2024

Abitur

Original-Prüfu
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Hamburg

Mathematik

+ *Online-Glossar*

STARK

Inhalt

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, kann eine Auswahl davon auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Auch die Original-Prüfungsaufgaben 2019 und 2020 können auf MyStark heruntergeladen werden.

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online auf **MyStark** Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ihren persönlichen Zugangscode finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Autoren der Lösungen:

Dr. Jürgen Leitz: Original-Abiturprüfungen 2019 bis 2021
Verlagsredaktion: Original-Abiturprüfungen 2022 bis 2023

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit dem vorliegenden Buch geben wir Ihnen eine **optimale** Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung** in **Hamburg**.

- Im ersten Teil des Buches erhalten Sie zahlreiche **Informationen zum Abitur**, die für eine gezielte Vorbereitung auf die Abiturprüfung hilfreich und wichtig sind. Hierzu gehören die komplette Auflistung der Schwerpunktthemen für das **Abitur**, die **Hinweise zum Prüfungsablauf** sowie alles Wissenswerte zum Aufbau und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Weiter geben wir Ihnen eine Vielzahl **praktischer Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf die Abiturprüfung als auch während der Prüfung (Klausuren) ermöglichen, gestellte Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Sie finden in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2021 und 2022** abgedruckt. Die Aufgaben **2019**, **2020** und **2023 (Auswahl)** stehen Ihnen auf der **Plattform MyStark** zum Download zur Verfügung. Somit können Sie sich ein Bild davon machen, welche Anforderungen an die Abiturprüfung in den vergangenen Jahren gestellt wurden.
- Zu allen Aufgaben finden Sie vollständige und schülergerechte **Lösungsvorschläge**. Zusätzlich werden in den **Hinweisen und Tipps**, die zwischen Aufgabe und Lösung stehen, die Lösungsansätze dargestellt, ohne dass die Lösung vorweggenommen wird. Hier können Sie nachlesen, wenn Sie nicht wissen, wie Sie mit der Lösung einer Aufgabe anfangen sollen. Die Hinweise und Tipps sind hierarchisch nach aufsteigender **Hilfestellung** sortiert, sodass Sie nach dem Lesen des ersten Tipps nochmals nachdenken sollten, ob Sie jetzt die Lösung schaffen. Erst dann lesen Sie den zweiten Hinweis, der den Lösungsansatz genauer beschreibt.
- Damit Sie in diesem Buch passende Aufgaben zum Üben heraussuchen können, z. B. für die Vorbereitung auf eine anstehende Klausur, finden Sie gleich am Anfang ein **Stichwortverzeichnis**.
- Kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung finden Sie ab Mitte März 2024 unter:
www.stark-verlag.de/schule/unser-angebot/kurse/online-kurse

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Vorbereitung auf das Abitur und bei Ihrer Prüfung, nicht nur im Fach Mathematik!

Dr. Jürgen Leitz und Stark Verlag

Allgemeine Hinweise zum Zentralabitur

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

Zentrale schriftliche Prüfung

Die Abiturprüfung bildet den Abschluss der zweijährigen Studienstufe, die in Hamburg als Profiloberstufe ausgestaltet ist. An allen allgemeinbildenden und den berufsbildenden Gymnasien sowie an den Stadtteilschulen in Hamburg wird das Abitur mit zentraler Aufgabenstellung durchgeführt. Die Abituraufgaben werden in der Hamburger Behörde für Schule und Bildung entwickelt.
Das Abitur kann in Mathematik auf dem grundlegenden oder dem erhöhten Anforderungsniveau abgelegt werden. Ob das Anforderungsniveau in Mathematik grundlegend oder erhöht ist, wurde vor dem Eintritt in die Profiloberstufe verbindlich festgelegt, die Prüfung muss in dem gewählten Niveau abgelegt werden.
Den ersten von vier Aufgabenblöcken bildet der **hilfsmittelfreie Teil**. Im Rahmen dieses Aufgabenblocks müssen **mehrere kleinere** Aufgaben, die die Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie bzw. Lineare Algebra und Stochastik umfassen, bearbeitet werden. Die Bearbeitung dieses Teils muss – wie der Name schon andeutet – ohne Hilfsmittel wie Taschenrechner und Formelsammlung erfolgen.

