerichts (F) und Esser des vegetarischen Gerichts (V).
Der abgebildete Graph gibt modellhaft die Übergänge zwischen den Gruppen von Tag zu Tag an. Es soll davon ausgegangen werden, dass die Gesamtanzahl der Nutzer der Kantine konstant bleibt.



a) Geben Sie die in der zugehörigen Übergangsmatrix M fehlenden Werte an:

$$M = \begin{pmatrix} \square & 0{,}2 & \square \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ \square & 0{,}1 & \square \end{pmatrix}$$ (2 BE)

b) Geben Sie den Wert a_{21} der Matrix $M^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ an.

Interpretieren Sie diesen Wert. (3 BE)

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

– **In Anlehnung an die Prüfungsbedingungen 2024** –

Prüfungsteil A Wahlaufgaben

Aufgabe W5

Die vier Seiten eines regelmäßigen Tetraeders sind mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 durchnummeriert. Das Tetraeder wird fünfmal geworfen.

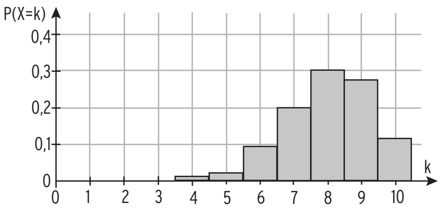
a) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ berechnet werden kann, und begründen Sie Ihre Angabe. (2 BE)

b) Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass jede Zahl mindestens einmal erzielt wird. (3 BE)

Aufgabe W6

Ein Basketballspieler wirft 10 Freiwürfe. Die Anzahl seiner Treffer wird mit k bezeichnet und durch die Zufallsgröße X beschrieben. Die Zufallsgröße X wird als binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,8 angenommen.

In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.



a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Basketballspieler mindestens 8-mal trifft. (2 BE)

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, keinen Treffer zu erzielen, kleiner als $\frac{1}{1\,000\,000}$ ist. (3 BE)

Lösungen Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium

Lösungen Prüfungsteil A

Pflichtaufgaben

Aufgaben Seite 60

Aufgabe P1

a) Linearfaktordarstellung (Nullstellenansatz): $f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Mit den Nullstellen (abgelesen): $x_1 = 1;\ x_2 = 5$

Punktprobe mit S(3 | 2): $2 = a \cdot (3 - 1) \cdot (3 - 5) \Rightarrow a = -0{,}5$

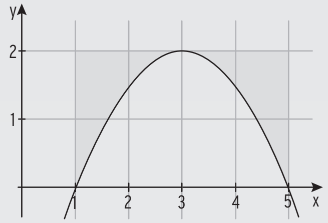
Mögliche Funktionsgleichung: $f(x) = -0{,}5(x - 1) \cdot (x - 5)$

Hinweis: Ansatz mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ und Einsetzen von 3 Punkten (1 | 0); (5| 0),(3| 2) führt über ein LGS auf $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5$

Ansatz mit $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ und Einsetzen von Scheitelpunkt S(3| 2) und P(1 | 0) führt auf $f(x) = -0{,}5(x - 3)^2 + 2$

b) Der erste Term beschreibt die durchschnittliche Steigung des Graphen von f im Intervall [1; 3] (Sekantensteigung).

Der zweite Term beschreibt die Steigung des Graphen von f an der Stelle 4 (Tangentensteigung).



c) Einzeichnen eines möglichen Flächenstücks.

Aufgabe P2

a) Gleichung $\frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} = \frac{2}{a}$ auflösen nach x: $e^{a \cdot x} = 2$

Logarithmieren $a \cdot x = \ln(2) \Rightarrow x = \frac{\ln(2)}{a}$

b) Ableitung von f_a mit der Kettenregel: $f_a'(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} \cdot a = e^{a \cdot x}$

Vertikaler Abstand in x = 0: $f_a(0) - f_a'(0) = \frac{1}{a} - 1 \qquad (e^{a \cdot 0} = 1)$

Ungleichung für a: $\frac{1}{a} - 1 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{a} \geq 4 \quad | \cdot a$

$4a \leq 1 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{4} \qquad (0 < a < 1)$

Für $0 < a \leq \frac{1}{4}$ beträgt der gesuchte vertikale Abstand mindestens 3.

