

Inhalt

1 Gleichungssysteme – Abbildungen

1.1	Der n-dimensionale Raum \mathbb{R}^n	13
1.1.1	Gleichungssysteme und Punkte des \mathbb{R}^n	13
1.1.2	Arithmetik im \mathbb{R}^n	15
1.1.3	Das innere Produkt	18
1.1.4	Normen	21
1.2	Abbildungen	24
1.2.1	Graphische Näherungslösung im \mathbb{R}^2	24
1.2.2	Abbildungen und Funktionen	25
1.2.3	Zusammenhang mit Gleichungen	29

2 Kontraktive Abbildungen – Konvergenz

2.1	Lipschitz-Stetigkeit, Kontraktionen	31
2.1.1	Beispiel zur Iteration	31
2.1.2	Lipschitz-Stetigkeit	34
2.1.3	Kontraktionssatz für eine reelle Veränderliche	36
2.2	Konvergente Folgen	39
2.2.1	Unendliche Folgen	39
2.2.2	Monoton fallende Nullfolgen	40
2.2.3	Konvergenz von Folgen	44
2.2.4	Beschränkte Folgen und Mengen	50
2.2.5	Konvergenzkriterien	52
2.2.6	Konvergenzgeschwindigkeit und -beschleunigung	56
2.2.7	Steffensen-Verfahren, Konvergenzordnung	58
2.3	Der Banachsche Fixpunktsatz	61
2.3.1	Topologische Begriffe	61
2.3.2	Der Banachsche Fixpunktsatz im \mathbb{R}^n	63
2.3.3	Der Banachsche Fixpunktsatz in vollständigen metrischen Räumen	67

3 Lösungsexistenz – Stetigkeit

3.1	Stetige Abbildungen – Zwischenwertsatz	69
3.1.1	Stetigkeit	69
3.1.2	Grenzwerte bei Abbildungen	73
3.1.3	Zusammengesetzte stetige Abbildungen	76
3.1.4	Zwischenwertsatz, Intervallteilungsverfahren	79
3.1.5	Regula falsi	81
3.2	Stetigkeit und Kompaktheit – Satz vom Maximum	85
3.2.1	Satz vom Maximum	85
3.2.2	Normäquivalenz im \mathbb{R}^n	87

10 Inhalt

3.2.3 Gleichmäßige Stetigkeit	88
3.2.4 Homöomorphismen	89
3.3 Der Borsuksche Antipodensatz	90
3.3.1 Konvexe Mengen	90
3.3.2 Der Borsuksche Antipodensatz im \mathbb{R}^n	92
3.3.3 Beweis des Borsukschen Satzes im \mathbb{R}^2	93
3.3.4 Beweis des Borsukschen Satzes im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$	97
3.3.5 Verallgemeinerungen des Borsukschen Satzes	101
3.3.6 Brouwerscher Fixpunktsatz und Satz von Borsuk-Ulam	104
4 Linearisierung von Funktionen – Differentialrechnung einer reellen Veränderlichen	107
4.1 Ausgangspunkt	107
4.1.1 Tangentenproblem	107
4.1.2 Ableitung von Polynomen	109
4.1.3 Idee des Newton-Verfahrens	111
4.2 Grundlagen der Differentialrechnung	114
4.2.1 Differenzierbare Funktionen	114
4.2.2 Differenzierungsregeln	116
4.2.3 Mittelwertsatz	121
4.2.4 Taylorsche Formel	123
4.2.5 Konvergenz des Newton-Verfahrens	128
4.2.6 Auswertung von Polynomen, Horner-Schema	130
4.3 Unendliche Reihen	135
4.3.1 Konvergenz unendlicher Reihen	135
4.3.2 Taylor-Reihen	137
4.3.3 Konvergenzkriterien	138
4.3.4 Absolut konvergente Reihen	141
4.3.5 Gleichmäßige Konvergenz	145
4.3.6 Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Grenzabbildungen	148
4.3.7 Potenzreihen	150
4.4 Exponentialfunktion, Logarithmus, Hyperbelfunktionen	153
4.4.1 Problemstellung: Funktionen mit der Eigenschaft $f = f'$	154
4.4.2 Eigenschaften der Exponentialfunktion	155
4.4.3 Logarithmus und a^x	158
4.4.4 Hyperbel- und Area-Funktionen	163
4.5 Trigonometrische Funktionen	165
4.5.1 Entfernungsbestimmung	165
4.5.2 Bogenlänge beim Kreis	166
4.5.3 Sinus und Cosinus	170
4.5.4 Tangens und Cotangens	173
4.5.5 Arcus-Funktionen	174