Die prüfungsrelevanten Inhalte der Studienstufe

Modul 1 (Von der Änderungsrate zum Bestand)
Funktionen und Änderungsraten • zu Anwendungskontexten mit funktionalen Zusammenhängen mathematische Modelle erstellen und Funktionsgraphen darstellen • Veränderungen der Graphen von Funktionen bei Variation von Parametern untersuchen und diese Veränderungen beschreiben • lineare Gleichungssysteme aufstellen und lösen zur Bestimmung der Koeffizienten ganzrationaler Funktionen • Funktionswerte aus Argumenten bestimmen und umgekehrt, auch durch Lösen von Gleichungen, und die Ergebnisse im Anwendungskontext interpretieren • geeignetes Verfahren auswählen und anwenden zur Lösung von linearen, quadratischen und biquadratischen Gleichungen sowie einfachen Bruch- und Wurzelgleichungen • Sekanten- und Tangentensteigung an Funktionsgraphen bestimmen sowie die Annäherung der mittleren an die lokale Änderungsrate beschreiben • lokale Änderungsraten berechnen und im Anwendungskontext interpretieren • Änderungsraten funktional beschreiben (Ableitungsfunktion) und im Anwendungskontext interpretieren • Ableitungsgraphen aus Funktionsgraphen entwickeln und umgekehrt

- Funktionen mithilfe von Faktor-, Potenz-, Summen- und Kettenregel ableiten
- Ableitungen als notwendige und hinreichende Bedingungen zur Bestimmung von Monotonie, Krümmungsverhalten sowie lokalen Extrem- und Wendepunkten von Funktionen anwenden und im Anwendungskontext interpretieren
- funktionale Zusammenhänge in Anwendungssituationen mit abschnittsweise definierten Funktionen modellieren und die Übergänge auf Sprung- und Knickfreiheit untersuchen
- Passung und Grenzen gewählter mathematischer Modelle in den jeweiligen Anwendungskontexten überprüfen und Modelle zielgerichtet modifizieren
- das Verhalten von Funktionen im Unendlichen beschreiben und ggf. senkrechte und waagerechte Asymptoten bestimmen
- erkennbare Symmetrie (Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung) für Argumentationen und zur Vereinfachung von Berechnungen nutzen
- einen Plan zur Lösung von Optimierungsproblemen entwickeln und umsetzen, den Lösungsweg argumentativ darstellen und das Vorgehen reflektieren

Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau

- Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen deuten
- Randextrema bestimmen
- Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte von Funktionsscharen bestimmen in Abhängigkeit von Parametern und unter Berücksichtigung von Fallunterscheidungen
- Funktionsscharen bei der Lösung von Problemen anwenden

Bestandsänderungen

- Bestandsänderungen in Anwendungskontexten als Fläche unter Funktionsgraphen beschreiben und die Flächen als Bestandsveränderungen interpretieren
- Inhalte von Flächen unter Funktionsgraphen näherungsweise durch Berechnung von Ober- und Untersummen mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge (Tabellenkalkulation, CAS) bestimmen und deren gegenseitige Annäherung bei steigender Anzahl von Teilintervallen beschreiben
- Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung begründen und geometrisch veranschaulichen
- den Zusammenhang von Integral und Ableitung nutzen, auch in Anwendungskontexten
- Stammfunktion von ganzrationalen Funktionen und Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten (mit Ausnahme von –1) sowie von der Sinus- und der Kosinusfunktion bestimmen, auch mithilfe der Summen- und Faktorregel
- Integrale in Anwendungskontexten zur Berechnung von Mittelwerten von Funktionen nutzen
- Integrale mithilfe von Stammfunktionen und durch Abschätzungen bestimmen, auch zur Berechnung des Inhalts der Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau

