2024

Abitur

Original-Prüfu
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Hessen

Mathematik G

+ *Zusätzliche Aufgaben als PD*
+ *Online-Glossar*

PDF

STARK

Inhalt

Landesabitur 2022

Landesabitur 2023

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode auf der Umschlaginnenseite).

Bei **MyStark** finden Sie:

- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil
- **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht
- **Übungsaufgaben** im Stil des Landesabiturs

Den Zugangscode zu MyStark finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter
www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/
finden Sie ein kostenloses **Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung finden Sie ab Mitte März 2024 unter:
www.stark-verlag.de/schule/unser-angebot/kurse/online-kurse

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Übungsbuch ist die ideale Hilfe bei der Vorbereitung auf das **Landesabitur 2024 im Fach Mathematik in Hessen**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette Aufstellung der für die Prüfung 2024 relevanten Themen, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Sie finden darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Im Jahr 2024, also im Jahr Ihres Abiturs, wird der **Prüfungsteil ohne Hilfsmittel** eine neue Struktur mit Pflicht- und Wahlteil haben. Zur Vorbereitung finden Sie in diesem Band entsprechende Aufgabenserien, die in Format und Inhalt diesem Teil entsprechen.
- Außerdem enthält dieser Band die offiziellen, vom hessischen Kultusministerium gestellten **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2020 bis 2022**. Zudem stehen Ihnen die Aufgaben des Jahres 2023 als PDF zum Download zur Verfügung, sobald sie zur Veröffentlichung freigegeben sind. Zu all diesen Aufgaben sind **vollständige und ausführlich kommentierte Lösungsvorschläge** von unseren Autoren vorhanden. Sie ermöglichen Ihnen, Ihre Lösungen eigenständig zu kontrollieren und die Rechenwege Schritt für Schritt nachzuvollziehen.
- Bei allen Original-Abituraufgaben, bei denen Hilfsmittel erlaubt sind, wurden von unseren Autoren **Hinweise und Tipps** ergänzt, die Ihnen Hilfestellungen für die Lösung der Aufgabe geben. Wenn Sie mit einer solchen Aufgabe nicht zurechtkommen, schauen Sie deshalb nicht gleich in die Lösungen, sondern nutzen Sie schrittweise die Lösungstipps, um selbst die Lösung zu finden.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2024 vom Kultusministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter www.stark-verlag.de/mystark.

Die Autoren wünschen Ihnen für die Prüfungsvorbereitung und für das Abitur viel Erfolg!

Hinweise und Tipps zum Landesabitur 2024

Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

In Hessen gibt es im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Die Aufgaben werden im Auftrag des hessischen Kultusministeriums von einer Fachkommission erstellt. Die Beurteilung der Lösungen der Schüler/innen wird von zwei Fachlehrkräften durchgeführt. Es kann auch im Abitur 2024 möglich sein, dass die Zweitkorrektur durch Lehrkräfte anderer Schulen erfolgt. Die verbindlichen curricularen Vorgaben (Kerncurriculum Mathematik Hessen), nach denen in den drei ersten Schulhalbjahren der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe unterrichtet wird, bestimmen Inhalte und Anforderungen der Abituraufgaben. Hinzu kommt, dass die Bildungsstandards Mathematik verstärkt in den hessischen Abschlussarbeiten, also auch beim Landesabitur, in den Materialvorgaben und Fragestellungen der Aufgaben berücksichtigt werden.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Das hessische Landesabitur Mathematik in Hessen besteht aus zwei unterschiedlichen Abschnitten im Bereich der schriftlichen Prüfungen.

Prüfungsteil 1: Vorschlag A
Dies ist der „hilfsmittelfreie“ Teil der Prüfung, d. h., die Aufgaben sind ohne Formelsammlung und ohne Taschenrechner zu lösen. Es werden dem Prüfling insgesamt neun Teilaufgaben vorgelegt: drei Pflichtaufgaben zum Niveau 1 (zu den drei Sachgebieten Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik), drei Wahlaufgaben zum Niveau 1 (zu den drei Sachgebieten) und drei Wahlaufgaben zum Niveau 2 (zu den drei Sachgebieten). Der Prüfling wählt aus den Wahlaufgaben zu den Niveaus 1 und 2 jeweils eine Teilaufgabe aus. Insgesamt sind also fünf Teilaufgaben zu bearbeiten, vier zu Niveau 1 und eine zu Niveau 2 (Niveau 1 beinhaltet die Anforderungsbereiche I und II und Niveau 2 auch den Anforderungsbereich III, siehe die Seiten VII bis X).

