

2024

Abitur

Original-Prüfung  
mit Lösungen

MEHR  
ERFAHREN

Hessen

Mathematik

+ Zusätzliche Aufgaben als PDF  
+ Online-Glossar



**STARK**

# Inhalt

## Vorwort

## Stichwortverzeichnis

### **Hinweise und Tipps zum Landesabitur 2024**

---

Ablauf der Prüfung .....	I
Inhalte und Schwerpunktthemen .....	III
Leistungsanforderungen und Bewertung .....	VIII
Operatoren und Anforderungsbereiche .....	VIII
Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung .....	XII

### **Hilfsmittelfreier Prüfungsteil**

---

Aufgabenserie zum Pflichtteil .....	Ü-1
Aufgabenserie zum Wahlteil .....	Ü-4

### **Landesabitur 2020**

---

A: Hilfsmittelfreier Teil .....	2020-1
B1: Analysis (WTR): $f_k(t) = 100(k^2 \cdot t + k) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}$ , $g(x) = \sqrt{60x}$ .....	2020-4
B1: Analysis (CAS): $f_k(t) = 100(k^2 \cdot t + k) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}$ , $g(x) = \sqrt{60x}$ .....	2020-15
B2: Analysis (WTR): $f_a(t) = e^{a \cdot t - 0,3 \cdot t^2}$ , $h(x) = 0,5 \cdot \sqrt{1 - x^2}$ .....	2020-28
B2: Analysis (CAS): $f_a(t) = e^{a \cdot t - 0,3 \cdot t^2}$ , $h(x) = 0,5 \cdot \sqrt{1 - x^2}$ .....	2020-38
C1: Analytische Geometrie (WTR/CAS) .....	2020-47
C2: Stochastik (WTR/CAS) .....	2020-57

### **Landesabitur 2021**

---

A: Hilfsmittelfreier Teil .....	2021-1
B1: Analysis (WTR): $f_k(t) = 3 \cdot t \cdot e^{-k \cdot t}$ .....	2021-5
B1: Analysis (CAS): $g(t) = -3,673 \cdot t^3 + 135,8 \cdot t^2 - 234,9 \cdot t + 1185$ .....	2021-13
B2: Analysis (WTR): $f_{a; k}(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{-k \cdot x}$ , $V(x) = 300x - 2000 \cdot \sin(0,1205 \cdot x)$ ..	2021-20
B2: Analysis (CAS): $f_{a; k}(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{-k \cdot x}$ , $V(x) = 300x - 2000 \cdot \sin(0,1205 \cdot x)$ ..	2021-29
C1: Analytische Geometrie (WTR/CAS) .....	2021-37
C2.1: Stochastik (WTR/CAS) .....	2021-47
C2.2: Stochastik (WTR/CAS) .....	2021-56

## Landesabitur 2022

A:	Hilfsmittelfreier Teil .....	2022-1
B1:	Analysis (WTR): $f_a(t) = a \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ .....	2022-4
B1:	Analysis (CAS): $v(x) = \frac{250}{1 + 24 \cdot e^{-0,9x}} - 10$ .....	2022-12
B2:	Analysis (WTR): $f_b(t) = \frac{1}{100} \cdot (0,5t^2 + 2t) \cdot b \cdot e^{-0,02t}$ .....	2022-22
B2:	Analysis (CAS): $f_b(t) = \frac{1}{100} \cdot (0,5t^2 + 2t) \cdot b \cdot e^{-0,02t}$ .....	2022-29
C1.1:	Analytische Geometrie (WTR/CAS) .....	2022-37
C1.2:	Analytische Geometrie (WTR/CAS) .....	2022-47
C2.2:	Stochastik (WTR/CAS) .....	2022-56

## Landesabitur 2023

**Aufgaben** ..... [www.stark-verlag.de/mystark](http://www.stark-verlag.de/mystark)

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode auf der Umschlaginnenseite).



