2024

Abitur

Original-Prüfu
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Gymnasium Baden-Wü

Mathematik L

+ Offizielle Musteraufgaben
+ Aufgaben im Stil der Prüfung

PDF

STARK

Inhaltsverzeichnis

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

Das Abitur 2024 I
Die Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik I
Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung VI
Bewertung der Prüfungsarbeiten VI
Der Aufbau des Buches VII
Einsatz eines WTR am Beispiel des TI-30X Plus MathPrint VIII

Übungsaufgabensatz 1 im Stil der Prüfung

Teil A 1

Teil B: Analysis

Aufgabe I 1.1 $r(x) = -0{,}1x^2 \cdot (x-6)$; $r_k(x) = -kx^2 \cdot (x-6)$ 19
Modellierung, Steigung, Schnitt mit Kreis

Aufgabe I 1.2 $f_a(x) = \sin(x) - \frac{1}{a} \cdot \sin(ax)$ 20
Normale, Integral, Parameter

Teil B: Analytische Geometrie

Aufgabe II 1 Ebenenschar, Kegel, Kugel 29

Teil B: Stochastik

Aufgabe III 1.1 Binomialverteilung, Standardabweichung, Vierfeldertafel, ... 37
bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Abhängigkeit

Aufgabe III 1.2 Normalverteilung, Dichtefunktion 38

Übungsaufgabensatz 2 im Stil der Prüfung

Teil A 45

Teil B: Analysis

Aufgabe I 1.1 $z_k(t) = 20k \cdot t \cdot e^{-k \cdot t^2}$ 59
momentane Änderungsrate, Grenzwert, Interpretation

Aufgabe I 1.2 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3$ 60
Umkehrfunktion, Rotationsvolumen

Teil B: Analytische Geometrie

Aufgabe II 1 Pyramide, Abstand windschiefer Geraden 70

Teil B: Stochastik

Aufgabe III 1 Normalverteilung, bedingte Wahrscheinlichkeit, ... 78
Hypothesentest

Offizielle Beispielaufgabe für 2024

Teil A MA-1

Teil B: Analysis

Aufgabe I 1.1 $f(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + 1$ MA-15
Brücke aus Holz, Modellierung, Symmetrie, Höhe und Länge, Steigungswinkel, Masse

Aufgabe I 1.3 $k(x) = \frac{3}{5} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + \frac{4}{5}$ MA-16
Modellierung, Flächeninhalt

Aufgabe I 2 $f(x) = e^x$; $h(x) = \frac{1}{x-2} + 4$ MA-25
Tangente, Flächeninhalt, Rotationsvolumen, Definitionsmenge, Grenzwert, Umkehrfunktion, Verkettung

Teil B: Analytische Geometrie

Aufgabe II 1.1 Ebenengleichung, Abstand, Flächeninhalt MA-35
Aufgabe II 1.2 Podest, Flächeninhalt, Scheinwerfer, Abstand MA-35

Aufgabe II 2 Doppelpyramide, Ebenenschar, Winkel, Drehung MA-42

Teil B: Stochastik

Aufgabe III 1 Stahlkugeln, Binomialverteilung, bedingte Wahrscheinlichkeit, Hypothesentest, Fehler zweiter Art MA-50

Aufgabe III 2.1 Fahrradhändler, Binomialverteilung, bedingte Wahrscheinlichkeit, Mindestanzahl MA-57
Aufgabe III 2.2 Zucker, Normalverteilung, Dichtefunktion, Intervall MA-58

Abiturprüfung 2021

Pflichtteil – Aufgabensatz 1 2021-1

Pflichtteil – Aufgabensatz 2 2021-13

Wahlteil Analysis

Aufgabe A 1.1 $f(x) = 0{,}0008x^4 - 0{,}12x^2 + 5$ 2021-25
Abenteuerspielplatz, Gefälle, knickfreier Übergang, Länge, Ausleuchtung, Volumen

Aufgabe A 1.2 Verkettung, Funktionswert, Nullstellen 2021-26

Aufgabe A 1.3 Verkettung, waagrechte Tangente 2021-26
(„vertieft verständnisorientierte Aufgabe“)

