

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Metrische Räume. Topologische Grundbegriffe	1
1.1 Der n -dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$	6
1.2 Konvergenz. Satz von Bolzano-Weierstraß	8
1.3 Die Regeln von de Morgan	10
1.4 Äquivalenzrelation	10
1.5 Metrischer Raum	11
1.6 Konvergenz und Vollständigkeit	12
1.7 Normierter Raum und Banachraum	15
1.8 Die Maximumnorm	17
1.9 Innenproduktraum und Hilbertraum	19
1.10 Der Hilbertsche Folgenraum l^2	20
1.11 Innerer Punkt, Randpunkt, Häufungspunkt	21
1.12 Offene und abgeschlossene Mengen	22
1.13 Satz über Inneres, Rand und abgeschlossene Hülle	23
1.14 Charakterisierung der abgeschlossenen Hülle	24
1.15 Metrischer Teilraum	25
1.16 Kompakte Mengen	25
1.17 Abstand zwischen Mengen. Umgebungen von Mengen	26
1.18 Orthogonalität und Winkel im $\mathbb{R}^n$	28
1.19 Unterräume und Ebenen im $\mathbb{R}^n$	29
1.20 Gerade, Strecke, Polygonzug	30
1.21 Hyperebenen und Halbräume	31
1.22 Konvexe Mengen	32
1.23 Konvexe Funktionen	35
Aufgaben	35
§ 2. Grenzwert und Stetigkeit	39
2.1 Grenzwert und Stetigkeit	41
2.2 Schwankung einer Funktion. Limes superior und Limes inferior	45
2.3 Stetigkeitsmodul	46
2.4 Komposition stetiger Funktionen	46
2.5 Stetige vektor- und skalarwertige Funktionen	47
2.6 Polynome in mehreren Veränderlichen	48
2.7 Stetigkeit bezüglich einzelner Veränderlichen	48
2.8 Lineare Abbildungen	49
2.9 Stetigkeit und Kompaktheit	51

2.10	Extremwerte bezüglich einzelner Variablen	52
2.11	Satz über die gleichmäßige Stetigkeit	53
2.12	Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion	54
2.13	Das Halbierungsverfahren	54
2.14	Offene Überdeckungen kompakter Mengen	57
2.15	Gleichmäßige Konvergenz	58
2.16	Satz von Dini	59
2.17	Weierstraßsches Majorantenkriterium	59
2.18	Potenzreihen in mehreren Veränderlichen	59
2.19	Fortsetzung stetiger Funktionen. Satz von Tietze	61
2.20	Landau-Symbole	64
	Aufgaben	65
§ 3.	Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen	68
3.1	Partielle Ableitungen. Gradient	70
3.2	Graphische Darstellung einer Funktion. Höhenlinien	72
3.3	Vertauschung der Reihenfolge der Differentiation	75
3.4	Der allgemeine Fall	76
3.5	Funktionalmatrix und Funktionaldeterminante	78
3.6	Höhere Ableitungen. Die Klassen C^k	79
3.7	Lineare Differentialoperatoren	80
3.8	Differenzierbarkeit und vollständiges Differential	81
3.9	Satz über Stetigkeit	83
3.10	Die Kettenregel	85
3.11	Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung	87
3.12	Richtungsableitungen	89
3.13	Der Satz von Taylor	90
3.14	Das Taylorpolynom	93
3.15	Die Taylorsche Reihe	94
3.16	Fläche und Tangentialhyperebene	96
3.17	Die Hessematrix	99
3.18	Differentiation im Komplexen. Holomorphie	100
3.19	Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen	101
3.20	Bewegung, winkeltreue und konforme Abbildung	102
	Aufgaben	103
§ 4.	Implizite Funktionen. Maxima und Minima	106
4.1	Fixpunkte kontrahierender Abbildungen. Kontraktionsprinzip	106
4.2	Einige Hilfsmittel. Lipschitzbedingung im $\mathbb{R}^n$	109
4.3	Das Newton-Verfahren	111
4.4	Implizite Funktionen	111
4.5	Satz über implizite Funktionen	114
4.6	Umkehrabbildungen. Diffeomorphismen	118
4.7	Offene Abbildungen	121
4.8	Quadratische Formen	122
4.9	Maxima und Minima	124