Bei **MyStark** finden Sie:

- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil
- **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht
- **Übungsaufgaben** im Stil des Landesabiturs

Den Zugangscode zu MyStark finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter [www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/](http://www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/) finden Sie ein kostenloses **Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung finden Sie ab Mitte März 2024 unter:  
[www.stark-verlag.de/schule/unser-angebot/kurse/online-kurse](http://www.stark-verlag.de/schule/unser-angebot/kurse/online-kurse)

---

**Autoren:**

Viola Dengler:

Lösungen zum Landesabitur 2019: Teil A, Aufgabe 4;  
Lösungen zum Landesabitur 2020: Aufgaben B1 (WTR), B1 (CAS), C2 (WTR/CAS);  
Lösungen zum Landesabitur 2021: Aufgaben A, C2.1 (WTR/CAS), C2.2 (WTR/CAS);  
Lösungen zum Landesabitur 2022: Aufgaben B1 (CAS), C1.2 (WTR/CAS), C2 (WTR/CAS);  
Online: Übungsaufgaben Analysis 5, 7; Stochastik 1, 2, 6

Ingo Luft:

Online: Lösungen zum Landesabitur 2023: C2.1 (WTR/CAS), C2.2 (WTR/CAS)

Werner Neidhardt:

Online: Übungsaufgaben Analysis 1, 4; Analytische Geometrie 5; Stochastik 3

Ernst Payerl:

Lösungen zum Landesabitur 2020: Aufgaben A, B2 (WTR), B2 (CAS);  
Lösungen zum Landesabitur 2021: Aufgaben B1 (CAS), B2 (WTR), B2 (CAS);  
Lösungen zum Landesabitur 2022: Aufgaben B2 (WTR), B2 (CAS);  
Online: Übungsaufgaben Analysis 2; Analytische Geometrie 2, 4, Stochastik 5;  
Lösungen zum Landesabitur 2023: B1 (WTR/CAS), B2 (CAS)

Ullrich Rauch:

Aufgabenserie für den hilfsmittelfreien Prüfungsteil: Aufgaben W2, W3, W6;  
Lösungen zum Landesabitur 2020: Aufgabe C1 (WTR/CAS);  
Lösungen zum Landesabitur 2021: Aufgaben B1 (WTR), C1 (WTR/CAS);  
Lösungen zum Landesabitur 2022: Aufgaben A, B1 (WTR), C1.1 (WTR/CAS);  
Online: Übungsaufgaben Analysis 3, 6, 8; Analytische Geometrie 1, 3; Stochastik 4;  
Lösungen zum Landesabitur 2023: A, B2 (WTR), C1 (WTR/CAS)

# Vorwort

**Liebe Schülerinnen und Schüler,**

dieses Übungsbuch ist die ideale Hilfe bei der Vorbereitung auf das **Landesabitur 2024 im Fach Mathematik in Hessen**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette Aufstellung der für die Prüfung 2024 relevanten Themen, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Sie finden darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Im Jahr 2024, also im Jahr Ihres Abiturs, wird der **Prüfungsteil ohne Hilfsmittel** eine neue Struktur mit Pflicht- und Wahlteil haben. Zur Vorbereitung finden Sie in diesem Band entsprechende Aufgabenserien, die in Format und Inhalt diesem Teil entsprechen.
- Außerdem enthält dieser Band die offiziellen, vom hessischen Kultusministerium gestellten **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2020 bis 2022**. Zudem stehen Ihnen die Aufgaben des Jahres 2023 als PDF zum Download zur Verfügung, sobald sie zur Veröffentlichung freigegeben sind. Zu all diesen Aufgaben sind **vollständige und ausführlich kommentierte Lösungsvorschläge** von unseren Autoren vorhanden. Sie ermöglichen Ihnen, Ihre Lösungen eigenständig zu kontrollieren und die Rechenwege Schritt für Schritt nachzuvollziehen.
- Bei allen Original-Abituraufgaben, bei denen Hilfsmittel erlaubt sind, wurden von unseren Autoren **Hinweise und Tipps** ergänzt, die Ihnen Hilfestellungen für die Lösung der Aufgabe geben. Wenn Sie mit einer solchen Aufgabe nicht zurechtkommen, schauen Sie deshalb nicht gleich in die Lösungen, sondern nutzen Sie schrittweise die Lösungstipps, um selbst die Lösung zu finden.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2024 vom Kultusministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter [www.stark-verlag.de/mystark](http://www.stark-verlag.de/mystark).