Analysis A 2.1 $g(t) = t^2 \cdot e^{-t}$; $h(t) = (-t^2 - 2t - 2) \cdot e^{-t} + 3{,}2$; 2021-34
$k(t) = -2{,}3e^{-t} + 3{,}5$
Apfel- und Birnbaum, Wachstumsgeschwindigkeit, Höhe

Analysis A 2.2 $f_t(x) = -4x^3 + 12tx^2$ 2021-35
Nullstellen, Flächeninhalt, Tangente, Berührpunkt

Wahlteil Analytische Geometrie

Aufgabe B 1 Pyramide, Ebene, Oberflächeninhalt, Abstand, ... 2021-43
vektorieller Beweis

Aufgabe B 2 Gewächshaus, Rauminhalt, Ebenenschar, Winkel 2021-49

Wahlteil Stochastik

Aufgabe C 1 Honiggläser, Normalverteilung, Erwartungswert,
Binomialverteilung, Mindestzahl 2021-56

Aufgabe C 2.1 Glücksrad, Binomialverteilung, faires Spiel, Nullhypothese .. 2021-62

Aufgabe C 2.2 Hypothesentest, Fehler 2. Art 2021-62

Abiturprüfung 2022

Pflichtteil – Aufgabensatz 1 2022-1

Pflichtteil – Aufgabensatz 2 2022-13

Wahlteil Analysis

Aufgabe A 1.1 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ 2022-23
Nullstellen, Wendepunkt, Tangente, Integralfunktion, Symmetrie, Spiegelung

Aufgabe A 1.2 $f_a(x) = a \cdot \sin(a \cdot \pi \cdot x)$ 2022-24
Periode, Dreieck, Parameter, Ortskurve

Analysis A 2.1 $f(t) = (2t - t^2) \cdot e^{2-t}$ 2022-33
Wasservolumen, momentane Änderungsrate, Anfangsbestand, Interpretation

Analysis A 2.2 $k_a(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}$ 2022-34
Asymptoten, Ableitung, Extrempunkt, Tangente

Wahlteil Analytische Geometrie

Aufgabe B 1 Pyramiden, Dreieck, Ebenenschar, Winkel, Quader 2022-45

Aufgabe B 2 Geradenschar, Ebene, Parameter, Abstand 2022-52

Wahlteil Stochastik

Aufgabe C 1 Tintenpatronen, Binomialverteilung, Normalverteilung, Dichtefunktion 2022-58

Aufgabe C 2 Glücksrad, Binomialverteilung, Mindestanzahl, Nullhypothese, Fehler 2. Art 2022-64

Abiturprüfung 2023 .... **www.stark-verlag.de/mystark**
Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode siehe Umschlaginnenseite).

Bei **MyStark** finden Sie:
– **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil A, teilweise mit Veranschaulichung durch **Videos**
– **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht
– Weiteres Übungsmaterial

Den Zugangscode zu MyStark finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Im Interaktiven Training und unter
www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/
finden Sie ein kostenloses **Glossar** zum Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mit hilfreichen Abbildungen und Erläuterungen.

Kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung finden Sie ab Mitte März 2024 unter:
www.stark-verlag.de/schule/unser-angebot/kurse/online-kurse

Autoren
Winfried König, Volker Stemberg, Dr. Raimund Ordowski
(Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung, Übungsaufgabensätze im Stil der Prüfung sowie Lösungen aller Aufgaben)

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

Das Abitur 2024

Die Einführung des fünfstündigen Leistungsfaches Mathematik im Abiturjahrgang 2021 hatte weitreichende Änderungen in der schriftlichen Abiturprüfung zur Folge, die für die Prüfung 2022 fortbestanden. Im Abiturjahrgang 2023 kamen weitere Inhalte neu dazu, andere waren hingegen nicht mehr relevant für die Prüfung (s. u.). Auch für das Jahr 2024 stehen Änderungen an. Für Sie am wichtigsten: Erstmals wählen auch Schülerinnen und Schüler Aufgaben aus (siehe „Teil A"); ferner gibt es kleinere Anpassungen bei den Inhalten. Aus diesem Grund finden Sie in diesem Buch u. a. zwei vollständige Übungsmustersätze im Stil der Abiturprüfung, die die neuen Formate, Herausforderungen und Inhalte präzise abbilden.