Prüfungsteil 2 (mit Hilfsmitteln): Vorschläge B, C und D
Hier müssen insgesamt drei Vorschläge bearbeitet werden. Es werden zwei Vorschläge zum Sachgebiet Analysis (B1 und B2) sowie jeweils ein Vorschlag zum Sachgebiet Lineare Algebra/Analytische Geometrie (C) und zum Sachgebiet Stochastik (D) vorgelegt. Der Prüfling wählt aus den Vorschlägen B1 und B2 einen Vorschlag aus. Die Vorschläge C und D sind Pflichtvorschläge.

Bearbeitungszeit und Ablauf der Prüfung

Die Auswahlzeit ist in die Bearbeitungszeit integriert. Der genaue Zeitpunkt der Auswahl liegt in der Verantwortung der Prüflinge. Die Gesamtbearbeitungszeit beträgt im Grundkurs 285 Minuten.

Alle Aufgabenvorschläge, sowohl der Aufgabenvorschlag zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil 1 als auch alle Vorschläge zum Prüfungsteil 2 (Prüfungsteil mit Hilfsmitteln), werden bereits zu Beginn der Prüfung ausgeteilt. Der Prüfling entscheidet selbst, wann er Vorschlag A (hilfsmittelfreier Prüfungsteil 1) und seine Bearbeitung von Vorschlag A abgibt. Nach Abgabe von Vorschlag A erhält er die zusätzlichen Hilfsmittel für Prüfungsteil 2. Alle Vorschläge zum Prüfungsteil 2 verbleiben bis zum Ende der Bearbeitungszeit beim Prüfling.

Bewertungseinheiten (BE)

Prüfungsteil 1: Hier werden im Grundkurs 25 BE vergeben.
Prüfungsteil 2: Hier werden im Grundkurs 75 BE vergeben, verteilt auf Analysis (35 BE), Lineare Algebra/Analytische Geometrie (20 BE) und Stochastik (20 BE).

Zugelassene Hilfsmittel

Prüfungsteil 1: Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung; Liste der fachspezifischen Operatoren
Prüfungsteil 2: Außer den Hilfsmitteln in Prüfungsteil 1 ist ein wissenschaftlich-technischer Taschenrechner (WTR) oder ein Rechner bzw. PC mit CAS-Technologie zugelassen. Hinzu kommt die im Unterricht verwendete Formelsammlung (Tafelwerk eines Schulbuchverlages). Nicht zugelassen sind schulinterne Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika.
Zur Bearbeitung der Aufgaben bekommen Sie Reinschrift- und Konzeptpapier von Ihrer Schule (versehen mit dem Stempel Ihrer Schule) zur Verfügung gestellt. Sämtliche Entwürfe und Aufzeichnungen gehören zur Abiturarbeit und dürfen nur auf diesem Papier angefertigt werden, das nach Beendigung der Bearbeitungszeit wieder komplett abgegeben werden muss.

Rechnertechnologie

Zu Beginn der Jahrgangsstufe 12 geht es um die Wahl der zu verwendenden Rechnertechnologie, also

- Wissenschaftlicher Taschenrechner WTR
- Taschenrechner mit einem Computeralgebrasystem CAS

Diese Entscheidung treffen die jeweiligen Schüler/innen eines Kurses in Abstimmung mit ihrem/ihrer Kurslehrer/in. In der Abiturprüfung werden dem Kurs nur die entsprechenden Aufgabenvorschläge vorgelegt.

Taschenrechner der Kategorie WTR müssen über erweiterte Funktionalitäten zur numerischen Berechnung

- der Lösungen von Polynomgleichungen bis dritten Grades,
- der (näherungsweisen) Lösung von Gleichungen,
- der Lösung eindeutig lösbarer linearer Gleichungssysteme mit bis zu drei Unbekannten,
- der Ableitung an einer Stelle,
- von bestimmten Integralen,
- von Gleichungen von Regressionsgeraden,
- von 2×2- und 3×3-Matrizen (Produkt, Inverse),
- von Mittelwert und Standardabweichung bei statistischen Verteilungen,
- von Werten der Binomial- und Normalverteilung (auch inverse Fragestellung)

verfügen.
Darüber hinaus müssen Taschenrechner der Kategorie WTR über Funktionalitäten zur (numerischen) Berechnung von Wahrscheinlichkeiten (Binomialverteilung und Standardnormalverteilung) verfügen.