Die Autoren wünschen Ihnen für die Prüfungsvorbereitung und für das Abitur viel Erfolg!

# Hinweise und Tipps zum Landesabitur 2024

## **Ablauf der Prüfung**

---

### **Die zentrale schriftliche Abiturprüfung**

In Hessen gibt es im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Die Aufgaben werden im Auftrag des hessischen Kultusministeriums von einer Fachkommission erstellt. Die Beurteilung der Lösungen der Schüler/innen wird von zwei Fachlehrkräften durchgeführt. Es kann auch im Abitur 2024 möglich sein, dass die Zweitkorrektur durch Lehrkräfte anderer Schulen erfolgt. Die verbindlichen curricularen Vorgaben (Kerncurriculum Mathematik Hessen), nach denen in den drei ersten Schulhalbjahren der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe unterrichtet wird, bestimmen Inhalte und Anforderungen der Abituraufgaben. Hinzu kommt, dass die Bildungsstandards Mathematik verstärkt in den hessischen Abschlussarbeiten, also auch beim Landesabitur, in den Materialvorgaben und Fragestellungen der Aufgaben berücksichtigt werden.

### **Aufbau der Prüfungsaufgaben**

Das hessische Landesabitur Mathematik in Hessen besteht aus zwei unterschiedlichen Abschnitten im Bereich der schriftlichen Prüfungen.

#### **Prüfungsteil 1: Vorschlag A**

Dies ist der „hilfsmittelfreie“ Teil der Prüfung, d. h., die Aufgaben sind ohne Formelsammlung und ohne Taschenrechner zu lösen. Es werden dem Prüfling insgesamt zehn Teilaufgaben vorgelegt: vier Pflichtaufgaben zum Niveau 1 (zwei zum Sachgebiet Analysis und je eine zu den Sachgebieten Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik) und sechs Wahlaufgaben zum Niveau 2 (jeweils zwei Teilaufgaben zu jedem der drei Sachgebiete). Der Prüfling wählt aus den sechs Wahlaufgaben zum Niveau 2 zwei Teilaufgaben aus. Insgesamt sind also sechs Teilaufgaben zu bearbeiten, vier zu Niveau 1 und zwei zu Niveau 2 (Niveau 1 beinhaltet die Anforderungsbereiche I und II und Niveau 2 auch den Anforderungsbereich III, siehe die Seiten VIII bis XI).

#### **Prüfungsteil 2 (mit Hilfsmitteln): Vorschläge B, C und D**

Hier müssen insgesamt drei Vorschläge bearbeitet werden. Es werden zwei Vorschläge zum Sachgebiet Analysis (B1 und B2) sowie jeweils ein Vorschlag zum Sachgebiet Lineare Algebra/Analytische Geometrie (C) und zum Sachgebiet Stochastik (D) vorgelegt. Der Prüfling wählt aus den Vorschlägen B1 und B2 einen Vorschlag aus. Die Vorschläge C und D sind Pflichtvorschläge.

### **Bearbeitungszeit und Ablauf der Prüfung**

Die Auswahlzeit ist in die Bearbeitungszeit integriert. Der genaue Zeitpunkt der Auswahl liegt in der Verantwortung der Prüflinge. Die Gesamtbearbeitungszeit beträgt im Leistungskurs 330 Minuten.