Dennoch bleiben zahlreiche frühere Abituraufgaben sowie vom Kultusministerium veröffentlichte Aufgaben zur Vorbereitung als Übungsmaterial weiterhin gut geeignet.

Die Jahrgänge 2021 und 2022 finden Sie neben den erwähnten zwei Übungsmustersätzen und den offiziellen Beispielaufgaben für das Abitur 2024 mit gewohnt ausführlichen Lösungen in diesem Buch; die Abiturprüfung 2023 steht Ihnen – selbstverständlich ebenfalls inklusive ausführlicher Lösungen – auf der Plattform MyStark zum Download zur Verfügung. Dort finden Sie außerdem weiteres offizielles Übungsmaterial mit ausführlichen Lösungen für die Inhalte der Abiturprüfung ab 2023.

Die Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik

Grundlage für das Abitur ist seit dem Jahr 2023 der Bildungsplan 2016 für das achtjährige Gymnasium. Die schriftliche Prüfung in Mathematik erstreckt sich über die Gebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik. Die Liste auf der nächsten Seite zeigt die Inhalte, die erst seit der Einführung des Leistungsfaches 2021, seit 2023 bzw. ab 2024 Gegenstand der Abiturprüfung sein können.

Analysis:
- einfache allgemeine Exponentialfunktionen (ab 2024)
- Wurzelfunktion (seit 2023)
- Logarithmusfunktion (seit 2023)
- Umkehrfunktion (seit 2023)
- Volumen von Rotationskörpern auch mithilfe der Integralrechnung

Analytische Geometrie:
- Vektorprodukt (seit 2023)
- Abstand windschiefer Geraden

Stochastik:
- bei diskreten Zufallsgrößen und bei der Binomialverteilung neben Erwartungswert und Standardabweichung auch die Varianz (ab 2024)
- elementare Kombinatorik (seit 2023)
- Vierfeldertafeln (seit 2023)
- bedingte Wahrscheinlichkeit (seit 2023)
- stochastische Unabhängigkeit (seit 2023)
- Standardabweichung der Binomialverteilung
- ein- und zweiseitige Tests mithilfe der Binomialverteilung, Fehler 1. und 2. Art
- Normalverteilung (Dichtefunktion, Erwartungswert, Standardabweichung, Glockenkurve)

Sie erkennen auf einen Blick, dass in der Stochastik die meisten Änderungen vorgenommen wurden.

Nicht Gegenstand der schriftlichen Prüfung sind:
- Folgen
- Wachstumsprozesse
- Differenzialgleichungen
- Ortslinien (Wegfall ab 2023)
- Beweise mithilfe von Vektoren (Wegfall ab 2023)
- allgemeine stetige Verteilungen (Wegfall ab 2023)
- Flächenberechnung unbegrenzter Flächen, uneigentliche Integrale (Wegfall ab 2024)

Die schriftliche Prüfung ist ab 2024 in einen **Teil A (ohne Hilfsmittel)** und einen **Teil B (mit Hilfsmitteln)** unterteilt. Auch in Baden-Württemberg werden nun sogenannte Bewertungseinheiten (BE) verwendet; zwei BE entsprechen einem (früher üblichen) Verrechnungspunkt (VP).

Teil A (ohne Hilfsmittel)

In der Abiturprüfung 2024 umfasst der **hilfsmittelfreie Teil A** (früher Pflichtteil) 30 Bewertungseinheiten, also ein Viertel der Gesamtprüfung. Es werden darin Grundkompetenzen in Form von kleineren Aufgaben abgeprüft. Ab 2024 ist der Teil A unterteilt in **vier Pflichtaufgaben** und **sechs Wahlaufgaben**, von denen Sie **zwei Aufgaben auswählen**. Insgesamt sind im Teil A also **sechs Aufgaben mit jeweils 5 BE** zu bearbeiten.

