

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Elementare Newtonsche Mechanik</b>	<b>1</b>
1.0 Die Newtonschen Gesetze (1687) und ihre Interpretation	1
1.1 Gleichförmig geradlinige Bewegung und Inertialsysteme	4
1.2 Satz über Inertialsysteme	5
1.3 Impuls und Kraft	5
1.4 Typische Kräfte; Bemerkung über Maßeinheiten	7
1.5 Raum, Zeit und Kräfte	9
1.6 Das Zweiteilchensystem mit inneren Kräften	10
1.6.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung	10
1.6.2 Beispiel: Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern (Keplerproblem)	10
1.6.3 Schwerpunkts- und Relativimpuls im Zweiteilchensystem	15
1.7 Systeme von endlich vielen Teilchen	15
1.8 Der Schwerpunktsatz	16
1.9 Der Drehimpulssatz	17
1.10 Der Energiesatz	17
1.11 Das abgeschlossene $n$ -Teilchensystem	18
1.12 Galileitransformationen	19
1.13 Bemerkungen über Raum und Zeit bei Galileiinvarianz	22
1.14 Konservative Kraftfelder	24
1.15 Eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes	26
1.16 Beispiele für Bewegungen in einer Dimension	27
1.16.1 Harmonischer Oszillator	27
1.16.2 Das ebene mathematische Pendel im Schwerfeld	28
1.17 Phasenraum für das $n$ -Teilchensystem (im $\mathbb{R}^3$ )	29
1.18 Der Existenz- und Eindeigkeitssatz für Lösungen von (1.41)	30
1.19 Physikalische Konsequenzen von Satz aus Abschnitt 1.18	31
1.20 Lineare Systeme	33
1.21 Zur Integration eindimensionaler Bewegungsgleichungen	35
1.22 Beispiel: Ebenes Pendel mit beliebigem Ausschlag	36
1.23 Beispiel: Zweiteilchensystem mit Zentralkraft	38
1.24 Rotierendes Koordinatensystem: Coriolis- und Zentrifugalkräfte	41
1.25 Beispiele zu Abschnitt 1.24	43
1.26 Streuung zweier Teilchen, die über eine Zentralkraft miteinander wechselwirken: Kinematik	45
1.27 Zweiteilchenstreuung mit Zentralkraft: Dynamik	48
1.28 Beispiel: Coulombstreuung zweier Teilchen mit gleichen Massen und Ladungen	51

1.29 Ausgedehnte mechanische Körper .....	54
1.30 Virial und zeitliche Mittelwerte .....	57
Anhang: Praktische Übungen .....	59
<b>2. Die Prinzipien der kanonischen Mechanik .....</b>	<b>63</b>
2.1 Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten .....	63
2.1.1 Definition von Zwangsbedingungen .....	63
2.1.2 Generalisierte Koordinaten .....	64
2.2 Das d'Alembertsche Prinzip .....	65
2.2.1 Definition der virtuellen Verrückungen .....	65
2.2.2 Statischer Fall .....	65
2.2.3 Dynamischer Fall .....	66
2.3 Die Lagrangeschen Gleichungen .....	67
2.4 Beispiele zu Abschnitt 2.3 .....	68
2.5 Exkurs über Variationsprinzipien .....	70
2.6 Hamiltonsches Extremalprinzip .....	72
2.7 Die Euler-Lagrangegleichungen .....	73
2.8 Beispiele zu Abschnitt 2.7 .....	74
2.9 Anmerkung über die Nicht-Eindeutigkeit der Lagrangefunktion .....	75
2.10 Eichtransformationen an der Lagrangefunktion .....	75
2.11 Zulässige Transformationen der verallgemeinerten Koordinaten .....	76
2.12 Die Hamiltonfunktion und ihr Zusammenhang mit der Lagrangefunktion $L$ .....	78
2.13 Legendretransformation für den Fall einer Variablen .....	79
2.14 Legendretransformation im Fall mehrerer Veränderlicher .....	80
2.15 Kanonische Systeme .....	82