Alle Aufgabenvorschläge, sowohl der Aufgabenvorschlag zum hilfsmittelfreien Prüfungs- teil 1 als auch alle Vorschläge zum Prüfungsteil 2 (Prüfungsteil mit Hilfsmitteln), werden bereits zu Beginn der Prüfung ausgeteilt. Der Prüfling entscheidet selbst, wann er Vorschlag A (hilfsmittelfreier Prüfungsteil 1) und seine Bearbeitung von Vorschlag A abgibt. Nach Abgabe von Vorschlag A erhält er die zusätzlichen Hilfsmittel für Prüfungsteil 2. Alle Vorschläge zum Prüfungsteil 2 verbleiben bis zum Ende der Bearbeitungszeit beim Prüfling.

### **Bewertungseinheiten (BE)**

Prüfungsteil 1: Hier werden im Leistungskurs 30 BE vergeben.

Prüfungsteil 2: Hier werden im Leistungskurs 90 BE vergeben, verteilt auf Analysis (40 BE), Lineare Algebra/Analytische Geometrie (25 BE) und Stochastik (25 BE).

### **Zugelassene Hilfsmittel**

Prüfungsteil 1: Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung; Liste der fachspezifischen Operatoren

Prüfungsteil 2: Außer den Hilfsmitteln in Prüfungsteil 1 ist ein wissenschaftlich-technischer Taschenrechner (WTR) oder ein Rechner bzw. PC mit CAS-Technologie zugelas- sen. Hinzu kommt die im Unterricht verwendete Formelsammlung (Tafelwerk eines Schulbuchverlages). Nicht zugelassen sind schulinterne Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika.

Zur Bearbeitung der Aufgaben bekommen Sie Reinschrift- und Konzeptpapier von Ihrer Schule (versehen mit dem Stempel Ihrer Schule) zur Verfügung gestellt. Sämtliche Ent- würfe und Aufzeichnungen gehören zur Abiturarbeit und dürfen nur auf diesem Papier an- gefertigt werden, das nach Beendigung der Bearbeitungszeit wieder komplett abgegeben werden muss.

### **Rechnertechnologie**

Zu Beginn der Jahrgangsstufe 12 geht es um die Wahl der zu verwendenden Rechner- technologie, also:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner WTR
- Taschenrechner mit einem Computeralgebra- system CAS

Diese Entscheidung treffen die jeweiligen Schüler/innen eines Kurses in Abstimmung mit ihrem/ihrer Kurslehrer/in. In der Abiturprüfung werden dem Kurs nur die entsprechenden Aufgabenvorschläge vorgelegt.

Taschenrechner der Kategorie WTR müssen über erweiterte Funktionalitäten zur numeri- schen Berechnung

- der Lösungen von Polynomgleichungen bis dritten Grades,
- der (näherungsweisen) Lösung von Gleichungen,
- der Lösung eindeutig lösbarer linearer Gleichungssysteme mit bis zu drei Unbekann- ten,
- der Ableitung an einer Stelle,
- von bestimmten Integralen,
- von Gleichungen von Regressionsgeraden,
- von  $2 \times 2$ - und  $3 \times 3$ -Matrizen (Produkt, Inverse),
- von Mittelwert und Standardabweichung bei statistischen Verteilungen,
- von Werten der Binomial- und Normalverteilung (auch inverse Fragestellung) verfügen.

Darüber hinaus müssen Taschenrechner der Kategorie WTR über Funktionalitäten zur (numerischen) Berechnung von Wahrscheinlichkeiten (Binomialverteilung und Standard- normalverteilung) verfügen.



Rückhaltebecken für Regen dienen dazu, bei starkem Regen Überschwemmungen zu vermeiden, indem das Regenwasser zunächst darin gesammelt und später langsam wieder abgelassen wird. Die Zuflussrate des Regenwassers kann bei einigen Regenfällen modelliert werden durch die Funktionenschar  $f_k$  mit  $f_k(t) = 100(k^2 \cdot t + k) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$ . Dabei gibt  $t$  die Zeit in Stunden nach Beobachtungsbeginn und  $f_k(t)$  die Zuflussrate in  $\frac{m^3}{h}$  an. Der Parameter  $k$  ist ein Maß für die Stärke des Regens. In Material 1 sind die Graphen der Funktionen  $f_k$  für  $k = 1, 2, 3, 4$  dargestellt.