Die neue Struktur wird in folgendem Schema dargestellt:

	Pflichtaufgaben (20 BE)		**Wahlaufgaben (10 BE)**	
	vier elementare Aufgaben (ohne AB III); keine Auswahlmöglichkeit		sechs komplexere Aufgaben (mit AB III); Prüfling wählt zwei beliebige Aufgaben aus	
Analysis	P1, P2	je 5 BE	W1, W2	je 5 BE
Geometrie	P3	5 BE	W3, W4	je 5 BE
Stochastik	P4	5 BE	W5, W6	je 5 BE

Beispielsweise ist es also möglich, dass Sie insgesamt vier Analysis-Aufgaben (P1, P2, W1, W2) bearbeiten oder auch insgesamt drei Stochastik-Aufgaben (P4, W5, W6). Wie dargestellt, enthalten die Aufgaben aus dem Block „Wahlaufgaben“ auch komplexere Aufgaben (mit dem höchsten Anforderungsbereich III), die Aufgaben aus dem Block „Pflichtaufgaben“ nicht.

Für den Teil A sind **keinerlei Hilfsmittel** zugelassen.

Die Bearbeitung zum Teil A muss **nach spätestens 100 Minuten** abgegeben werden!

Teil B (mit Hilfsmitteln)

Der **Teil B** (früher Wahlteil) umfasst seit 2023 drei Viertel der Gesamtprüfung. Auf die Analysis entfallen 40 BE, auf Geometrie und Stochastik je 25 BE. Grundsätzlich beinhaltet Teil B größere Aufgaben zu den drei Teilgebieten mit zusammenhängenden Fragestellungen, wobei verstärkt Transfer, Modellieren von realen Situationen und Entwickeln von Lösungsstrategien gefragt sind.

Für den Teil B sind als **Hilfsmittel** – neben einem Nachschlagewerk zur deutschen Rechtschreibung – das **Dokument mit mathematischen Formeln** (im Folgenden als Formeldokument bezeichnet) des Instituts für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) sowie ein wissenschaftlicher Taschenrechner (**WTR**) ohne Handbuch oder Anleitung zugelassen.

Baden-Württemberg ▪ Leistungsfach Mathematik

Übungsaufgabensatz 1 im Stil der Prüfung

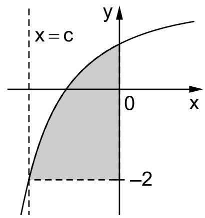
Teil A

Pflichtaufgaben BE

Bearbeiten Sie **alle** Aufgaben P1 bis P4.

P1 Abgebildet ist der Graph der Funktion f mit:

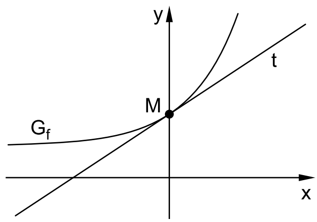
$$f(x) = -\frac{4}{(x+2)^2} + 2;\ \ x > -2$$



a Begründen Sie, dass c den Wert -1 hat. 2

b Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche. 3

P2 Für ein $k > 0$ ist die Funktion f mit $f(x) = 1 + e^{k \cdot x}$ gegeben.
Der Graph G_f schneidet die y-Achse im Punkt M.
Die Abbildung zeigt G_f sowie die Tangente t an G_f im Punkt M.



a Weisen Sie nach, dass die Tangente t die Gleichung $y = kx + 2$ hat. 2

b Die Tangente t schließt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $\frac{k}{8}$ ein. Bestimmen Sie den Wert von k. 3

P3 Gegeben sind die Punkte $A(1\,|\,4\,|\,3)$ und $B(1\,|\,4\,|\,-2)$ sowie die Ebene E: $x_2 = 4$ und die Gerade k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(r \in \mathbb{R})$.

a Begründen Sie, dass die Ebene E orthogonal zur Geraden k ist und den Punkt A enthält. 2

b Der Punkt C liegt auf der Geraden k und das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt 15.
Bestimmen Sie alle möglichen Koordinaten von C. 3

TIPP Lösungshinweise zu Teil A

Aufgabe P 1

Teilaufgabe a

Welche Gerade schneidet der Graph von f bei $x = c$ in der Abbildung?

