2024

Abitur

Original-Prüfu
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Niedersachsen

Mathematik

+ *Übungsaufgaben*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz*

PDF

STARK

Inhaltsverzeichnis

Original-Abituraufgaben

Es liegen alle Aufgaben für CAS und für GTR vollständig vor. Wenn eine Aufgabe für beide Rechnerarten gleich ist, wurde die Lösung für die erstgenannte ausgearbeitet. Bei Unterschieden in der Aufgabenstellung finden Sie die Variante für die eine Rechnertechnologie im Buch und die andere bei MyStark.

Die mit einem * markierten Aufgaben sind wegen Lehrplanänderungen seit 2021 für das Abitur nicht mehr relevant.

Der Jahrgang 2020 fehlt, da wegen der Umstellung von G8 auf G9 in diesem Jahr nur für sehr wenige Schüler eine Abiturprüfung stattgefunden hat.

Abiturprüfung 2022

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode auf der Umschlaginnenseite).

Bei **MyStark** finden Sie:
– **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs
– **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
– **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht
– alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2014 bis 2019 und 2021 bis 2023** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Den Zugangscode zu MyStark finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung finden Sie ab Mitte März 2024 unter:
www.stark-verlag.de/schule/unser-angebot/kurse/online-kurse

Autoren

Volker Honkomp (Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgabe 2023)
Josef Rolfs (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2011–2018)
Hartmut Müller-Sommer (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2014–2019, 2021–2023)

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1 Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

1.1 Die zentrale schriftliche Prüfung

Seit dem Schuljahr 2005/2006 gibt es im Land Niedersachsen im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Seit dem Schuljahr 2013/2014 werden Teile davon länderübergreifend gestellt.
Die Abiturprüfung besteht aus zwei Teilen: dem **Prüfungsteil A**, der ohne elektronische Hilfsmittel und ohne Formelsammlung zu bearbeiten ist, und dem **Prüfungsteil B**, der mithilfe der unten angeführten Hilfsmittel bearbeitet werden kann.

1.2 Aufbau der Prüfungsaufgaben

Im **Prüfungsteil A** müssen insgesamt **fünf Aufgaben** aus den drei Sachgebieten Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie bearbeitet werden. Die Aufgaben werden in die Aufgabengruppe 1 und Aufgabengruppe 2 unterteilt. Die Aufgabengruppe 1 enthält Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und II. Die Aufgabengruppe 2 enthält Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und II, wobei mindestens eine Teilaufgabe auch den Anforderungsbereich III erreicht.
Den Schülerinnen und Schülern werden je eine Aufgabe aus der Analysis, eine aus der Stochastik und eine aus der Analytischen Geometrie vorgelegt, die alle drei bearbeitet werden müssen. Diese kommen alle aus der Aufgabengruppe 1.
Zusätzlich erhalten die Schülerinnen und Schüler zu jedem der drei Sachgebiete jeweils eine weitere Aufgabe der Aufgabengruppe 1 und eine der Aufgabengruppe 2. Aus jeder der beiden Aufgabengruppen muss von den drei Aufgaben eine beliebige bearbeitet werden.
Ein Prüfling könnte aus der Aufgabengruppe 1 beispielsweise die Analysisaufgabe und aus der Aufgabengruppe 2 die Aufgabe zur Analytischen Geometrie bearbeiten. Insgesamt hat er dann fünf Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet.
Die Aufgaben des Prüfungsteils A sind mit jeweils 5 Bewertungseinheiten gleichgewichtet und gehen **zu 25 %** in die Gesamtnote ein.

Im **Prüfungsteil B** werden den Schülerinnen und Schülern je zwei Aufgaben aus der Analysis, aus der Stochastik und aus der Analytischen Geometrie vorgelegt. Sie müssen aus jedem der drei Bereiche jeweils eine Aufgabe auswählen und bearbeiten.
In der Analysisaufgabe können 35 Bewertungseinheiten erreicht werden, in der Stochastik und der Analytischen Geometrie jeweils 20. Die Aufgaben des Wahlteils gehen insgesamt **zu 75 %** in die Gesamtnote ein.