- das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation von Funktionsgraphen um die Abszissenachse entstehen
- die Volumenformel für Körper begründen, die durch Rotation von Funktionsgraphen um die Abszissenachse entstehen
- bestimmte Integrale bei Sinus- und Kosinusfunktionen mit linearen Argumenten als Bestandsänderungen berechnen
- elementare Rechenregeln für bestimmte Integrale anwenden und Symmetriebetrachtungen nutzen

II Analysis 1

1. Ein ICE fährt bis 15:00 Uhr mit konstanter Geschwindigkeit. Von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr nimmt seine Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt ab. Ab 15:02 Uhr fährt der ICE wieder mit konstanter Geschwindigkeit.

   Die Geschwindigkeitsentwicklung von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr wird zunächst mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit

   $f(x) = 30x^3 - 90x^2 + 240$

   beschrieben. Dabei ist x die seit 15:00 Uhr vergangene Zeit in Minuten und $f(x)$ die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde.

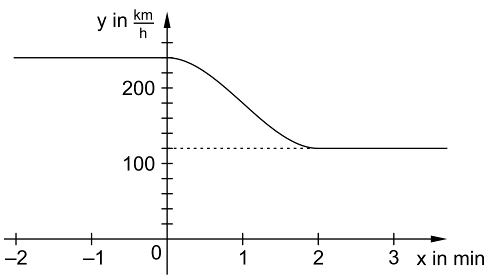


Abb. 1

   Die Abbildung 1 zeigt für $0 \leq x \leq 2$ den Graphen von f; außerdem stellt sie die Geschwindigkeiten des ICE vor 15:00 Uhr und nach 15:02 Uhr dar.

Punkte

   a) **Bestimmen** Sie die Geschwindigkeit, die der ICE eine halbe Minute nach 15:00 Uhr hat.

      Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit in der ersten halben Minute nach 15:00 Uhr um einen kleineren Betrag abnimmt als in der darauffolgenden halben Minute. 4

   b) **Ermitteln** Sie den Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit am stärksten abnimmt. 4

   c) **Berechnen** Sie die Länge der Strecke, die der ICE in den ersten zwei Minuten nach 15:00 Uhr zurücklegt. 3

d) **Untersuchen** Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:

Wenn sich die Abnahme der Geschwindigkeit von 15:01 Uhr an nicht mehr verändern würde, dann käme der ICE von diesem Zeitpunkt an nach drei Kilometern zum Stehen. 5

Nun werden alle in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_p der Schar mit

$$f_p(x) = \frac{p}{4} \cdot x^4 + (30 - p) \cdot x^3 + (p - 90) \cdot x^2 + 240$$

und $p \in \mathbb{R}$ daraufhin untersucht, ob sie für $0 \leq x \leq 2$ die Entwicklung der Geschwindigkeit des ICE von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr passend zur angenommenen Geschwindigkeitsbeschreibung beschreiben könnten.
Die Abbildung 2 ist im Vergleich zur Abbildung 1 um die Graphen G_{-80} und G_{250} der Funktionen f_{-80} bzw. f_{250} ergänzt.

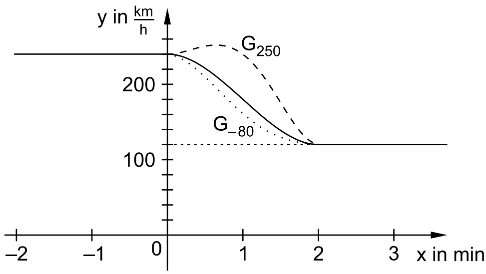


Abb. 2

e) Der Übergang von der Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit vor 15:00 Uhr zur Fahrt nach 15:00 Uhr erfolgt sowohl hinsichtlich der Geschwindigkeit als auch hinsichtlich der momentanen Änderungsrate der Geschwindigkeit ohne Sprung. Die Funktionen f_p werden diesen beiden Anforderungen gerecht.