Was muss damit für f(c) gelten?

Beachten Sie, wie viele Schnittpunkte es im sichtbaren Bereich gibt.

Teilaufgabe b

Wodurch ist die markierte Fläche begrenzt?

Wie berechnet man den Inhalt einer Fläche, die zwischen zwei Graphen liegt?

Ist die Lage der Fläche relevant, d. h., spielt es eine Rolle, ob Teile ober- bzw. unterhalb der x-Achse liegen?

Aufgabe P 2

Teilaufgabe a

Welche x-Koordinate besitzt der Punkt M?

Bestimmen Sie die Gleichung der ersten Ableitung von f und berechnen Sie damit die Steigung der Tangente t.

Zeigen Sie, dass der Funktionswert von f an der Stelle 0 mit dem y-Achsenabschnitt von t übereinstimmt.

Teilaufgabe b

Welche besondere Eigenschaft hat dieses Dreieck?

Bestimmen Sie zunächst den Flächeninhalt in Abhängigkeit von k.

Aufgabe P 3

Teilaufgabe a

Wie lautet ein Normalenvektor von E?

Welche Lagebeziehung muss für einen Normalenvektor von E und einen Richtungsvektor von k bestehen, wenn E orthogonal ist zu k?

Wie überprüft man, ob ein Punkt in einer Ebene liegt?

Teilaufgabe b

Der Punkt B ist offensichtlich der Schnittpunkt von E und k. Warum?

Fertigen Sie eine Skizze an, um sich die Situation zu veranschaulichen.

Um welche Art Dreieck handelt es sich beim Dreieck ABC? Wie können Sie daher dessen Flächeninhalt berechnen?

Berechnen Sie die Länge der Grundseite als $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Welche Höhe muss das Dreieck ABC folglich haben?

Welche Punkte liegen auf k und haben diese Höhe als Abstand zu B?

P1 **a** Da der Graph von f und die Parallele zur x-Achse $y=-2$ im sichtbaren Bereich genau einen gemeinsamen Punkt besitzen, genügt es zu zeigen, dass $f(-1)=-2$ gilt.

Durch Einsetzen erhält man:

$$f(-1)=-\frac{4}{(-1+2)^2}+2=-4+2=-2$$

Damit hat c den Wert –1.

b Die markierte Fläche wird begrenzt durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x)=-\frac{4}{(x+2)^2}+2,$$

die Parallele zur x-Achse $y=-2$ bzw. $g(x)=-2$ und die y-Achse.

Da es bei Flächen, die von den Graphen zweier Funktionen begrenzt werden, keine Rolle spielt, ob Teile der Fläche unter- oder oberhalb der x-Achse liegen, erhält man mit $c=-1$ für den gesuchten Flächeninhalt A:

$$A=\int_{-1}^{0}(f(x)-g(x))\,dx=\int_{-1}^{0}\left(-\frac{4}{(x+2)^2}+2-(-2)\right)dx=\left[\frac{4}{x+2}+4x\right]_{-1}^{0}$$
$$=2-(4-4)=2$$

Die markierte Fläche hat den **Inhalt 2**.

P2 **a** Für ein $k>0$ ist die Funktion f mit $f(x)=1+e^{k\cdot x}$ gegeben.

Für die erste Ableitung erhält man mithilfe der Kettenregel $f'(x)=k\cdot e^{k\cdot x}$.

Die Tangente t hat die Gleichung $y=kx+2$, wenn $f'(0)=k$ und $f(0)=2$ gilt.

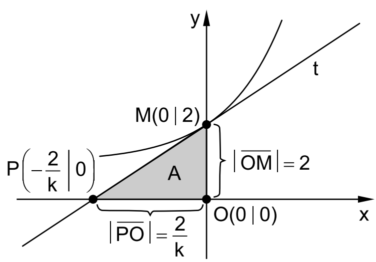
Nachweis:

(1) $f'(0)=k\cdot e^{k\cdot 0}=k\cdot e^0=k$

(2) $f(0)=1+e^{k\cdot 0}=1+1=2$

Damit ist gezeigt, dass die Tangente t die Gleichung $y=kx+2$ hat.

b Die Tangente t schließt mit den beiden Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck ein.