Aufgabe P3

a) Die Gleichung $D = A \cdot B \cdot C$ mit den entsprechenden Matrizenformaten:

$D_{(3;\,4)} = A_{(3;\,7)} \cdot B_{(7;\,2)} \cdot C_{(x;\,y)}$

x gibt hierbei die Zeilenanzahl, y die Spaltenanzahl der Matrix C an.

Da die Spaltenanzahl der Matrix B mit der Zeilenanzahl der Matrix C übereinstimmen muss, gilt x = 2. Die Spaltenanzahl der Matrix D muss der Spaltenanzahl der Matrix C entsprechen. Somit gilt y = 4.

Ingesamt hat C also das Format 2×4.

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium
Lösungen Prüfungsteil A

Pflichtaufgaben

Aufgabe P3 Fortsetzung .

b) $X \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a\,(a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 + 2a \cdot (a-1) + 3c & 10 + c \end{pmatrix}$

Wegen $Z = X \cdot Y$ muss dies Z entsprechen:

$\begin{pmatrix} 9 & b^2 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 + 2a \cdot (a-1) + 3c & 10 + c \end{pmatrix}$

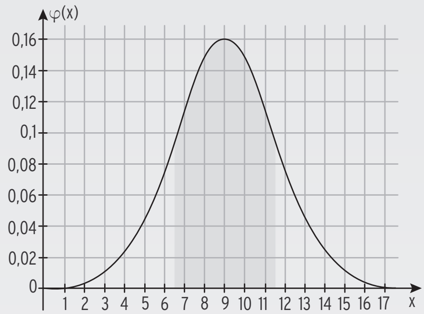
Aus $4 = b^2$ erhält man $b_{1|2} = \pm 2$; aus $11 = 10 + c$ erhält man $c = 1$;

Mit $c = 1$ erhält man aus $12 = 9 + 2a \cdot (a-1) + 3 \cdot 1 \Leftrightarrow 0 = 2a \cdot (a-1)$

und dem Satz vom Nullprodukt: $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$.

Man erhält die Lösungen: (0; − 2 ; 1); (1; − 2 ; 1); (0; 2 ; 1) und (1; 2 ; 1) und somit also 4 Lösungen.

Aufgabe P4



a) Der Erwartungswert ist $\mu_X = 9$.

($\varphi(x)$ ist maximal in $x = 9$)

b) Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A entspricht der Wahrscheinlichkeit einer $1 \cdot \sigma_X$-Umgebung um $\mu_X = 9$.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B entspricht der Wahrscheinlichkeit einer $2 \cdot \sigma_Y$-Umgebung um $\mu_Y = 7$.

Somit gilt $P(A) < P(B)$.

Hinweis: $P(A) = P(6{,}5 \le X \le 11{,}5) = P(\mu_X - \sigma_X \le X \le \mu_X + \sigma_X) \approx 68\ \%$

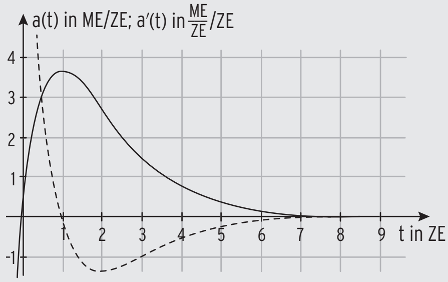
$P(B) = P(4{,}5 \le Y \le 9{,}5) = P(\mu_Y - 2 \cdot \sigma_Y \le Y \le \mu_Y + 2 \cdot \sigma_Y) \approx 95{,}5\ \%$