4.10	Das Fermatsche Kriterium für lokale Extrema	124
4.11	Hinreichende Bedingung für ein Extremum	125
4.12	Extrema mit Nebenbedingungen	128
4.13	Lagrangesche Multiplikatorenregel	130
4.14	Cordilar (Lagrangesche Multiplikatorenregel)	131
4.15	Lokale Klassifikation von glatten Funktionen	133
4.16	Lemma von Marston Morse	135
	Aufgaben	138
§ 5.	Allgemeine Limestheorie. Wege und Kurven	142
5.1	Gerichtete Menge und Netz	142
5.2	Der Grenzwert eines Netzes	143
5.3	Konvergenzkriterium von Cauchy	145
5.4	Reellwertige Netze	145
5.5	Monotone Netze	146
5.6	Das Riemann-Integral als Netzlimes	146
5.7	Netzlimes für Teilintervalle	147
5.8	Konfinale Teilfolgen	148
5.9	Metrische Ordnung und Riemannsche Summendefinition des Integrals	149
	Wege und Kurven	151
5.10	Weg und Kurve	153
5.11	Die Weglänge	160
5.12	Die Weglänge als Funktion von t	161
5.13	Äquivalente Darstellungen, Orientierung	163
5.14	Die Länge einer Kurve	164
5.15	Die Bogenlänge als Parameter	168
5.16	Tangente und Normalenebene	169
5.17	Ebene Kurven, positive Normalen	170
5.18	Krümmung und Krümmungsradius	171
5.19	Ebene Kurven	174
5.20	Funktionen von beschränkter Variation	175
5.21	Darstellungssatz von C. Jordan	177
5.22	Satz über Rektifizierbarkeit	177
	Anwendung: Die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung	178
5.23	Die Bewegungsgleichungen	178
5.24	Die Lösung des Zweikörperproblems	179
5.25	Satz über das Zweikörperproblem	182
5.26	Eindeutigkeitssatz	184
5.27	Historisches zu den Keplerschen Gesetzen	184
	Aufgaben	186
§ 6.	Das Riemann-Stieltjes-Integral. Kurven- und Wegintegrale	190
6.1	Das Riemann-Stieltjes-Integral	191
6.2	Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals	192
6.3	Partielle Integration	193

6.4	Transformation in ein Riemann-Integral	194
6.5	Weitere Beispiele	194
6.6	Bemerkungen	195
6.7	Mittelwertsätze für Riemann-Stieltjes-Integrale	197
6.8	Zweiter Mittelwertsatz für Riemannsche Integrale	197
6.9	Kurvenintegrale bezüglich der Bogenlänge	198
6.10	Eigenschaften von Kurvenintegralen	199
6.11	Anwendungen: Masse, Schwerpunkt, Trägheitsmoment	199
6.12	Wegintegrale	201
6.13	Eigenschaften und Rechenregeln für Wegintegrale	202
6.14	Vektorfelder	203
6.15	Bewegung in einem Kraftfeld	204
6.16	Gradientenfelder. Stammfunktion und Potential	206
6.17	Die Integrabilitätsbedingung	208
6.18	Nochmals Kraftfelder	212
6.19	Komplexe Wegintegrale	213
6.20	Integralsatz von Cauchy	214
6.21	Satz über Stammfunktionen	215
	Aufgaben	216
§ 7.	Jordanscher Inhalt und Riemannsches Integral im $\mathbb{R}^n$	218
7.1	Anforderungen an den Inhaltsbegriff	219
7.2	Zerlegungen eines Intervalls	220
7.3	Intervallsummen	222
7.4	Äußerer und innerer Inhalt. Jordan-Inhalt	223
7.5	Würfelsummen	225
7.6	Quadrierbare Mengen. Satz	226
7.7	Produktmengen, Produktregel	227
7.8	Abbildungen von Mengen	228
7.9	Lineare Abbildungen	229
	Das Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$	231
7.10	Definition und einfache Eigenschaften des Integrals	232
7.11	Satz über gliedweise Integration	237
7.12	Jordanscher Inhalt und Riemannsches Integral	238
7.13	Die Riemannsche Summendefinition des Integrals	239
7.14	Parameterabhängige Integrale	241
7.15	Iterierte Integrale. Der Satz von Fubini	243
7.16	Das Cavalierische Prinzip	245
7.17	Die Abbildung von Gebieten. Das Lemma von Sard	246
7.18	Transformation von Integralen. Die Substitutionsregel	247
7.19	Beispiele. 1. Ebene Polarkoordinaten. 2. Zylinderkoordinaten 3. Kugelkoordinaten. 4. Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$	250 252
7.20	Uneigentliche Integrale	255
7.21	Beispiele. Die Eulersche Betafunktion	256
7.22	Die Faltung	258