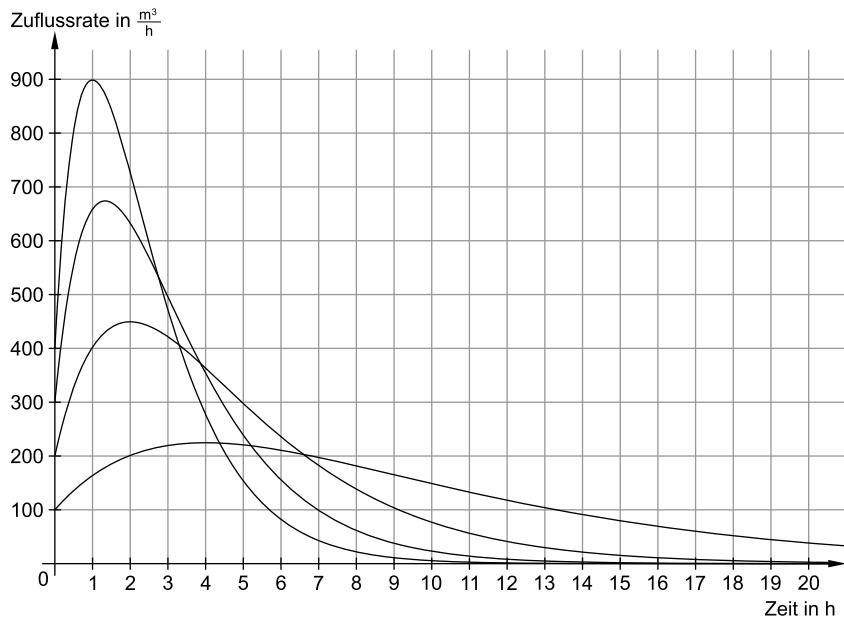
- 1.1 Berechnen Sie die Zuflussrate zum Zeitpunkt  $t=0$  in Abhängigkeit vom Parameter  $k$ . **(2 BE)**
- 1.2 Berechnen Sie die maximale Zuflussrate und den zugehörigen Zeitpunkt jeweils in Abhängigkeit vom Parameter  $k$ .  
 Die zweite Ableitung  $f_k''(t) = 4k^3(k \cdot t - 9) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}$  kann ohne Nachweis verwendet werden.  
 [zur Kontrolle:  $t_{\max} = \frac{4}{k}$ ] **(7 BE)**
- 1.3 Beschriften Sie die Graphen im Material 1 mit den zugehörigen Parameterwerten  $k = 1, 2, 3, 4$  und beschreiben Sie den Einfluss des Parameters  $k$  auf Zeitpunkt und Größe der maximalen Zuflussrate. Skizzieren Sie in das Koordinatensystem in Material 1 die Ortskurve der Hochpunkte und bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Ortskurve. **(7 BE)**
- 1.4 Berechnen Sie die Wendepunkte der Graphen der Funktionenschar  $f_k$  in Abhängigkeit von  $k$ .  
 Hinweis: Die Untersuchung der notwendigen Bedingung ist ausreichend. **(4 BE)**

Die Wendetangenten der Graphen der Scharfunktionen  $f_k$  werden durch Graphen der Funktionenschar  $w_k$  mit  $w_k(t) = 100k \cdot (19 - k \cdot t) \cdot e^{-\frac{9}{5} \cdot t}$  beschrieben.