Zunächst bestimmt man den Schnittpunkt P der Tangente mit der x-Achse:

$$k\cdot x+2=0 \quad |-2$$
$$k\cdot x=-2 \quad |:k$$
$$x=-\frac{2}{k} \quad\Rightarrow\quad P\left(-\frac{2}{k}\,\middle|\,0\right)$$

Nun berechnet man den Flächeninhalt A des rechtwinkligen Dreiecks POM in Abhängigkeit von k:

$A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{PO}| \cdot |\overline{OM}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k} \cdot 2 = \frac{2}{k}$ (Wegen $k > 0$ gilt: $\left|-\frac{2}{k}\right| = \frac{2}{k}$)

Da der Flächeninhalt des Dreiecks laut Aufgabenstellung $A = \frac{k}{8}$ ist, muss folgende Gleichung gelöst werden:

$\frac{2}{k} = \frac{k}{8} \quad | \cdot k \quad | \cdot 8$

$k^2 = 16 \quad | \sqrt{\ }$

$\mathbf{k = 4}$ (Die zweite Lösung entfällt wegen $k > 0$.)

Der gesuchte Wert von k ist 4.

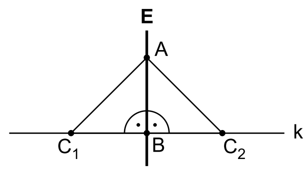
P3 Gegeben sind die Punkte $A(1|4|3)$ und $B(1|4|-2)$ sowie die Ebene $E: x_2 = 4$ und die Gerade $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a Die Ebene E ist orthogonal zur Geraden k, wenn ihr Normalenvektor $\vec{n}$ ein Vielfaches des Richtungsvektors von k ist (bzw. die Vektoren kollinear sind).

Da $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, ist **E orthogonal zu k**.

Einsetzen des Punkts A in E führt zur wahren Aussage $4 = 4$, damit ist $\mathbf{A \in E}$.

b Da offensichtlich $B \in k$ (Stützpunkt) und $B \in E$ ist, muss B der Schnittpunkt von E und k sein. Da die Ebene E und die Gerade k nach Teilaufgabe a orthogonal zueinander sind, ist damit das Dreieck ABC rechtwinklig, vgl. Skizze.



Den Flächeninhalt I eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet man mithilfe von:

$I = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

Für die Länge der Grundseite g des Dreiecks ABC erhält man:

$g = |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = 5$

Daraus folgt wegen der Vorgabe $I = 15$:

$\frac{1}{2} \cdot g \cdot h = 15$

$h = \frac{30}{g} = \frac{30}{5} = 6$

Damit ist $|\overrightarrow{BC_1}| = |\overrightarrow{BC_2}| = h = 6$.

Wahlteil: Analytische Geometrie B 1

Für $k \in \mathbb{R}$ mit $0 < k \leq 6$ werden die Pyramiden $ABCD_k$ mit $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(0|4|0)$ und $D_k(0|0|k)$ betrachtet (vgl. Abbildung 1).

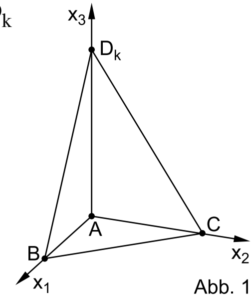


Abb. 1

a) Begründen Sie, dass das Dreieck BCD_k gleichschenklig ist. 1 VP

Der Mittelpunkt der Strecke BC ist $M(2|2|0)$.

$\left|\overrightarrow{MD_k}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ k \end{pmatrix}\right|$ ist die Länge einer Höhe des Dreiecks BCD_k.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCD_k. 1 VP

Für jeden Wert von k liegt die Seitenfläche BCD_k in der Ebene L_k: $kx_1 + kx_2 + 4x_3 = 4k$.

b) Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den die Größe des Winkels, unter dem die x_3-Achse die Ebene L_k schneidet, 30° beträgt. 2,5 VP

c) Zusätzlich zu den Pyramiden wird der in der Abbildung 2 gezeigte Quader betrachtet.