1.3 Dauer der Prüfung

Die Arbeitszeit beträgt **285 Minuten**. Zu Beginn der Prüfung werden die Aufgaben des Prüfungsteils A und des Prüfungsteils B ausgeteilt. Die Schülerinnen und Schüler entscheiden selbst, wann sie den Prüfungsteil A abgeben. Dies muss spätestens nach 90 Minuten erfolgen. Anschließend erhalten sie die zugelassenen Hilfsmittel.

1.4 Verwendung von Hilfsmitteln im Wahlteil

Von den lokalen Fachkonferenzen wird zu Beginn der Einführungsphase festgesetzt, welche der beiden Technologiekategorien in den jeweiligen Prüfungsgruppen verwendet werden. Diese Entscheidung legt eine Aufgabenklasse für die Prüfungsgruppe fest und kann nicht mehr verändert werden. Zur Auswahl stehen:
- grafikfähiger Taschenrechner ohne CAS (GTR)
- computeralgebrafähiger Taschencomputer, Computeralgebrasystem auf einem Tablet, PC oder Notebook (CAS)

Alle Prüflinge einer Prüfungsgruppe verwenden dasselbe Rechnermodell mit demselben Betriebssystem.
In der Abiturprüfung sollen die Schülerinnen und Schüler die **Rechnertechnologie** einsetzen und den sinnvollen Gebrauch dieser Technologie nachweisen. Dabei gilt:
- Alle Taschenrechner sind mittels eines Hard- bzw. Software-Resets vor der Prüfung in einen vergleichbaren Zustand zu versetzen. Eigene Programme und Dateien sind auf dem Rechner nicht zulässig.
- Bei den Computeralgebrasystemen sind keine Ergänzungsprogrammpakete erlaubt; auf PCs sind neben einem CAS die Standard-Officeprogramme, aber keine weiteren mathematischen Programme oder weitere Dateien zulässig.

Weiter sind zur Abiturprüfung das auf den Seiten des IQB veröffentlichte „Dokument mit mathematischen Formeln“ und **Handbücher** der Rechner zugelassen.

2 Die Inhalte in der Einführungs- und Qualifikationsphase

Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung sind die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (BS, 2012) und das Kerncurriculum Mathematik (KC, 2018). Außerdem werden wie jedes Jahr durch die „Hinweise zur schriftlichen Abiturprüfung 2024“ weitere Angaben gemacht.

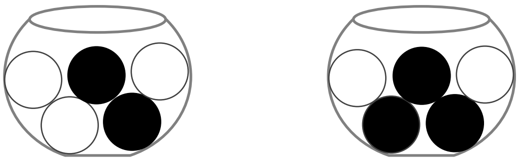
Im Folgenden werden die verbindlichen Inhalte für die Einführungs- und Qualifikationsphase aufgeführt, da diese für das Abitur relevant sind. Wir beschränken uns hier auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen, denn diese sind fachbezogen und legen fest, über welches Wissen Sie im jeweiligen Inhaltsbereich verfügen sollen.

2.1 Analysis

Einführungsphase	**Elementare Funktionenlehre** – Funktionsbegriff – Potenzfunktionen – Sinus- und Kosinusfunktion – Exponentialfunktionen – $g(x) = a \cdot f \cdot (b \cdot (x - c)) + d$ mit Auswirkungen auf den Graphen – Parametervariationen – ganzrationale Funktionen – Nullstellen (Linearfaktorzerlegung) – Grenzwerte, Symmetrien, asymptotisches Verhalten **Ableitungen** – mittlere Änderungsrate-Sekantensteigung-Sekante – lokale Änderungsrate-Tangentensteigung-Tangente – Ableitung als Grenzwert der Sekantensteigungen – Ableitungsfunktion – Tangenten- und Normalengleichung – Zusammenhang zwischen Funktionsgraph und Ableitungsgraph – Monotonie und Extrempunkte – Krümmung und Wendepunkte – Ableitungsfunktionen zu $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$ – Summen-, Faktor- und Potenzregel – notwendige und hinreichende Kriterien für Extrem- und Wendepunkte – Ableitung ganzrationaler Funktionen – Lösen von Sachproblemen mit Ableitungen – Lösen linearer Gleichungssysteme
Qualifikationsphase	**Differenzialrechnung** – Gauß-Algorithmus (mit GTR/CAS) – ganzrationale Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften bestimmen – Produktregel und Kettenregel – Parametervariation zur Anpassung an eine vorgegebene Eigenschaft **Integralrechnung** – Rekonstruktion aus Änderungsraten – Integral als Grenzwert von Produktsummen – Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Übungsaufgabe 3 (40 Min., GTR/CAS)