2.16 Beispiele zu Abschnitt 2.15 .....	82
2.17 Variationsprinzip auf die Hamiltonfunktion angewandt .....	84
2.18 Symmetrien und Erhaltungssätze .....	84
2.19 Satz von E. Noether .....	85
2.20 Infinitesimale Erzeugende für Drehung um eine Achse .....	86
2.21 Exkurs über die Drehgruppe .....	88
2.22 Infinitesimale Drehungen und ihre Erzeugenden .....	90
2.23 Kanonische Transformationen .....	91
2.24 Beispiele von kanonischen Transformationen .....	95
2.25 Die Struktur der kanonischen Gleichungen .....	96
2.26 Beispiel: Lineares, autonomes System in einer Dimension .....	97
2.27 Kanonische Transformationen in kompakter Notation .....	99
2.28 Zur symplektischen Struktur des Phasenraums .....	101
2.29 Der Liouvillesche Satz .....	103
2.29.1 Lokale Form .....	104
2.29.2 Integrale Form .....	105
2.30 Beispiele zum Liouvilleschen Satz .....	106
2.31 Die Poissonklammer .....	108
2.32 Eigenschaften der Poissonklammern .....	110
2.33 Infinitesimale kanonische Transformationen .....	112
2.34 Integrale der Bewegung .....	114
2.35 Hamilton-Jacobische Differentialgleichung .....	116
2.36 Beispiele zur Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung .....	117

2.37	Hamilton-Jacobigleichung und integrable Systeme .....	121
2.37.1	Lokale Glättung von Hamiltonschen Systemen .....	121
2.37.2	Integrable Systeme .....	125
2.37.3	Winkel- und Wirkungsvariable .....	129
2.38	Störungen an quasiperiodischen Hamiltonschen Systemen .....	130
2.39	Autonome, nichtentartete Hamiltonsche Systeme in der Nähe von integrablen Systemen .....	133
2.40	Beispiele, Mittelungsmethode .....	134
2.40.1	Anharmonischer Oszillator .....	134
2.40.2	Mittlung von Störungen .....	136
	Anhang: Praktische Übungen .....	138
<b>3.</b>	<b>Mechanik des starren Körpers .....</b>	<b>143</b>
3.0	Definition des starren Körpers .....	143
3.1	Infinitesimale Verrückung eines starren Körpers .....	145
3.2	Kinetische Energie und Trägheitstensor .....	146
3.3	Eigenschaften des Trägheitstensors .....	147
3.4	Der Satz von Steiner .....	151
3.5	Beispiele zum Satz von Steiner .....	151
3.6	Drehimpuls des starren Körpers .....	154
3.7	Kräftefreie Bewegung von starren Körpern .....	155
3.8	Die Eulerschen Winkel .....	157
3.9	Definition der Eulerschen Winkel .....	158
3.10	Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers .....	159
3.11	Die Eulerschen Gleichungen .....	162
3.12	Anwendungsbeispiel: Der kräftefreie Kreisel .....	163
3.13	Kräftefreier Kreisel und geometrische Konstruktionen .....	166
3.14	Der Kreisel im Rahmen der kanonischen Mechanik .....	169
3.15	Beispiel: Symmetrischer Kinderkreisel im Schwerfeld .....	172
3.16	Anmerkung zum Kreiselproblem .....	174
	Anhang: Praktische Übungen .....	174
<b>4.</b>	<b>Relativistische Mechanik .....</b>	<b>179</b>
4.0	Schwierigkeiten der nichtrelativistischen Mechanik .....	180
4.1	Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit .....	182
4.2	Die Lorentztransformationen .....	183
4.3	Analyse der Lorentz- und Poincarétransformationen .....	188
4.3.1	Drehungen und Spezielle Lorentztransformationen .....	190
