GUSTAV GRÖNNÄS

Schnellkurs Komplexe Zahlen

Definition
Regeln
Beispiele
Aufgaben
Lösungen
Formelsammlung

ISBN Softcover: 978-3-347-91314-1

Druck und Distribution im Auftrag des Autors:
tredition GmbH
An der Strusbek 10
22926 Ahrensburg
Germany

Die Publikation und Verbreitung erfolgen im Auftrag des Autors, zu erreichen unter:
tredition GmbH
Abteilung "Impressumservice"
An der Strusbek 10
22926 Ahrensburg
Deutschland

Inhalt

0 Einleitung

Die Erweiterung des Körpers der reellen Zahlen auf die komplexen Zahlen stellt das Handwerkszeug für die Beschreibung in der Realität auftretender Phänomene dar. So ist etwa die Erklärung, wie Wachstumsprozesse in periodisch wiederkehrende Prozesse, die Schwingungen, übergehen, in den Regeln komplexer Zahlen direkt enthalten. Das Wachstum in exponentieller Form ist zugleich eine komplexe Schwingung…

Die wenigen zusätzlichen Rechenregeln für komplexe Zahlen bringen vielfach erhebliche Vereinfachungen in Rechnungen. Oftmals werden Rechnungen erst durch die Verwendung komplexer Ausdrücke möglich.

Diese kleine Schrift soll einen einfachen Einstieg in das Thema ermöglichen. Alle erforderlichen Regeln werden besprochen und in wenigen Rechenbeispielen und -aufgaben erlernt. Eine Zusammenfassung findet sich im Anhang auch als Formelsammlung zum Heraustrennen.

Für Hannah zum Studienbeginn

im Herbst 2022

1 Definition

Die positive Quadratwurzel aus -1 wird als neues Element, die imaginäre Einheit *i*, definiert:

$$i := +\sqrt{-1}$$

Diese Definition wird zumeist in der Form $i^2 := -1$ dargestellt.

Beliebige Wurzeln aus negativen Ausdrücken können damit auf das Produkt zweier Wurzeln, davon die eine als die Wurzel aus -1 dargestellt werden:

Sei etwa $a = \sqrt{-3}$

dann ist $a = \sqrt{-1}\,\sqrt{3}$

Die imaginäre Einheit *i* kann damit auch als zusätzliches Vorzeichen einer Zahl verstanden werden. Diese Sicht erleichtert den Einstieg in die Thematik. Als 'Vorzeichen' wird *i* damit ebenso wie $\{+;-\}$ vor alle übrigen Ausdrücke gesetzt; so wäre etwa $-i\,3$ eine geeignete Darstellung.[1] Zu beachten ist allerdings, dass in allen Computerprogrammen nur die Darstellung mit der imaginären Einheit am rechten Ende eines Ausdrucks verstanden wird, also nur $-3\,i$ möglich ist.

Da in Berechnungen sowohl imaginäre, wie auch reelle Ausdrücke auftreten können, wird der *Körper der komplexen Zahlen,* bestehend aus reellen und imaginären Zahlen, definiert. Damit lassen sich die komplexen Zahlen als Elemente eines zweidimensionalen Raumes verstehen. Zur reellen Dimension mit der Einheit 1, kommt die imaginäre Dimension mit der Einheit *i*. Eine komplexe Zahl ist somit ein zweidimensionaler Vektor, bestehend aus den Komponenten $(reell; imaginär)$. Die Einheiten $(1; i)$ spannen den zweidimensionalen Raum der komplexen Zahlen auf.

Die *Basisdarstellung* eines solchen Vektors z wäre damit

$$z = (1)\,z_{reell} + (i)\,z_{imaginär}$$

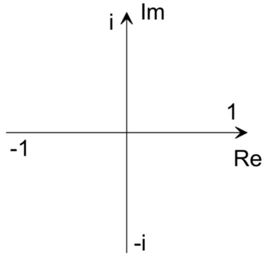
Die Einheit (1) wird üblicherweise fortgelassen, so dass die Darstellung

$$z = z_R + i\,z_I$$

(oder $z = z_R + z_I\,i$)

[1]Diese Darstellung wird hier bevorzugt gewählt

die Standarddarstellung einer komplexen Zahl über ihre Komponenten ist.