Hessen – Grundkurs Mathematik
2020 – B1: Analysis (WTR)

Die Tabellen in Material 1 zeigen die Entwicklung der Weltbevölkerung über einen Zeitraum von 60 Jahren. In Material 2 sind die Wertepaare für ausgewählte Zeitpunkte als Punkte eingezeichnet (Weltbevölkerung in Milliarden Menschen, gerundet auf zwei Nachkommastellen, Zeit t in Jahren nach Beginn des Jahres 1960).

1.1 Zeigen Sie anhand der Tabellenwerte in Material 1, dass die Entwicklung der Weltbevölkerung im Zeitraum von 1960 bis 1985 als exponentieller Wachstumsprozess modelliert werden kann. **(4 BE)**

1.2 Ein Wissenschaftler schlägt vor, die Entwicklung der Weltbevölkerung durch die Funktion f mit $f(t) = 3{,}02 \cdot e^{0{,}019 \cdot t}$ (f(t) in Milliarden Menschen, Zeit t in Jahren nach Beginn des Jahres 1960) zu modellieren. Geben Sie die Funktionswerte in der folgenden Wertetabelle an und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für $0 \le t \le 60$ in das Koordinatensystem in Material 2.

t	0	10	20	30	40	50	60
f(t)							

Geben Sie die Weltbevölkerung an, die der Wissenschaftler bei dieser Modellierung für den Beginn des Jahres 2020 prognostiziert. **(5 BE)**

1.3 Zeichnen Sie die Wertepaare der Tabelle (Material 1) für die Jahre 1990 bis 2020 als Punkte in das Koordinatensystem in Material 2.
Beurteilen Sie, inwieweit der in Aufgabe 1.2 genannte Modellierungsvorschlag geeignet ist, die tatsächliche Bevölkerungsentwicklung in der Zeit vor und nach 1990 zu beschreiben. **(5 BE)**

1.4 Berechnen Sie den Wert des Terms $\frac{1}{20} \cdot \int_5^{25} 3{,}02 \cdot e^{0{,}019 \cdot t}\, dt$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. **(6 BE)**

2 Für die Zeit ab 1985 wird eine neue Modellierung für die Entwicklung der Weltbevölkerung vorgeschlagen. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich die momentane Änderungsrate der Bevölkerungsentwicklung durch eine Funktion g' mit $g'(t) = d \cdot e^{k \cdot t}$ modellhaft beschreiben lässt.
Im Gegensatz zur Funktion f aus Aufgabe 1 wird für die Funktion g' der Zeitpunkt $t = 0$ auf den Beginn des Jahres 1985 festgelegt.

2.1 Für den Beginn des Jahres 1985 geht man von einer momentanen Änderungsrate von 0,0891 Milliarden Menschen pro Jahr aus, während für den Beginn des Jahres 2020 nur noch eine Änderungsrate von 0,078 Milliarden Menschen pro Jahr angenommen wird. Berechnen Sie auf dieser Grundlage die Werte der Parameter d und k und geben Sie die Funktionsgleichung von g' an. **(5 BE)**

Im Folgenden soll die momentane Änderungsrate der Bevölkerungsentwicklung durch die Gleichung $g'(t) = 0{,}0891 \cdot e^{-0{,}004 \cdot t}$ beschrieben werden.

2.2 Die Funktion g soll die Entwicklung der Weltbevölkerung ab 1985 modellhaft beschreiben.
Berechnen Sie eine Funktionsgleichung der Funktion g so, dass der Funktionswert von g

für den Beginn des Jahres 1985 mit dem Tabellenwert dieses Jahres übereinstimmt.
[zur Kontrolle: $g(t) = 27{,}125 - 22{,}275 \cdot e^{-0{,}004 \cdot t}$] **(5 BE)**

2.3 Untersuchen Sie anhand des Funktionsterms von g, wie sich die Weltbevölkerung nach diesem Modell langfristig entwickelt. **(3 BE)**

2.4 Berechnen Sie den Zeitpunkt, ab dem die Weltbevölkerung nach diesem Modell um weniger als 0,08 Milliarden Menschen pro Jahr zunimmt. **(3 BE)**

3 Untersuchen Sie anhand der Werte für die Jahre 1995, 2005 und 2020, ob sich die Funktion g zur Modellierung der Entwicklung der Weltbevölkerung für den Zeitraum von 1995 bis 2020 besser eignet als die Funktion f. **(4 BE)**