Ziehen aus zwei Urnen



In zwei Urnen A und B befinden sich jeweils 5 Kugeln. In der Urne A befinden sich 3 weiße und 2 schwarze Kugeln. In der Urne B befinden sich 3 schwarze und 2 weiße Kugeln.

a) Ein Spieler zieht dreimal nacheinander aus der Urne A eine Kugel und legt diese nach dem Zug in die Urne A zurück.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einmal eine schwarze Kugel gezogen wird.

b) Der Spieler zieht nun aus der Urne A und aus der Urne B jeweils eine Kugel.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er 2 gleichfarbige Kugeln zieht.

Die gezogenen Kugeln werden zurück in die jeweiligen Urnen gelegt, sodass wieder die ursprünglichen Urnen betrachtet werden.

c) Aus beiden Urnen wird zufällig jeweils eine Kugel entnommen und in die jeweils andere Urne gelegt.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass sich die Anteile der schwarzen und weißen Kugeln in den jeweiligen Urnen nach diesem Vorgang verändert haben.

d) Alle Kugeln werden nun in eine gemeinsame Urne umgefüllt. Es befinden sich also 5 weiße und 5 schwarze Kugeln in der Urne. Es werden nun 3 Kugeln gleichzeitig herausgezogen.
Begründen Sie, dass der Term $\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$ die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass sich unter den 3 gezogenen Kugeln genau 2 schwarze Kugeln befinden.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis
(1) mithilfe des Rechners.
(2) ohne Einsatz des Rechners.

TIPP **Lösungshinweise – Übungsaufgabe 3**

Teilaufgabe a

Bestimmung der ersten Wahrscheinlichkeit

Beachten Sie, dass die gezogene Kugel nach jedem Zug in die Urne A zurückgelegt wird.

Die Zufallsgröße X: „Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln" ist daher binomialverteilt mit der Stichprobengröße $n = 3$ und der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{5}$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen „Erfolg". Sie können hierfür die **binomcdf**-Funktion des Rechners nutzen oder mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses die Komplementärregel anwenden.

Teilaufgabe b

Bestimmung der zweiten Wahrscheinlichkeit

Mit einem geeigneten Baumdiagramm lässt sich das Zufallsexperiment veranschaulichen.

Beachten Sie, dass zum Ereignis „Der Spieler zieht aus den beiden Urnen gleichfarbige Kugeln" zwei Pfade im Baumdiagramm gehören: Der Spieler kann 2 schwarze oder 2 weiße Kugeln ziehen.

Wenden Sie die Pfadregeln an und bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Teilaufgabe c

Bestimmung der dritten Wahrscheinlichkeit

Welche möglichen Ausgänge des beschriebenen Zufallsexperimentes führen zu veränderten Anteilen der schwarzen und weißen Kugeln in den Urnen?

Was lässt sich über die Anteile der schwarzen und weißen Kugeln in den Urnen aussagen, wenn der Spieler, wie in Teilaufgabe b, 2 gleichfarbige Kugeln zieht?

Argumentieren Sie mithilfe des Baumdiagramms aus Teilaufgabe b und bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Teilaufgabe d

Begründung für die angegebene Wahrscheinlichkeit

Beachten Sie, dass der Faktor $\binom{5}{2}$ im Zähler des Terms die Anzahl der Möglichkeiten angibt, von den 5 schwarzen Kugeln 2 Kugeln auszuwählen.