- 1.5 Das nötige Fassungsvermögen des Rückhaltebeckens, das für die Aufnahme der gesamten Regenmenge bei einer Modellierung der Zuflussrate durch die Funktionenschar  $f_k$  ausreicht, kann mittels zweier Verfahren bestimmt werden:
  - (1) Bestimmung des Grenzwertes  $\lim_{u \rightarrow \infty} [F_k(u) - F_k(0)]$ , wobei  $F_k$  eine Stammfunktionschar der Funktionenschar  $f_k$  darstellt.
  - (2) Bestimmung des Inhalts der Fläche, die zwischen den Koordinatenachsen und der Wendetangente  $w_k$  eingeschlossen ist.
- 1.5.1 Mit einem der beiden Verfahren wird der genaue Wert für das nötige Fassungsvermögen ermittelt und mit dem anderen lediglich eine Näherungslösung. Entscheiden Sie, mit welchem der beiden Verfahren bei der vorgegebenen Modellierung der genaue Wert für das nötige Fassungsvermögen bestimmt wird, und erläutern Sie Ihre Entscheidung. **(3 BE)**
- 1.5.2 Berechnen Sie mithilfe des Formansatzes  $F_k(t) = 100(a \cdot t + b) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}$  eine Stammfunktionschar  $F_k$  von  $f_k$ .  
 [zur Kontrolle:  $F_k$  mit  $F_k(t) = 100 \cdot (-5 \cdot k \cdot t - 30) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}$  ist eine mögliche Stammfunktionschar.] **(7 BE)**

## Material 1

### Graphen der Funktionenschar $f_k$ für $k = 1, 2, 3, 4$



## Hinweise und Tipps

### Teilaufgabe 1.1

█ Gesucht ist der Funktionswert der gegebenen Funktion zur Zeit  $t=0$ .

### Teilaufgabe 1.2

█ Bestimmen Sie die 1. Ableitungsfunktion mithilfe der Produkt- und der Kettenregel und vereinfachen Sie den Funktionsterm so weit wie möglich.

█ Wenden Sie das notwendige und das hinreichende Kriterium für lokale Extrema an.

█ Beachten Sie, dass  $k > 0$  ist. Geben Sie die Hochpunkte in Abhängigkeit von  $k$  an.

### Teilaufgabe 1.3

█ Bestimmen Sie die Funktionen und Hochpunkte jeweils für  $k = 1, 2, 3$  und  $4$  für den Vergleich mit den gegebenen Graphen.

█ Für die Bestimmung der Ortskurve muss in den Koordinaten der Hochpunkte der Parameter  $k$  eliminiert werden.

### Teilaufgabe 1.4

█ Wenden Sie das notwendige Kriterium für Wendestellen an. Verwenden Sie dafür die in Teilaufgabe 1.2 gegebene 2. Ableitungsfunktion. Geben Sie die Koordinaten der Wendepunkte an.

### Teilaufgabe 1.5

█ Verwenden Sie die gegebenen Funktionsgleichungen der Wendetangenten.

#### Teilaufgabe 1.5.1

█ Veranschaulichen Sie sich die beiden Verfahren.

#### Teilaufgabe 1.5.2

█ Bestimmen Sie die 1. Ableitungsfunktion des gegebenen Formansatzes und vereinfachen Sie den Funktionsterm im Hinblick auf einen Koeffizientenvergleich mit  $f_k(t)$ .

█ Formulieren Sie die Gleichung der Stammfunktionenschar konkret.

#### Teilaufgabe 1.5.3

█ Falls Sie in Teilaufgabe 1.5.2 zu einem anderen als dem angegebenen Kontrollergebnis gekommen sind, arbeiten Sie für das 1. Verfahren mit dem Kontrollergebnis weiter.

█ Für die Durchführung des 2. Verfahrens braucht man die Achsenschnittpunkte der Wendetangenten.

█ Vergleichen Sie die beiden berechneten Werte.

### Teilaufgabe 2.1

█ Bestimmen Sie das Rotationsvolumen in Abhängigkeit von der Füllhöhe  $H$ .

█ Berechnen Sie die maximale Füllhöhe mithilfe des gegebenen Wertes für das maximale Volumen und dann den Wert für den Durchmesser des Beckens.

### Teilaufgabe 2.2.1

█ Beachten Sie, dass die Abflussrate konstant sein soll.