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium
Lösungen Prüfungsteil A

Wahlaufgaben **Aufgaben Seite 62-64**

Aufgabe W1

a) Ableitungsgraphen skizzieren



b) Größter Absatz pro ZE

(größter momentaner Absatz):

$a'(t) = 10 \cdot e^{-t} + 10t \cdot e^{-t} \cdot (-1)$

$a'(t) = (10 - 10t) \cdot e^{-t}$

Bed.: $a'(t) = 0 \Leftrightarrow 10 - 10t = 0$

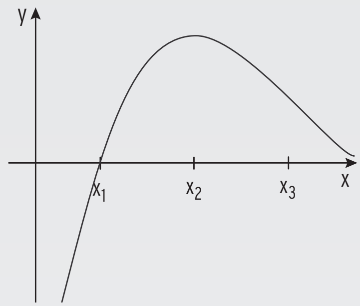
wegen $e^{-t} > 0$: $t = 1$

Zum Zeitpunkt 1 ZE wird der größte momentane Absatz erzielt.

Aufgabe W2

a) Da f' an der Stelle x_3 ein Minimum hat, ist der Grad von f' mindestens 2 und damit der Grad von f mindestens 3.

b) Skizze von f:



Aufgabe W3

Die Gerade durch A mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ liegt in der x_1x_3 -Ebene und steht

wegen $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ senkrecht zur Gerade durch A und B.

C liegt auf dieser Geraden im Abstand $|\overline{AB}| = \sqrt{50}$ von O.

Bedingung: $\left| k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{50} \quad \Leftrightarrow k \cdot 5 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \quad k = \sqrt{2}$

Damit kommt für C der Punkt $(4\sqrt{2} \mid 0 \mid 3\sqrt{2})$ infrage.

Zentralabitur 2018 Mathematik eA Berufliches Gymnasium
Lösungen Prüfungsteil A

Aufgabe W4

a) Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

fehlende Werte: 0,7; 0,1; 0,1 ; 0,8 (Zeilensumme = 1)

b) Hinweis: Die 1. Zeile zeigt das Wechselverhalten der Fleischesser (F → V → N) ;

die 1. Spalte zeigt das Wechselverhalten der Nutzer zum Vegatarischen Gericht

(F → V; V → V; N → V)

Aus M · M ergibt sich: $a_{22} = (0{,}1 \quad 0{,}8 \quad 0{,}1) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}67$

Aufgabe W5

a) Ereignis: „Es wird keinmal die Zahl 1 erzielt."

Begründung: Bei jedem der fünf Würfe beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, nicht die Zahl 1 zu erzielen, $\frac{3}{4}$.

b) $\binom{5}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}$ z.B.: 1.Wurf: egal; 2.Wurf: 1 mit $p = \frac{1}{4}$;

3.Wurf: 2 oder 3 oder 4 mit $p = \frac{3}{4}$;

4.Wurf: 2 oder 3 (wenn im 3.Wurf 4fällt) mit $p = \frac{2}{4}$;

5.Wurf: 2 (wenn im 4.Wurf 3 fällt) mit $p = \frac{1}{4}$

Hinweis: Tetraeder: Vierflach mit 4 Seitenflächen#

Aufgabe W6

X ist binomialverteilt mit n = 10; p = 0,8

a) $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

Ablesen ergibt den Näherungswert: $0{,}30 + 0{,}27 + 0{,}11 = 0{,}68$

b) $P(X = 0) = 0{,}2^{10}$

Abschätzung: $0{,}2^{10} = \left(\frac{2}{10}\right)^{10} = \frac{2^{10}}{10^{10}} = \frac{1024}{10\,000\,000\,000} = \frac{1{,}024}{10\,000\,000}$

$$0{,}2^{10} = \frac{0{,}1024}{1\,000\,000} < \frac{1}{1\,000\,000}$$