Deuten Sie das Produkt $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}$ im Zähler und den Nenner $\binom{10}{3}$.

Geben Sie eine abschließende Begründung für die beschriebene Wahrscheinlichkeit.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit
Berechnen Sie den Wert der angegebenen Wahrscheinlichkeit und nutzen Sie dabei den Rechnerbefehl **nCr(n, k)** für den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit auch ohne Einsatz des Rechners, indem Sie auf die Definition $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ des Binomialkoeffizienten zurückgreifen.

Lösungsvorschlag – Übungsaufgabe 3

a) Die Zufallsgröße X: „Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln" ist binomialverteilt mit der Stichprobengröße $n = 3$ und der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{5}$.
Es gilt:

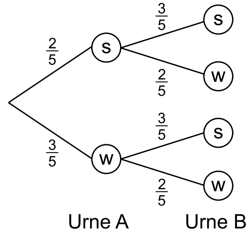
$$P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{3} \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{3-k}$$
$$= \text{binomcdf}\left(3, \frac{2}{5}, 1, 3\right)$$
$$= 0{,}784$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 78,4 % wird mindestens einmal eine schwarze Kugel gezogen.

Alternative:
Das Ergebnis erhält man auch mithilfe der Komplementärregel:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 78{,}4\ \%$$

b) Das Zufallsexperiment wird durch das nebenstehende Baumdiagramm veranschaulicht.



Zum Ereignis E_1: „Der Spieler zieht aus den beiden Urnen gleichfarbige Kugeln" gehören zwei Pfade des Baumdiagramms: ss und ww

$$P(ss) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

$$P(ww) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

Daher gilt:

$$P(E_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

c) Damit sich nach dem Tauschen der Kugeln der Anteil schwarzer und weißer Kugeln in den jeweiligen Urnen verändert, muss aus der Urne A eine schwarze und aus der Urne B eine weiße Kugel oder umgekehrt aus der Urne A eine weiße und aus der Urne B eine schwarze Kugel gezogen werden.
Es handelt sich also um das Ereignis E_2: „Der Spieler zieht aus den beiden Urnen ungleichfarbige Kugeln". Für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gilt:

$$P(E_2) = P(sw) + P(ws) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25}$$

Alternative:
E_2 ist das Gegenereignis zu E_1. Daher führt die Komplementärregel zum gleichen Ergebnis:

$$P(E_2) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$$

d) Begründung für die angegebene Wahrscheinlichkeit:
Beim Ziehen aus der Urne gibt es $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten, von den 5 schwarzen Kugeln 2 Kugeln auszuwählen. Es gibt dann $\binom{5}{1}$ Möglichkeiten, von den 5 weißen Kugeln 1 Kugel auszuwählen.
Mit E_3 sei das Ereignis bezeichnet, dass sich unter den 3 gezogenen Kugeln genau 2 schwarze Kugeln und 1 weiße befinden. Nach der Produktregel gibt es dann $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}$ „günstige" Fälle für das Ereignis E_3.
Insgesamt gibt es $\binom{10}{3}$ Möglichkeiten, aus einer Urne mit 10 Kugeln 3 Kugeln auszuwählen.
Daher stellt der Term $\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$ die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_3 dar.

Berechnung der angegebenen Wahrscheinlichkeit:

(1) Mit dem Rechnerbefehl **nCr(n, k)** für den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ erhält man:

$$P(E_3) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{\mathrm{nCr}(5,2) \cdot \mathrm{nCr}(5,1)}{\mathrm{nCr}(10,3)} \qquad \frac{5}{12}$$

(2) Mit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ erhält man für den Zähler:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 5 = 50$$

Für den Nenner gilt:

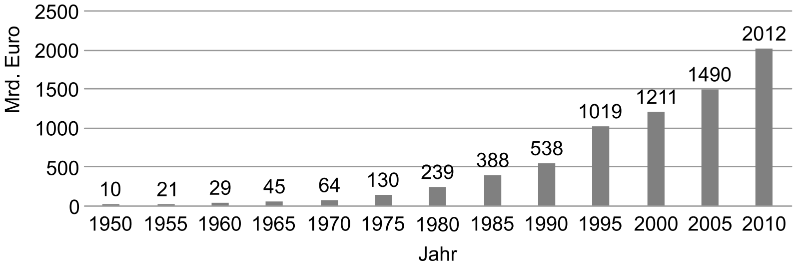
$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

Insgesamt folgt:

$$P(E_3) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

Wahlteil (GTR / CAS) – Aufgabe 1 B

Die Grafik zeigt die Schulden Deutschlands zu Beginn eines Jahres für die Jahre 1950 bis 2010 in Mrd. Euro.

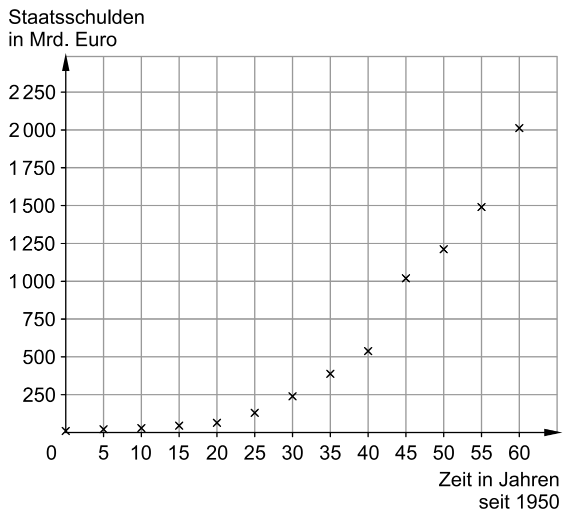


Punkte

a) Geben Sie die beiden Fünfjahreszeiträume an, in denen sich die Schulden mindestens verdoppelt haben. 2

b) Geben Sie ein Verfahren an zur Bestimmung einer Funktion, die für den Zeitraum von 1950 bis 2010 die Schulden in Abhängigkeit von der Zeitdauer seit 1950 näherungsweise beschreibt.
Nennen Sie drei Schritte der Durchführung des Verfahrens. 4

In der nebenstehenden Abbildung sind die Daten aus der Grafik eingetragen.
Die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit
$f(x) = 11 \cdot e^{0{,}089x}$
beschreibt für $0 \leq x \leq 60$ näherungsweise die Schulden Deutschlands von 1950 bis 2010. Dabei gibt x die Zeit in Jahren seit 1950 an und f(x) die Schulden in Mrd. Euro.



c) Zeichnen Sie den Graphen von f in die Abbildung. 3

d) Bestimmen Sie mithilfe der Funktion f die jährliche prozentuale Zunahme der Schulden.
Untersuchen Sie, ob es einen Zeitpunkt gibt, zu dem die momentane Änderungsrate der Schulden größer als 250 Mrd. Euro pro Jahr ist. 5

Im Folgenden wird in einem anderen Modell die momentane Änderungsrate der Schulden Deutschlands zu Beginn eines Jahres ab dem Jahr 2005 betrachtet. Sie wird für $x \geq 0$ durch die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = 250 \cdot e^{-0{,}25x} - 38$ beschrieben.
Dabei gibt x die Zeit in Jahren seit 2005 und g(x) die momentane Änderungsrate der Schulden in Mrd. Euro pro Jahr an.
(**GTR-Variante:** Ohne Nachweis können Sie verwenden, dass G mit $G(x) = -1\,000 \cdot e^{-0{,}25x} - 38 \cdot x$ eine Stammfunktion von g ist.)

e) Begründen Sie, dass in der Modellierung mit g die momentane Änderungsrate der Schulden ab Beginn des Jahres 2005 abnimmt.
Berechnen Sie das Jahr, in dem die Schulden ihren Höchststand erreichen. 6