7.23	Approximation durch C^∞ -Funktionen. Mittelwerte	261
7.24	Der Weierstraßsche Approximationssatz	263
7.25	Masse und Schwerpunkt	265
7.26	Potential einer Massenbelegung	266
7.27	Rotationssymmetrische Massenbelegungen	268
	Aufgaben	273
§ 8.	Die Integralsätze von Gauß, Green und Stokes	277
8.1	Gaußscher Integralsatz in der Ebene	278
8.2	Vektorprodukt und Parallelogrammfläche	281
8.3	Flächen im $\mathbb{R}^3$	283
8.4	Der Inhalt einer Fläche im $\mathbb{R}^3$	286
8.5	Oberflächenintegrale	289
8.6	Gaußscher Integralsatz im $\mathbb{R}^3$	291
8.7	Physikalische Bedeutung des Gaußschen Satzes. Geschwindigkeitsfelder	294
	Wärmeleitung	295
8.8	Gramsche Matrizen und Determinanten	296
8.9	Der Inhalt von m -dimensionalen Flächen im $\mathbb{R}^n$	297
8.10	Der Fall $m = n - 1$	299
8.11	Die Rotation eines Vektorfeldes	301
8.12	Der Satz von Stokes	301
	Aufgaben	305
§ 9.	Das Lebesgue-Integral	308
9.1	Mathematische Vorbereitung. Das Rechnen in $\overline{\mathbb{R}}$	311
9.2	Intervalle. Darstellung von offenen Mengen	313
9.3	Mengen. Algebren und σ -Algebren	314
9.4	Das äußere Lebesgue-Maß	315
9.5	Das Lebesguesche Maß. Hauptsatz	317
9.6	Offene Mengen und G_δ -Mengen	320
9.7	Das Lebesguesche Integral im $\mathbb{R}^n$	321
9.8	Nichtnegative Funktionen	325
9.9	Meßbare Funktionen	326
9.10	Treppenfunktionen und Elementarfunktionen	327
9.11	Meßbarkeit und Integrierbarkeit	329
9.12	Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{C}$	330
9.13	Satz von Beppo Levi	331
9.14	Satz von der majorisierten Konvergenz	332
9.15	Lemma von Fatou	333
9.16	Das Prinzip von Cavalieri	333
9.17	Die Produktformel	334
9.18	Satz von Fubini	335
9.19	Die Substitutionsregel	336
9.20	Die L^p -Räume. Höldersche und Minkowskische Ungleichung	337
9.21	Dichtesatz	340

Das Lebesgue-Integral in $\mathbb{R}$	341
9.22 Absolutstetige Funktionen	341
9.23 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	342
9.24 Überdeckungssatz von Vitali	342
9.25 Satz über das Maß der Bildmenge	344
9.26 Satz über Differenzierbarkeit monotoner Funktionen	344
9.27 Satz über das Integral der Ableitung	345
9.28 Abschluß des Beweises	346
9.29 Satz über Absolutstetigkeit	347
9.30 Partielle Integration	348
9.31 Die Substitutionsregel für $n = 1$	348
9.32 Ausblicke: 1. Integration in abstrakten Maßräumen. 2. Das Lebesgue-Stieltjes-Maß	348
3. Der Fall $n = 1$. 4. Integration im Banachraum. Das Bochner-Integral	349
Aufgaben	349
§ 10. Fourierreihen	354
10.1 Trigonometrische Reihe und Fourierreihe. Rechenregeln	358
10.2 Satz von Riemann-Lebesgue	361
10.3 Satz	361
10.4 Konvergenzsatz	362
10.5 Konvergenzsatz für Sprungstellen	363
10.6 Gerade und ungerade Fortsetzung	364
10.7 Umrechnung auf andere Periodenlängen	364
10.8 Riemannscher Lokalisationssatz	365
10.9 Gleichmäßige Konvergenz	365
Die Hilbertraumtheorie der Fourierreihen	366
10.10 Orthonormalfolgen im Hilbertraum	366
10.11 Fourierreihen bezüglich einer Orthonormalfolge	367
10.12 Konvergenzsatz	368
10.13 Vollständigkeit einer Orthonormalfolge	368
10.14 Der Hilbertraum L^2_π	369
10.15 Satz über Konvergenz im quadratischen Mittel	370
10.16 Nochmals Absolutkonvergenz	371
Aufgaben	372
Lösungen und Lösungshinweise zu ausgewählten Aufgaben	374
Literatur	384
Bezeichnungen	385
Namen- und Sachverzeichnis	387