4.6 Anwendungsbeispiele	178
4.6.1 Bewegung von Massenpunkten	178
4.6.2 Fehlerabschätzung	182
4.6.3 Zur geometrischen Reihe: Sparkonten und Renten	183
4.6.4 Zur binomischen Reihe: physikalische Näherungsformeln	184
4.6.5 Zur Exponentialfunktion: Anwachsen und Abklingen	185
4.6.6 Trigonometrische Funktionen	188
4.6.7 Newton-Verfahren	188
4.6.8 Eindimensionale Extremalprobleme	189
5 Flächen- und Rauminhalte – Integralrechnung	
5.1 Grundgedanken der Integralrechnung	191
5.1.1 Flächen von Funktionen	191
5.1.2 Berechnung von Integralen durch Stammfunktionen	194
5.2 Integrale	196
5.2.1 Treppenfunktionen	196
5.2.2 Integrale von Regelfunktionen	197
5.2.3 Grundlegende Sätze über Integrale	202
5.2.4 Riemannsche Summen	205
5.3 Analytische Integration	209
5.3.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	209
5.3.2 Grundintegrale	211
5.3.3 Substitutionsmethode	213
5.3.4 Fourier-Reihen	217
5.3.5 Produktintegration	220
5.3.6 Integration rationaler Funktionen	225
5.3.7 Integration weiterer Funktionenklassen	228
5.3.8 Uneigentliche Integrale	229
5.4 Numerische Integration	230
5.4.1 Problemstellung	230
5.4.2 Interpolationsformel von Lagrange und Restgliedabschätzung	231
5.4.3 Integrationsformeln von Newton-Cotes	234
5.4.4 Trapez- und Simpson-Formel	238
5.4.5 Romberg-Integration	241
5.5 Geometrische Anwendungen	244
5.5.1 Flächeninhalte im \mathbb{R}^2	244
5.5.2 Rauminhalte im \mathbb{R}^n , mehrfache Integrale	246
5.5.3 Kurvenlängen	249
5.5.4 Rotationskörper	251
5.6 Anwendungen in der Mechanik	253
5.6.1 Vorgänge im Schwerefeld	254
5.6.2 Elastische Kräfte, Schwingungen	259

12 Inhalt

6 Behandlung von Gleichungssystemen – Differentialrechnung mehrerer reeller Veränderlicher	
6.1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	261
6.1.1 Gaußscher Algorithmus	261
6.1.2 Matrizenrechnung	266
6.1.3 Lineare Abbildungen	270
6.1.4 Reguläre Matrizen	271
6.1.5 Normen von Matrizen	273
6.2 Differentialrechnung mehrerer reeller Veränderlicher	275
6.2.1 Differenzierbarkeit	275
6.2.2 Ableitungsmatrix	278
6.2.3 Differenzierbarkeitskriterium	280
6.2.4 Regeln für differenzierbare Abbildungen	282
6.2.5 Höhere partielle Ableitungen	284
6.2.6 Taylor-Formel	286
6.2.7 Extremalprobleme	290
6.3 Nichtlineare Gleichungssysteme	292
6.3.1 Newton-Verfahren im \mathbb{R}^n	292
6.3.2 Konvergenz des Newton-Verfahrens im \mathbb{R}^n	295
6.3.3 Implizite Funktionen, Inversensatz	300
6.3.4 Extrema mit Nebenbedingungen	304
Anhang: Reelle Zahlen	
A1 Das Axiomensystem der reellen Zahlen	309
A2 Abgeleitete Regeln	310
A3 Natürliche Zahlen	312
A4 Ganze, rationale und irrationale Zahlen	314
A5 Archimedische Eigenschaft und Intervallschachtelungsprinzip	315
A6 Dezimalzahlen	316
A7 n -te Wurzel aus a	317
Lösungen zu den Übungen¹⁾	320
Literatur	327
Symbole	329
Sachverzeichnis	330