

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Theorie	8
1 Existenz- und Eindeutigkeitsätze	8
1.1 Grundlagen	8
1.1.1 Explizite Differentialgleichungen	8
1.1.2 Systeme	9
1.1.3 Zusammenhang von Gleichungen und Systemen	10
1.2 Existenz von Lösungen	12
1.2.1 Existenzsatz von Peano	12
1.2.2 Fortsetzung von Lösungen	13
1.3 Eindeutigkeit von Lösungen	15
1.3.1 Picard-Lindelöf	15
1.3.2 Picard'sches Iterationsverfahren	17
1.3.3 Lipschitz-Stetigkeit bzgl $\vec{y}$	18
1.3.4 Weitere Eindeutigkeitsätze	19
1.4 Abhängigkeit der Lösungen	21
1.4.1 Stetige Abhängigkeit der Lösungen	21
1.4.2 Differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen	22
2 Explizite Gleichungen 1. Ordnung	24
2.1 Richtungsfelder, Geometrische Interpretation	24
2.1.1 Orthogonale Trajektorien	25
2.2 Differentialungleichungen	26
2.2.1 Maximal- und Minimallösung	27
2.3 Gleichungen mit getrennten Variablen	28
2.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	31
2.5 Spezielle integrierbare Gleichungen	34
2.5.1 $y' = f(ax + by + c)$	34
2.5.2 $y' = f(y/x)$ Homogene Gleichungen	35
2.5.3 $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$	36
2.5.4 $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$ Bernoulli-Gleichung	38
2.5.5 $y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$ Riccati-Gleichung	39
2.5.6 $y' = ax^\alpha + cy^2$ Spezielle Riccati Dgl	41
3 Implizite Gleichungen 1. Ordnung	43
3.1 Reguläre und singuläre Linienelemente	43
3.2 Verwendung von $p = y'$ als Parameter	45

3.2.1	$y = f(x, y')$	46
3.2.2	$x = g(y, y')$	46
3.2.3	Legendre-Transformation	47
3.2.4	$y = xy' + g(y')$ Clairaut-Gleichung	48
3.2.5	$y = xf(y') + g(y')$ d'Alembert-Gleichung	49
3.3	Gleichungen der Form $P dx + Q dy = 0$	50
3.3.1	Exakte Differentialgleichungen	51
3.3.2	Euler Multiplikatoren	53
4	Differentialgleichungen und Systeme höherer Ordnung	54
4.1	Spezielle Gleichungen höherer Ordnung	54
4.1.1	y kommt nicht vor	54
4.1.2	x kommt nicht vor	54
4.1.3	$y'' = g(y)$	56
4.1.4	$F(x, \frac{y'}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}) = 0$	57
4.1.5	Exakte Gleichungen höherer Ordnung	58
4.2	Autonome Gleichungen und Systeme	60
4.2.1	Autonome Systeme 2. Ordnung	62
4.3	Potenzreihenansatz	65
4.3.1	Koeffizientenvergleich	66
4.3.2	Fortgesetzte Differentiation	67
4.3.3	Lineare Gleichungen 2. Ordnung mit singulären Stellen	68
5	Lineare Gleichungen und Systeme	70
5.1	Komplex- und matrixwertige Funktionen	70
5.1.1	Matrix-Exponentialfunktion	71
5.2	Lineare Systeme	73
5.2.1	Struktur der Lösungen	74
5.2.2	Zusammenhang von reellen und komplexen Systemen	74
5.2.3	Homogene Systeme	75
5.2.4	Reduktionsverfahren von d'Alembert	77
5.2.5	Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten	78
5.2.6	Inhomogene Systeme	81
5.3	Lineare Differentialgleichungen	83
5.3.1	Struktur der Lösungen	84
5.3.2	Homogene Gleichungen	84
5.3.3	Wronski-Determinante	85
5.3.4	Reduktionsverfahren von d'Alembert	86
5.3.5	Homogene Gleichungen mit konstanten Koeffizienten	88

5.3.6	Inhomogene Gleichungen	89
5.3.7	Eulersche Gleichungen	92
5.4	Lineare Gleichungen und Systeme mit periodischen Koeffizienten	94
5.4.1	Gleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten	96
6	Laplace Transformation	97
6.1	Definition und Beispiele	97
6.2	Rechenregeln	99
6.3	Faltungsprodukt	101
6.4	Anwendungen auf lineare Gleichungen und Systeme	102
6.5	Dirac-Deltafunktion	104
7	Stabilität	106
7.1	Definitionen	106
7.2	Stabilitätssätze für lineare Systeme	107
7.3	Fast-lineare Systeme	110
7.4	Ljapunoff Theorie	112
8	Rand- und Eigenwertprobleme	114
8.1	Lineare Randwertaufgaben	114
8.2	Lineare Randwertaufgaben 2. Ordnung	116
8.3	Grundlösungen und Greensche Funktion	118
8.4	Sturm - Liouville'sche Eigenwertaufgaben	120
9	Näherungsverfahren	122
Teil II: Aufgaben		124
10	Aufgaben zu Gleichungen 1. Ordnung	124
10.1	Theoretisches	124
10.2	Qualitative Aussagen	132
10.3	Richtungsfelder, orthogonale Trajektorien	138
10.4	Trennung der Variablen	144
10.5	Lineare Gleichungen 1. Ordnung	155
10.6	Einfache Substitutionen	162
10.7	Riccati-Gleichungen	174
10.8	Implizite Gleichungen 1. Ordnung	181
10.9	Exakte Gleichungen und Euler Multiplikatoren	192

11 Aufgaben zu Systemen und Gleichungen höherer Ordnung	201
11.1 Theoretisches	201
11.2 Elementare Typen	208
11.3 Picardsches Iterationsverfahren	217
11.4 Potenzreihenansatz	224
11.5 Aufgaben zu autonomen Systemen	235
11.6 Aufgaben zur Stabilitätstheorie	243
12 Aufgaben zu Linearen Problemen	254
12.1 Theoretisches	254
12.2 Lineare Systeme	260
12.3 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	266
12.4 Lineare Differentialgleichungen	274
12.5 Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten	284
12.6 Aufgaben zur Laplace-Transformation	292
12.7 Randwertprobleme	300
12.8 Eigenwertprobleme	304
Literaturverzeichnis	308
Laplace-Transformation	309
Symbolverzeichnis	310
Abkürzungen	310
Index	311