

## TABLE DES MATIÈRES

### Introduction

### Chapitre I. IDÉAUX PREMIERS ET LOCALISATION

1. Notations et définitions . . . . .	1
2. Lemme de Nakayama. . . . .	1
3. Localisation . . . . .	2
4. Anneaux et modules noethériens . . . . .	2
5. Spectre. . . . .	3
6. Le cas noethérien. . . . .	4
7. Idéaux premiers associés . . . . .	4

### Chapitre II. OUTILS ET SORITES

A) Filtrations et graduations . . . . .	8
1. Anneaux et modules filtrés . . . . .	8
2. Topologie définie par une filtration . . . . .	9
3. Complétion des modules filtrés . . . . .	10
4. Anneaux et modules gradués . . . . .	11
5. Où tout redevient noethérien; filtrations $q$ -adiques . . . . .	15
6. Modules différentiels filtrés. . . . .	20
B) Polynômes de Hilbert-Samuel . . . . .	26
1. Rappel sur les polynômes à valeurs entières. . . . .	26
2. Fonctions additives sur les catégories de modules. . . . .	27
3. Le polynôme caractéristique de Hilbert . . . . .	29
4. Les invariants de Hilbert-Samuel . . . . .	32

### Chapitre III. THÉORIE DE LA DIMENSION

A) Dimension des extensions entières. . . . .	38
1. Définitions. . . . .	38
2. Le premier théorème de Cohen-Seidenberg. . . . .	39
3. Le second théorème de Cohen-Seidenberg . . . . .	41
B) Dimension dans les anneaux noethériens. . . . .	43
1. Dimension d'un module. . . . .	43
2. Le cas semi-local noethérien . . . . .	44
3. Systèmes de paramètres . . . . .	47
C) Anneaux normaux . . . . .	48
1. Caractérisation des anneaux normaux. . . . .	48
2. Propriétés des anneaux normaux . . . . .	51
3. Fermeture intégrale. . . . .	53
D) Anneaux de polynômes. . . . .	54
1. Dimension de l'anneau $A[X_1, \dots, X_n]$ . . . . .	54
2. Le lemme de normalisation. . . . .	57
3. Applications. I. Dimension dans les algèbres de polynômes. . . . .	59
4. Applications. II. Fermeture intégrale d'une algèbre de type fini . . . . .	62
5. Applications. III. Dimension d'une intersection dans l'espace affine . . . . .	64

### Chapitre IV. DIMENSION ET CODIMENSION HOMOLOGIQUES

A) Le complexe de l'algèbre extérieure (Koszul) . . . . .	67
1. Le cas simple. . . . .	67
2. Acyclicité et propriétés fonctorielles du complexe de l'algèbre extérieure . . . . .	69
3. La suite spectrale associée au complexe de l'algèbre extérieure. . . . .	74
4. La codimension homologique d'un module sur un anneau semi-local. . . . .	78

<b>B) Modules de Cohen-Macaulay . . . . .</b>	<b>83</b>
1. Définition des modules de Cohen-Macaulay . . . . .	83
2. Diverses caractérisations des modules de Cohen-Macaulay. . . . .	85
3. Variété d'un module de Cohen-Macaulay. . . . .	88
4. Idéaux premiers et complétion. . . . .	91
<b>C) Dimension homologique des modules noethériens . . . . .</b>	<b>93</b>
1. La dimension homologique d'un module . . . . .	93
2. Le cas noethérien. . . . .	95
3. Le cas local . . . . .	99
<b>D) Les anneaux réguliers. . . . .</b>	<b>101</b>
1. Propriétés et caractérisations des anneaux locaux réguliers. . . . .	101
2. Propriétés de permanence des anneaux locaux réguliers. . . . .	106
3. Délocalisation . . . . .	108
4. Un critère de normalité. . . . .	110
<b>Appendice I. RÉSOLUTIONS MINIMALES. . . . .</b>	<b>112</b>
1. Définition des résolutions minimales. . . . .	112
2. Application. . . . .	114
3. Cas du complexe de l'algèbre extérieure. . . . .	116
<b>Appendice II. POSITIVITÉ DES CARACTÉRISTIQUES D'EULER-POINCARÉ SUPÉRIEURES. . . . .</b>	<b>119</b>
<b>Chapitre V. LES MULTIPLICITÉS</b>	
<b>A) La multiplicité d'un module . . . . .</b>	<b>124</b>
1. Le groupe des cycles d'un anneau . . . . .	124
2. La multiplicité d'un module. . . . .	125
<b>B) La multiplicité d'intersection de deux modules. . . . .</b>	<b>127</b>
1. La réduction à la diagonale. . . . .	127
2. Produits tensoriels complétés. . . . .	129
3. Anneaux réguliers d'égale caractéristique. . . . .	135
4. Conjectures. . . . .	137
5. Anneaux réguliers d'inégale caractéristique (cas non ramifié) . . . . .	138
6. Anneaux réguliers quelconques. . . . .	141
<b>C) Raccord avec la géométrie algébrique. . . . .</b>	<b>144</b>
1. Formule des Tor. . . . .	144
2. Cycles sur une variété affine non singulière . . . . .	145
3. Premières formules . . . . .	146
4. Démonstration du théorème 1. . . . .	149
5. Rationalité des intersections. . . . .	149
6. Images directes. . . . .	150
7. Images réciproques . . . . .	151
8. Extensions de la théorie des intersections . . . . .	154
<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>157</b>