Das legt nahe, wie in anderen Vektorräumen, einen *'Betrag'* $|z|$ – als Entfernungsmaß – zu definieren:

$$|z| := +\sqrt{z_R^2 + z_I^2}$$

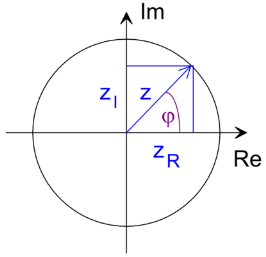
Eine komplexe Zahl ist dann eine Zahl (eines Betrages), die um einen Winkel φ in die *komplexe Zahlenebene* gedreht ist. Der Winkel ist also ein komplexer Drehwinkel und eine komplexe Zahl lässt sich damit über ihren Betrag und ihren Drehwinkel darstellen:[2]

$$z = |z| \angle \varphi$$

Der Drehwinkel wird gelegentlich auch als *Argument* der komplexen Zahl bezeichnet (engl.: *Phasor*):

$$\varphi = \arg(z)$$

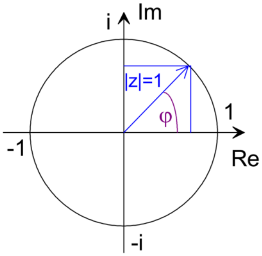
Die Komponenten der komplexen Zahl sind – in der geometrischen Interpretation – die Projektionen des Betrages auf die Achsen:



Diese Darstellung in der *GAUSSschen Zahlenebene* bietet die Möglichkeit einer weiteren Definition. Da der Drehwinkel eine Drehung in die imaginäre

[2]Die hier gezeigte Darstellungsform findet sich praktisch nur in der Elektrotechnik.

Dimension beschreibt, und die Einheiten dieses Vektorraumes jeweils den Betrag 1 haben, kann eine 'gedrehte 1' beschrieben werden.



Aus $e^0 = 1$ kann die nicht gedrehte 1 als exponentielle Darstellung $e^{0+i\,0} = 1$ gewählt werden. Der imaginäre Drehwinkel[3] $\frac{1}{2}\pi$ muss dann die Einheit i ergeben, also

$$i := e^{0+i\frac{1}{2}\pi}$$

Die negative 1 ergibt sich dann über den Drehwinkel π

$$-1 = e^{0+i\,\pi}$$

und die negative imaginäre Einheit *-i* ist folglich

$$-i = e^{0+i\frac{3}{2}\pi}$$

Aus den Potenzgesetzen lässt sich umformen

$$e^{0+i\frac{1}{2}\pi} = e^0\, e^{i\frac{1}{2}\pi}$$

oder verallgemeinert

$$e^{0+i\,\varphi} = e^0\, e^{i\,\varphi}$$

Der Betrag $|z|$ der komplexen Zahl kann über den exponentiellen Ausdruck

$$|z| = e^r$$

(entsprechend $\ln(|z|) = r$)

dargestellt werden, so dass

$$z = e^r\, e^{i\,\varphi}$$

der Darstellung

$$z = |z| \angle \varphi$$

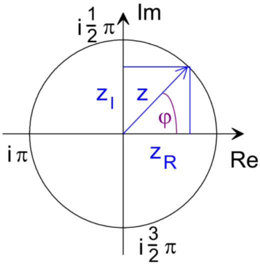
[3]Auf Grund der analytischen Darstellung kann der Winkel ausschließlich im Bogenmaß verwendet werden

entspricht. Allgemein ist eine komplexe Zahl damit in der Form

$$z = e^{r + i\varphi}$$

darstellbar.

Die Komponenten $(z_R; z_I)$ können als Projektionen aus dem Betrag und dem imaginären Drehwinkel errechnet werden:



$$z_R = |z| \cos(\varphi)$$

$$z_I = |z| \sin(\varphi)$$

Beispiel: Die komplexe Zahl

$$z = 5\angle 0.9273$$

also $\quad z = 5\, e^{i\, 0.9273}$

kann in ihre Komponenten zerlegt werden

$$z_R = 5\ \cos(0.9273)$$

$$z_R = 3$$

$$z_R = 5\ \sin(0.9273)$$

$$z_R = 4 \qquad\qquad \$$$

In der Rückumwandlung kann der Betrag einer komplexen Zahl aus der Betragsdefinition

$$|z| := +\sqrt{z_R^2 + z_I^2}$$

direkt errechnet werden.

Die Ermittlung des Drehwinkels gestaltet sich etwas schwieriger. Da die Gegenoperationen der goniometrischen Operationen nicht eindeutig sind, muss der richtige Winkel aus den Lösungen ausgewählt werden. Aus den