### Teilaufgabe 2.2.2

█ Bestimmen Sie die Abflussrate pro Stunde und stellen Sie die lineare Funktion auf, die das Wasservolumen in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  beschreibt.

## Lösung

**Vorbemerkung:** Die Aufgabenstellung gilt für die Rechnertechnologie WTR. Die jeweils verwendeten Operatoren in den Teilaufgaben weisen darauf hin, ob mit den erweiterten Funktionalitäten des Taschenrechners gearbeitet werden kann.

Die gegebene Funktion modelliert die Zuflussrate in  $\frac{m^3}{h}$  eines Rückhaltebeckens für Regenwasser:

$$f_k(t) = 100 \cdot (k^2 \cdot t + k) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}, t \geq 0, k \in \mathbb{R}^+, t \text{ in Stunden}$$

1.1 Die Zuflussrate zum Zeitpunkt  $t=0$  beträgt:

$$f_k(0) = 100 \cdot (k^2 \cdot 0 + k) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot 0} = 100 \cdot k$$

1.2 Für die Berechnung ist die erste Ableitungsfunktion notwendig. Diese ergibt sich durch Anwendung der Produkt- und der Kettenregel zu:

$$f'_k(t) = 100 \cdot k^2 \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} + 100 \cdot (k^2 \cdot t + k) \cdot \left( -\frac{k}{5} \right) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t}$$

Der Funktionsterm lässt sich durch Ausklammern und Zusammenfassen vereinfachen:

$$\begin{aligned} f'_k(t) &= \left( 100 \cdot k^2 + 100 \cdot (k^2 \cdot t + k) \cdot \left( -\frac{k}{5} \right) \right) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} \\ &= (100 \cdot k^2 - 20k \cdot (k^2 \cdot t + k)) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} = (100 \cdot k^2 - 20 \cdot k^3 \cdot t - 20 \cdot k^2) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} \\ &= (80 \cdot k^2 - 20 \cdot k^3 \cdot t) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} = 20 \cdot k^2 \cdot (4 - k \cdot t) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung  $f'_k(t) = 0$  für ein lokales Maximum ergibt den Ansatz:

$$20 \cdot k^2 \cdot (4 - k \cdot t) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} = 0$$

Da  $e^{-\frac{k}{5} \cdot t} \neq 0$  für alle  $t$  und  $k > 0$  ist, muss der Teilterm  $4 - k \cdot t = 0$  sein. Durch Umformung erhält man:

$$t = \frac{4}{k}$$

Zur Überprüfung der hinreichenden Bedingung wird dieser Wert nun in die (gegebene) 2. Ableitungsfunktion eingesetzt:

$$f''_k\left(\frac{4}{k}\right) = 4 \cdot k^3 \cdot \left( k \cdot \frac{4}{k} - 9 \right) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot \frac{4}{k}} = 4 \cdot k^3 \cdot (-5) \cdot e^{-\frac{4}{5}} = -20 \cdot k^3 \cdot e^{-\frac{4}{5}}$$

Da  $k \in \mathbb{R}^+$  und  $e^{-\frac{4}{5}} > 0$  ist, ist  $f''_k\left(\frac{4}{k}\right) < 0$  für alle  $k \in \mathbb{R}^+$  und damit liegt ein lokales Maximum vor.

Die maximale Zuflussrate ist dann:

$$f_k\left(\frac{4}{k}\right) = 100 \cdot \left( k^2 \cdot \frac{4}{k} + k \right) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot \frac{4}{k}} = 100 \cdot 5 \cdot k \cdot e^{-\frac{4}{5}} = 500 \cdot k \cdot e^{-\frac{4}{5}}$$