Die Punkte A und $Q(1|1|3)$ sind Eckpunkte des Quaders, die Seitenflächen des Quaders sind parallel zu den Koordinatenebenen.

Für $k = 6$ enthält die Seitenfläche BCD_k der Pyramide den Eckpunkt Q des Quaders. Für kleinere Werte von k schneidet die Seitenfläche BCD_k den Quader in einem Vieleck.

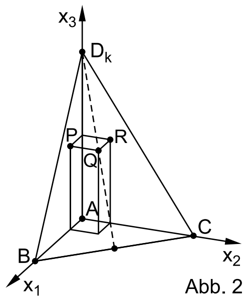


Abb. 2

Für einen Wert von k verläuft die Seitenfläche BCD_k durch die Eckpunkte P und R des Quaders. Bestimmen Sie diesen Wert von k. 1,5 VP

(Teilergebnis: $k = 4$)

Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Eckpunkte des Vielecks an, in dem die Seitenfläche BCD_k den Quader schneidet. 2 VP

TIPP Lösungshinweise zum Wahlteil Geometrie – Aufgabe B 1

Aufgabe B 1 – Teilaufgabe a

Begründung

Zeigen Sie, dass zwei Seiten des Dreiecks gleich lang sind. Welche beiden Seiten sind die Schenkel des Dreiecks BCD_k?

Flächeninhalt

Bestimmen Sie zunächst die Länge $\left|\overrightarrow{BC}\right|$ der Grundseite des Dreiecks BCD_k und die Länge $\left|\overrightarrow{MD_k}\right|$ der zugehörigen Höhe.

Wie berechnet man den Flächeninhalt eines Dreiecks?

Aufgabe B 1 – Teilaufgabe b

Winkel

Wie man den Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene berechnet, können Sie ggf. in der Merkhilfe nachschlagen. Wie lautet ein Normalenvektor von L_k, wie lässt sich die x_3-Achse darstellen?

Welchen Wert nimmt die Sinusfunktion für 30° an?

Einsetzen der Vektoren und dieses Wertes in die Formel für den Schnittwinkel führt auf eine Gleichung für k. Welche Werte kann k annehmen?

Aufgabe B 1 – Teilaufgabe c

Wert von k

Die Seitenflächen des Quaders sind parallel zu den Koordinatenebenen. Bestimmen Sie damit und mithilfe der Koordinaten der Punkte Q und A die Koordinaten des Punktes P.

Die Seitenfläche BCD_k verläuft für den gesuchten Wert von k u. a. durch den Eckpunkt P. Da jede Seitenfläche BCD_k in einer Ebene L_k liegt, können Sie durch Einsetzen von P in L_k den gesuchten Wert für k berechnen.

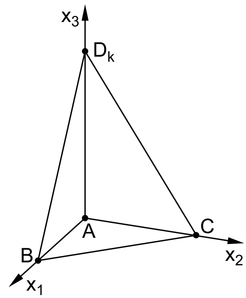
Anzahl der Eckpunkte

Betrachten Sie zunächst die Spezialfälle $k=4$ und $k=6$. Berücksichtigen Sie dabei Ihre bisherigen Teilergebnisse und den Aufgabentext.

Für welchen Wert von k liegt der obere Eckpunkt des Quaders, der auf der x_3-Achse liegt, in der Seitenfläche BCD_k bzw. in der Ebene L_k?

Beachten Sie bei Ihren weiteren Überlegungen, welche Kanten des Quaders von der Seitenfläche BCD_k bzw. der Ebene L_k jeweils geschnitten werden.

Für $k \in \mathbb{R}$ mit $0 < k \leq 6$ werden die Pyramiden $ABCD_k$ mit $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(0|4|0)$ und $D_k(0|0|k)$ betrachtet.



a) **Begründung:**

Es ist zu zeigen, dass zwei Seiten des Dreiecks gleich lang sind. Wegen

$$|\overrightarrow{BD_k}| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\0\\k\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+k^2} \quad \text{und}$$

$$|\overrightarrow{CD_k}| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\-4\\k\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+k^2}$$

ist das Dreieck BCD_k gleichschenklig.