Material 1

Entwicklung der Weltbevölkerung von 1960 bis 1985

Jahr	1960	1965	1970	1975	1980	1985
Weltbevölkerung (Milliarden Menschen, gerundet auf zwei Nachkommastellen)	3,02	3,32	3,68	4,06	4,44	4,85

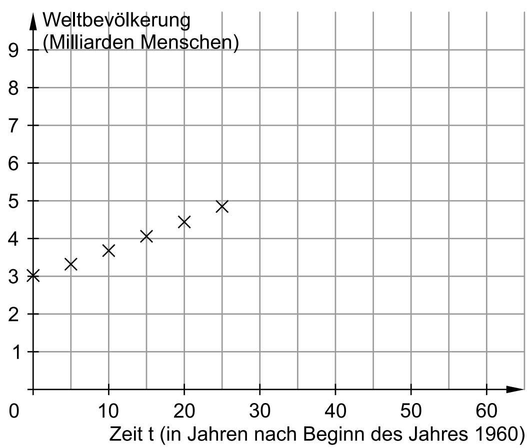
Entwicklung der Weltbevölkerung von 1985 bis 2020

Jahr	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015	2020
Weltbevölkerung (Milliarden Menschen, gerundet auf zwei Nachkommastellen)	4,85	5,31	5,74	6,13	6,52	6,93	7,35	7,78

Daten nach: United Nations – Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2015): World Population Prospects: The 2015 Revision

Material 2

graphische Darstellung der Entwicklung der Weltbevölkerung



Hinweise und Tipps

Teilaufgabe 1.1
- Ein exponentieller Wachstumsprozess wird durch eine Funktion $f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$ modelliert.
- Dividiert man zwei aufeinanderfolgende Funktionswerte (festes Zeitintervall), so erhält man den Wachstumsfaktor k. Dieser muss bei gleichen Zeitintervallen eine Konstante sein.

Teilaufgabe 1.2
- Benutzen Sie Ihren WTR zur Berechnung der Funktionswerte.
- Tragen Sie die Funktionswerte und die Zeichnung direkt in die Vorlage ein.
- Denken Sie daran, dass $t = 0$ dem Beginn des Jahres 1960 entspricht.

Teilaufgabe 1.3
- Achten Sie auf die Abweichungen vor und nach $t = 30$ Jahren.

Teilaufgabe 1.4
- Berechnen Sie den Wert durch Ermittlung einer Stammfunktion und Einsetzen der Integrationsgrenzen.
- Es wird über 20 Jahre integriert und dann durch 20 dividiert. Denken Sie an einen Durchschnitt und formulieren Sie im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe 2.1
- Bestimmen Sie d und k durch Einsetzen der gegebenen Werte und Funktionswerte für g'.
- Vergessen Sie nicht, die Gleichung für die Funktion g' am Ende hinzuschreiben.

Teilaufgabe 2.2
- g(t) bestimmt sich durch das Integral über die Funktion g'.
- Denken Sie an die Integrationskonstante.
- Berechnen Sie die Integrationskonstante durch Einsetzen des Tabellenwertes für $t = 0$ (1985).

Teilaufgabe 2.3
- Langfristig heißt: $t \to \infty$
- Wie ist das Verhalten des Exponentialterms für $t \to \infty$?

Teilaufgabe 2.4
- Setzen Sie $g'(t) = 0{,}08$ und lösen Sie die entstehende Gleichung.

Teilaufgabe 3
- Bestimmen Sie die Funktionswerte mit dem WTR.
- Denken Sie daran, dass der Beginn des Jahres 1985 identisch ist mit $t = 0$ bezogen auf die Funktion g.

Lösung

1.1 Man muss zeigen, dass das prozentuale Wachstum in den hier aufgeführten Intervallen in etwa konstant geblieben ist. Das prozentuale Wachstum im Zeitraum von 5 Jahren ergibt sich aus der Division von jeweils zwei aufeinanderfolgenden Werten der Tabelle des Materials 1:

Wachstum zwischen 1960 und 1965: $\frac{3{,}32}{3{,}02} \approx 1{,}099$

Das bedeutet also ein Wachstum von etwa 9,9 %.