Die Hochpunkte der Zuflussraten in Abhängigkeit von  $k$  haben also die Koordinaten:

$$H_k\left(\frac{4}{k} \mid 500 \cdot k \cdot e^{-\frac{4}{5}}\right)$$

- 1.3 Die Funktionen für  $k=1, 2, 3, 4$  und die Hochpunkte der zugehörigen Graphen sind (die Funktionswerte sind gerundet):

$$f_1(t) = 100 \cdot (t+1) \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot t} \quad H_1(4 | 224,7)$$

$$f_2(t) = 100 \cdot (4 \cdot t + 2) \cdot e^{-\frac{2}{5} \cdot t} \quad H_2(2 | 449,3)$$

$$f_3(t) = 100 \cdot (9 \cdot t + 3) \cdot e^{-\frac{3}{5} \cdot t} \quad H_3\left(\frac{4}{3} \mid 674,0\right)$$

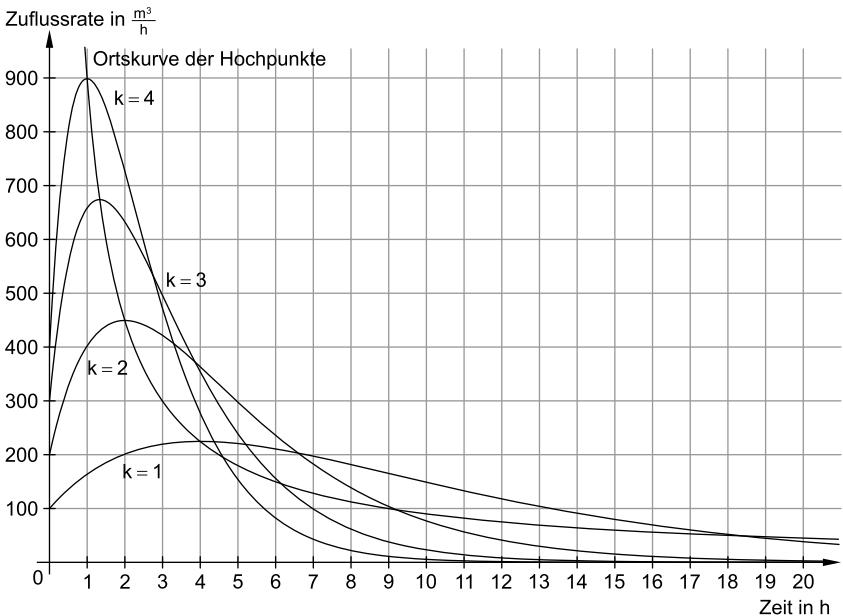
$$f_4(t) = 100 \cdot (16 \cdot t + 4) \cdot e^{-\frac{4}{5} \cdot t} \quad H_4(1 | 898,7)$$

Je größer der Wert von  $k$  ist, desto größer ist die maximale Zuflussrate und desto früher wird diese erreicht.

Zur Bestimmung der Ortskurve der Hochpunkte wird  $t = \frac{4}{k} \Leftrightarrow k = \frac{4}{t}$  in den Funktionswert eingesetzt und es folgt:

$$y = 500 \cdot \frac{4}{t} \cdot e^{-\frac{4}{5} \cdot t} = \frac{2000}{t} \cdot e^{-\frac{4}{5} \cdot t}$$

In Material 1 werden die Graphen beschriftet und die Ortskurve der Hochpunkte wird eingezzeichnet.



- 1.4 Mit der in Teilaufgabe 1.2 gegebenen Gleichung für  $f_k''(t)$  liefert die notwendige Bedingung für Wendestellen  $f_k''(t) = 0$  konkret den Ansatz:

$$f_k''(t) = 4 \cdot k^3 \cdot (k \cdot t - 9) \cdot e^{-\frac{k}{5} \cdot t} = 0$$

Da  $k > 0$  und  $e^{-\frac{k}{5} \cdot t} \neq 0$  für alle  $t$  und  $k > 0$  ist, muss der Teilterm  $k \cdot t - 9 = 0$  sein.



© STARK Verlag

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)  
[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH  
ist urheberrechtlich international geschützt.  
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung  
des Rechteinhabers in irgendeiner Form  
verwertet werden.

**STARK**