Flächeninhalt:

Für die Länge $|\overrightarrow{BC}|$ der Grundseite des Dreiecks BCD_k erhält man:

$$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

Mit der Länge der Höhe des gleichschenkligen Dreiecks

$$|\overrightarrow{MD_k}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-2\\k\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4+k^2} = \sqrt{8+k^2}$$

ergibt sich aus $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ für das angegebene Dreieck:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{MD_k}| = \mathbf{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{8+k^2}}$$

b) **Winkel:**

Für die Berechnung des Schnittwinkels einer Geraden mit einer Ebene verwendet man die Formel $\sin\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$ (ggf. siehe Merkhilfe).

Mit $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ für die x_3-Achse und $\vec{n} = \begin{pmatrix}k\\k\\4\end{pmatrix}$ als Normalenvektor der Ebene L_k ergibt sich wegen $\sin(30°) = \frac{1}{2}$ der Ansatz:

$$\sin(30°) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}k\\k\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}k\\k\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{\sqrt{k^2+k^2+16}} = \frac{1}{2} \quad \Big|\cdot 2 \quad \Big|\cdot\sqrt{k^2+k^2+16}$$

$$\sqrt{2k^2+16} = 8 \quad \Big|(\ )^2$$

$$2k^2+16 = 64 \quad \Big|-16 \quad \Big|:2$$

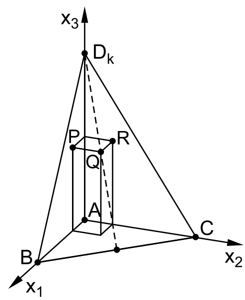
$$k^2 = 24$$

Wegen $k > 0$ ergibt sich als einzige Lösung $k = \sqrt{24}$.

Für $\mathbf{k = \sqrt{24}}$ beträgt die Weite des Winkels, unter dem die x_3-Achse die Ebene L_k schneidet, 30°.

c) **Wert von k:**

Da die Seitenflächen des Quaders parallel zu den Koordinatenebenen sind, erhält man z. B. für den Punkt P mithilfe der Punkte $Q(1|1|3)$ und $A(0|0|0)$ die Koordinaten $P(1|0|3)$.



Nun soll die Seitenfläche BCD_k durch die Eckpunkte P und R des Quaders verlaufen. Da jede Seitenfläche BCD_k in einer Ebene L_k liegt, setzt man den Punkt $(1|0|3)$ in L_k ein:

$$k\cdot 1 + k\cdot 0 + 4\cdot 3 = 4k$$

$$k + 12 = 4k \quad \Big|-k$$

$$3k = 12 \quad \Big|:3$$

$$k = 4$$

Für $\mathbf{k = 4}$ verläuft die Seitenfläche BCD_k durch die Eckpunkte P und R des Quaders.

Anzahl der Eckpunkte:

$0 < k \leq 3$: vier Eckpunkte
$3 < k < 4$: fünf Eckpunkte
$4 \leq k < 6$: drei Eckpunkte

Hinweis: Dies ist bereits die vollständige Lösung, da beim Operator „angeben“ keine Begründung verlangt wird. Zum Nachvollziehen der Lösung werden im Folgenden dennoch ein Lösungsweg bzw. mögliche Überlegungen dargestellt.

Zunächst betrachtet man folgende drei Spezialfälle:

$k = 6$: kein Vieleck: Für $k = 6$ enthält die Seitenfläche BCD_6 bzw. die Ebene L_6 laut Aufgabentext (nur) den Eckpunkt Q des Quaders.

$k = 4$: Vieleck mit drei Eckpunkten: Die Seitenfläche BCD_4 bzw. die Ebene L_4 enthält die Punkte P und R (siehe oben) und schneidet zudem die zur x_3-Achse parallele Kante durch Q des Quaders.

$k = 3$: Vieleck mit vier Eckpunkten: Die Seitenfläche BCD_3 bzw. die Ebene L_3 enthält den Eckpunkt $(0|0|3)$ des Quaders und schneidet zudem alle weiteren Kanten des Quaders, die parallel zur x_3-Achse sind.