Im Folgenden werden die zu erwartenden Schulden Deutschlands m Jahre nach dem Jahr 2005 für $0 \leq m \leq 70$ betrachtet.

f) Begründen Sie, dass sich die zu erwartenden Schulden zu Beginn des Jahres $2005 + m$ mithilfe des folgenden Terms berechnen lassen:

$$1\,490 + \int_0^m g(x)\,dx$$

Bestimmen Sie das Jahr, in dem die Schulden vollständig abgebaut sind. 7

g) Begründen Sie, dass die Lösungen der Gleichung $\frac{g(m)}{1\,490 + \int_0^m g(x)\,dx} = 0{,}05$

Zeitpunkte nach dem Jahr 2005 angeben, zu denen die Schulden um 5 % der vorhandenen Schulden wachsen.
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate der Schulden weniger als 5 % der Schulden beträgt. 8

35

TIPP **Lösungshinweise zum Wahlteil (GTR / CAS) – Aufgabe 1 B**

Teilaufgabe a

Angabe der beiden Fünfjahreszeiträume

Es gibt genau zwei Fünfjahreszeiträume, in denen sich die Schulden mindestens verdoppeln.

Schauen Sie sich die Daten der Grafik genau an und geben Sie die beiden Zeiträume an.

Teilaufgabe b

Angabe eines Verfahrens und der drei Schritte bei der Durchführung

Geben Sie ein Verfahren an, mit dem Sie unter Einsatz des Rechners eine Näherungsfunktion für die zeitliche Entwicklung der Schulden seit 1950 ermitteln können.

Ein übliches Verfahren stellt die Regression dar. Beschreiben Sie die Durchführung dieses Verfahrens in drei Schritten.

Alternativ lässt sich eine Näherungsfunktion auch mit dem Verfahren der Parameterbestimmung ermitteln. Wenn Sie dieses Verfahren nennen, ist seine Durchführung ebenfalls in drei Schritten zu beschreiben.

Teilaufgabe c

Zeichnung des Graphen von f

Ermitteln Sie mithilfe des Rechners die Funktionswerte einer Reihe von x-Werten im Intervall [0; 60] und tragen Sie die dazugehörigen Punkte $(x \,|\, f(x))$ sorgfältig in die Abbildung ein.

Verbinden Sie die Punkte zum Graphen der Funktion f.

Teilaufgabe d

Bestimmung der jährlichen prozentualen Zunahme der Schulden

Beachten Sie, dass die Funktion f mit $f(x) = 11 \cdot e^{0{,}089 \cdot x}$ die Schulden von 1950 bis 2010 näherungsweise beschreibt.

Bei der Funktion f handelt es sich um eine exponentielle Wachstumsfunktion, d. h., der Funktionswert des Folgejahres ergibt sich aus dem Funktionswert des Vorjahres stets durch eine Multiplikation mit einem festen Faktor $k > 1$.

Ermitteln Sie diesen Faktor k, indem Sie $f(x + 1)$ berechnen.

Lesen Sie aus dem Faktor k die jährliche prozentuale Zunahme der Schulden ab.

Lösungsvorschlag zum Wahlteil (GTR / CAS) – Aufgabe 1 B

a) Angabe der beiden Fünfjahreszeiträume:
Vom Beginn des Jahres 1950 bis zu Beginn des Jahres 1955 stiegen die Schulden von 10 auf 21 Mrd. Euro. Die Schulden haben sich in diesem Zeitraum also mehr als verdoppelt.
Im Zeitraum von 1970 bis 1975 stiegen die Schulden von 64 auf 130 Mrd. Euro. Sie haben sich hier ebenfalls mehr als verdoppelt.

b) Angabe eines Verfahrens und der drei Schritte bei der Durchführung:
Ein übliches Verfahren stellt die Regression dar, die mit dem Rechner durchgeführt werden kann.

Schritt 1: Man gibt die Wertepaare der vorgelegten Grafik in Listen oder in eine Tabelle ein. Dabei wird für x die Zeit in Jahren seit 1950 und für y die Höhe der Schulden in Mrd. Euro gewählt.