Für die anderen Wachstumsraten ergibt sich gerundet auf drei Nachkommastellen:

1965 auf 1970: $\frac{3{,}68}{3{,}32} \approx 1{,}108$

1970 auf 1975: $\frac{4{,}06}{3{,}68} \approx 1{,}103$

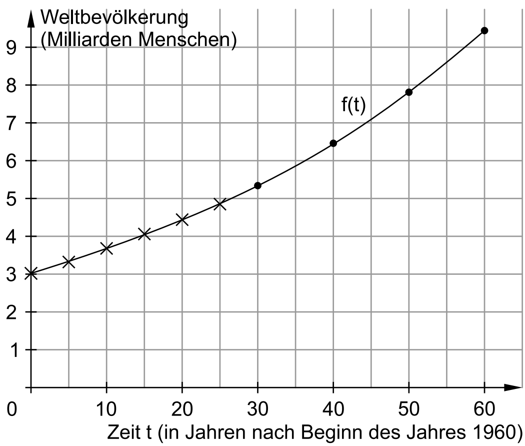
1975 auf 1980: $\frac{4{,}44}{4{,}06} \approx 1{,}094$

1980 auf 1985: $\frac{4{,}85}{4{,}44} \approx 1{,}092$

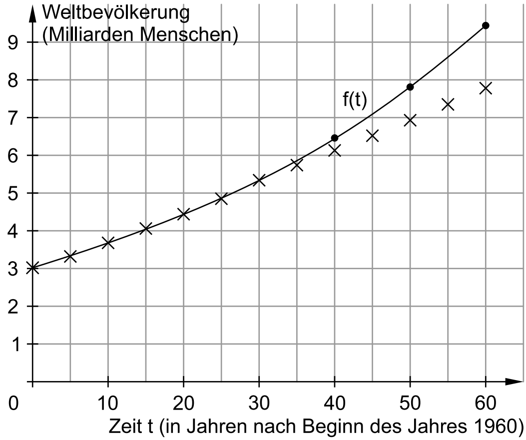
Die Schwankung der Wachstumsraten beträgt also maximal 1,6 %. Das berechtigt, von einem exponentiellen Wachstumsmodell auszugehen.

1.2

t	0	10	20	30	40	50	60
f(t)	3,02	3,65	4,42	5,34	6,46	7,81	9,44



Bei diesem Modell wird für den Beginn des Jahres 2020 eine Bevölkerung von 9,44 Milliarden Menschen vorhergesagt.

1.3 

Wie man sieht, stimmen die Tabellenwerte mit den Funktionswerten der Funktion f(t) etwa bis zum Jahre 1990 ($t=30$) gut überein. Danach aber liegen die Tabellenwerte mit immer größer werdenden Abständen unterhalb der Funktionswerte, sodass die Modellfunktion nur innerhalb des Zeitraums von 1960 bis 1990 geeignet erscheint.

1.4 $$\frac{1}{20}\cdot\int_5^{25} 3{,}02\cdot e^{0{,}019\cdot t}\,dt = \frac{1}{20}\cdot\left[\frac{3{,}02}{0{,}019}\cdot e^{0{,}019\cdot t}\right]_5^{25} = \frac{1}{20}\cdot\frac{3{,}02}{0{,}019}\cdot\left(e^{0{,}019\cdot 25}-e^{0{,}019\cdot 5}\right)$$
$$\approx 4{,}04$$

Das Ergebnis gibt auf Basis der Modellfunktion f(t) die durchschnittliche Bevölkerungszahl der Weltbevölkerung zwischen dem Beginn des Jahres 1965 und dem Beginn des Jahres 1985 an. Sie beträgt etwa 4,04 Milliarden Menschen.

2.1 Für $t=0$, also den Beginn des Jahres 1985, beträgt die Änderungsrate pro Jahr 0,0891, also $g'(0)=d\cdot e^{k\cdot 0}=0{,}0891$. Daraus folgt $d=0{,}0891$.

Der Beginn des Jahres 2020 entspricht $t=35$ (mit 1985 als neuem Zeitnullpunkt). Daraus folgt unter Verwendung von $d=0{,}0891$:

$$g'(35)=0{,}0891\cdot e^{k\cdot 35}\quad\text{und}\quad g'(35)=0{,}078\quad\Rightarrow\quad 0{,}0891\cdot e^{k\cdot 35}=0{,}078$$

Division durch 0,0891 und anschließendes Logarithmieren ergibt:

$$\ln(e^{k\cdot 35})=k\cdot 35=\ln\left(\frac{0{,}078}{0{,}0891}\right)$$

Daraus folgt:

$$k=\frac{1}{35}\cdot\ln\left(\frac{0{,}078}{0{,}0891}\right)\approx -0{,}0038$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung:

$$g'(t)=0{,}0891\cdot e^{-0{,}0038\cdot t}$$