Geben Sie die zugehörigen Bedingungen in mathematischer Schreibweise **an**, die die Funktionen f_p erfüllen. 2

f) **Geben** Sie denjenigen Wert von p **an**, für den $f_p(x)$ mit dem Term der Funktion f übereinstimmt.

Beurteilen Sie für jede der Funktionen f_{-80} und f_{250} mithilfe des zugehörigen Graphen, ob die Funktion die Geschwindigkeitsentwicklung innerhalb des Zeitraums von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr passend beschreiben könnte (siehe Abbildung 2). 3

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe 1 a

Geschwindigkeit eine halbe Minute nach 15:00 Uhr

- Die gesuchte Geschwindigkeit entspricht dem Funktionswert von f bei $x = 0{,}5$.

Vergleich der Abnahmen in den ersten beiden halben Minuten

- Sie benötigen zusätzlich zu $f(0{,}5)$ noch $f(0)$ und $f(1)$.
- Vergleichen Sie die Differenzen $f(0{,}5) - f(0)$ mit $f(1) - f(0{,}5)$.

Teilaufgabe 1 b

Zeitpunkt der stärksten Geschwindigkeitsabnahme

- Die stärkste Abnahme liegt an der Wendestelle vor.
- Sie benötigen zur Lösung der Aufgabe die 1. und die 2. Ableitungsfunktion von f.

Teilaufgabe 1 c

In den ersten zwei Minuten zurückgelegte Strecke

- Beachten Sie, dass nach der Länge der zurückgelegten Strecke gefragt ist, die Funktion f aber die Geschwindigkeit des ICE angibt.
- Die zurückgelegte Strecke in einem bestimmten Zeitraum ergibt sich aus der Fläche, die sich in einem bestimmten Intervall zwischen dem Graphen von f und der x-Achse befindet.
- Sie müssen zur Berechnung der Strecke ein passendes Integral lösen.
- Achtung: x gibt die Zeit in Minuten an, $f(x)$ aber die Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde. Sie benötigen also für Ihre Berechnung einen entsprechenden Vorfaktor, der dem Umrechnungsfaktor von $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $\frac{\text{km}}{\text{min}}$ entspricht.

Teilaufgabe 1 d

Untersuchen der Aussage

- 15:01 Uhr entspricht $x = 1$.
- Berechnen Sie mithilfe von f die Geschwindigkeit um 15:01 Uhr.
- Berechnen Sie mithilfe von f' die Geschwindigkeitsänderung um 15:01 Uhr.
- Eine ab 15:01 Uhr konstante Abnahme der Geschwindigkeit entspräche im Diagramm einer fallenden Geraden für $x \geq 1$. Die Neigung (bzw. negative Steigung) dieser Geraden wäre gleich der zu diesem Zeitpunkt momentanen Geschwindigkeitsabnahme.
- Folgende geometrische Betrachtung lässt dann einen Rückschluss auf den zurückgelegten Weg bis zum Stillstand zu: Die genannte Gerade bildet gemeinsam mit der vertikalen Geraden $x = 1$ sowie der x-Achse ein Dreieck. Der Flächeninhalt des Dreiecks entspricht dem zurückgelegten Weg.

Lösung

1. a) Die Geschwindigkeit des ICE eine halbe Minute nach 15:00 Uhr ergibt sich aus dem Funktionswert der Funktion f bei $x = 0{,}5$:

$f(0{,}5) = 30 \cdot 0{,}5^3 - 90 \cdot 0{,}5^2 + 240 = 221{,}25$

Eine halbe Minute nach 15:00 Uhr hat der ICE eine Geschwindigkeit von $221{,}25 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Die Geschwindigkeit um 15:00 Uhr entspricht $f(0) = 240$ und die Geschwindigkeit eine Minute nach 15:00 Uhr:

$f(1) = 30 \cdot 1^3 - 90 \cdot 1^2 + 240 = 180$

Es gilt folglich:

$f(0{,}5) - f(0) = 221{,}25 - 240 = -18{,}75$

$f(1) - f(0{,}5) = 180 - 221{,}25 = -41{,}25$

Die Geschwindigkeit nimmt in der ersten halben Minute um $18{,}75 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und in der zweiten halben Minute um $41{,}25 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ab. In der zweiten halben Minute ist die Abnahme somit größer. (w. z. z. w.)

b) Die stärkste Abnahme der Funktion f befindet sich an deren Wendestelle. Dazu werden zunächst die 1. und 2. Ableitungsfunktion ermittelt:

$f'(x) = 90x^2 - 180x$

$f''(x) = 180x - 180$

Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle ist $f''(x) = 0$ und es folgt:

$180x - 180 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

Da aus Abbildung 1 ersichtlich ist, dass sich im Bereich $0 < x < 2$ eine Wendestelle befindet, muss diese sich bei $x = 1$ befinden. Die Geschwindigkeit nimmt folglich eine Minute nach 15:00 Uhr am stärksten ab, also um 15:01 Uhr.

c) Die Länge ℓ der Strecke (in Kilometern), die der ICE in den ersten zwei Minuten nach 15:00 Uhr zurücklegt, ergibt sich aus folgendem Integral:

$$\ell = \frac{1}{60} \cdot \int_0^2 f(x)\,dx$$

Anmerkung:
Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist notwendig, da x die Zeit in Minuten, $f(x)$ aber die Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ angibt. Dieser Faktor entspricht dem Umrechnungsfaktor von $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $\frac{\text{km}}{\text{min}}$.

Eine Stammfunktion F von f ist:

$$F(x) = \frac{30}{4}x^4 - \frac{90}{3}x^3 + 240x = 7{,}5x^4 - 30x^3 + 240x$$

Für die Länge ℓ der Strecke folgt dann:

$$\ell = \frac{1}{60} \cdot \left[7{,}5x^4 - 30x^3 + 240x\right]_0^2 = \frac{1}{60} \cdot (7{,}5 \cdot 2^4 - 30 \cdot 2^3 + 240 \cdot 2 - 0) = 6$$

Der ICE legt in den ersten zwei Minuten 6 Kilometer zurück.

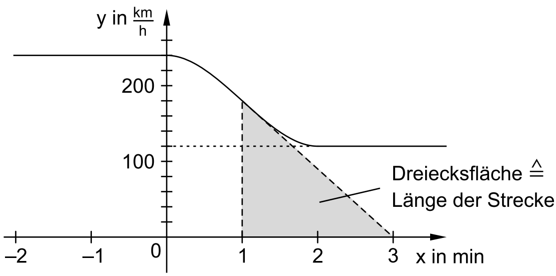
d) Die Geschwindigkeit des ICE um 15:01 Uhr entspricht dem Funktionswert von f an der Stelle $x = 1$:

$$f(1) = 30 \cdot 1^3 - 90 \cdot 1^2 + 240 = 180$$

Die momentane Geschwindigkeitsänderung des ICE um 15:01 Uhr entspricht dem Funktionswert der Ableitungsfunktion f an der Stelle $x = 1$:

$$f'(1) = 90 \cdot 1^2 - 180 \cdot 1 = -90$$

Bei einer Geschwindigkeit um 15:01 Uhr von 180 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und einer ab dann konstanten Geschwindigkeitsänderung von 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ pro Minute kommt der ICE nach zusätzlichen zwei Minuten zum Stehen.
Die Bewegung lässt sich im Diagramm in Abbildung 1 folgendermaßen darstellen:



Die zwischen 15:01 Uhr bis zum Stillstand bei konstanter Abnahme der Geschwindigkeit zurückgelegte Streckenlänge ℓ_0 ergibt sich über die Dreiecksfläche (siehe Skizze):

$$\ell_0 = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 180 = 3$$

Die Aussage ist demnach richtig, der Zug käme ab 15:01 Uhr nach drei Kilometern zum Stehen.

e) Die beiden Bedingungen sind:

$$f_p(0) = 240$$

$$f_p'(0) = 0$$