Schritt 2: Im Statistik-Menü wählt man den Funktionstyp. Im vorliegenden Fall wählt man „Exponentielle Regression", da die Grafik ein exponentielles Wachstum der Schulden nahelegt.

Schritt 3: Der Rechner gibt für den Funktionsterm $a \cdot b^x$ die berechneten Werte für a und b an. Damit ist die Näherungsfunktion bestimmt.

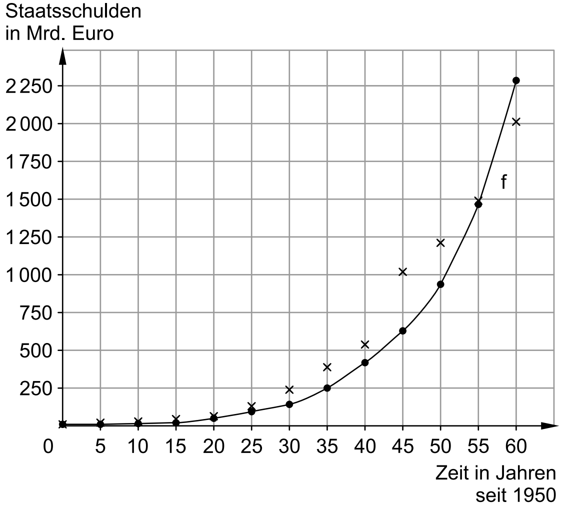
Alternative:
Man wählt das Verfahren der Parameterbestimmung.

Schritt 1: Als Funktionstyp wird die Exponentialfunktion mit der Gleichung $y = a \cdot b^x$ gewählt.

Schritt 2: Man wählt aus der vorgelegten Grafik geeignete Wertepaare aus, setzt die Koordinaten in die Funktionsgleichung ein und erhält ein Gleichungssystem mit den Unbekannten a und b.

Schritt 3: Das Gleichungssystem wird mithilfe des Rechners gelöst. Die Lösungen liefern dann die Gleichung der Näherungsfunktion.

c) Zeichnung des Graphen von f:



d) Bestimmung der jährlichen prozentualen Zunahme der Schulden:
Die Funktion f mit $f(x) = 11 \cdot e^{0{,}089 \cdot x}$ beschreibt näherungsweise die Schulden von 1950 bis 2010. Dabei gibt x die Anzahl der Jahre nach 1950 an. Der Term $f(x+1)$ stellt daher die Schulden dar, die $x+1$ Jahre nach 1950 vorhanden sind.
Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x+1) &= 11 \cdot e^{0{,}089 \cdot (x+1)} \\ &= 11 \cdot e^{0{,}089 \cdot x} \cdot e^{0{,}089} \\ &= f(x) \cdot e^{0{,}089} \end{aligned}$$

$11 \cdot e^{0.089 \cdot x} \rightarrow f(x)$	*Fertig*
$e^{0.089}$	1.09308

Mit $e^{0{,}089} \approx 1{,}093$ folgt, dass die Schulden jährlich um etwa 9,3 % zunehmen.

Untersuchung zum Maximum der momentanen Änderungsrate:
Die Funktion f beschreibt ein exponentielles Wachstum. Dies gilt auch für die momentane Änderungsrate f'. Da f' monoton wächst, nimmt f' sein Maximum am rechten Rand des Definitionsbereichs an, also bei $x = 60$. Man erhält:
$f'(60) \approx 204 < 250$
Es gibt somit keinen Zeitpunkt, bei dem die momentane Änderungsrate der Schulden größer als 250 Mrd. Euro pro Jahr ist.

$\frac{d}{dx}(f(x))\|x=60$	204.134

e) Begründung, dass die momentane Änderungsrate g ab 2005 abnimmt:
Wegen $e^{-0{,}25} < 1$ beschreibt der Term $250 \cdot e^{-0{,}25 \cdot x}$ eine exponentielle Abnahme.
Daher ist die Funktion g monoton fallend.