4.3.2	Bedeutung der Speziellen Lorentztransformationen .....	193
4.4	Zerlegung von Lorentztransformationen in ihre Komponenten .....	194
4.4.1	Satz über orthochrone eigentliche Lorentztransformationen ..	194
4.4.2	Korollar zum Satz 4.4.1 und einige Konsequenzen .....	196
4.5	Addition von relativistischen Geschwindigkeiten .....	199
4.6	Galilei- und Lorentz-Raumzeitmannigfaltigkeiten .....	201
4.7	Bahnkurven und Eigenzeit .....	205
4.8	Relativistische Dynamik .....	206
4.8.1	Relativistisches Kraftgesetz .....	206
4.8.2	Energie-Impulsvektor .....	207
4.8.3	Die Lorentzkraft .....	210

4.9	Zeitdilatation und Längenkontraktion .....	212
4.10	Mehr über die Bewegung kräftefreier Teilchen .....	213
4.11	Die konforme Gruppe .....	216
<b>5.</b>	<b>Geometrische Aspekte der Mechanik .....</b>	<b>219</b>
5.1	Mannigfaltigkeiten von verallgemeinerten Koordinaten .....	220
5.2	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten .....	222
5.2.1	Der Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ .....	222
5.2.2	Glatte oder differenzierbare Mannigfaltigkeiten .....	223
5.2.3	Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten .....	225
5.3	Geometrische Objekte auf Mannigfaltigkeiten .....	229
5.3.1	Funktionen und Kurven auf Mannigfaltigkeiten .....	230
5.3.2	Tangentialvektoren an eine glatte Mannigfaltigkeit .....	232
5.3.3	Das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit .....	233
5.3.4	Vektorfelder auf glatten Mannigfaltigkeiten .....	235
5.3.5	Äußere Formen .....	238
5.4	Kalkül auf Mannigfaltigkeiten .....	240
5.4.1	Differenzierbare Abbildungen von Mannigfaltigkeiten .....	240
5.4.2	Integralkurven von Vektorfeldern .....	242
5.4.3	Äußeres Produkt von Einsformen .....	243
5.4.4	Die äußere Ableitung .....	245
5.4.5	Äußere Ableitung und Vektoren im $\mathbb{R}^3$ .....	246
5.5	Hamilton-Jacobische und Lagrangesche Mechanik .....	249
5.5.1	Koordinatenmannigfaltigkeit $Q$ , Geschwindigkeitsraum $TQ$ , und Phasenraum $T^*Q$ .....	249
5.5.2	Die kanonische Einsform auf dem Phasenraum $(T^*Q)$ .....	252
5.5.3	Die kanonische Zweiform als symplektische Form auf $M$ ....	255
5.5.4	Symplektische Zweiform und Satz von Darboux .....	256
5.5.5	Die kanonischen Gleichungen .....	259
5.5.6	Die Poissonklammer .....	262
5.5.7	Zeitabhängige Hamiltonsche Systeme .....	265
5.6	Lagrangesche Mechanik und Lagrangegleichungen .....	267
5.6.1	Zusammenhang der beiden Formulierungen der Mechanik ...	267
5.6.2	Die Lagrangesche Zweiform .....	268
5.6.3	Energie als Funktion auf $TQ$ und Lagrangesches Vektorfeld .	270
5.6.4	Vektorfelder auf dem Geschwindigkeitsraum $TQ$ und Lagrangesche Gleichungen .....	271
5.6.5	Legendretransformation und Zuordnung von Lagrange- und Hamiltonfunktion .....	273
<b>6.</b>	<b>Stabilität und Chaos .....</b>	<b>277</b>
6.0	Qualitative Dynamik .....	277
6.1	Vektorfelder als dynamische Systeme .....	278
6.1.1	Einige Definitionen für Vektorfelder und ihre Integralkurven .	280
6.1.2	Gleichgewichtslagen und Linearisierung von Vektorfeldern ...	282
6.1.3	Stabilität von Gleichgewichtslagen .....	285
6.1.4	Kritische Punkte von Hamiltonschen Vektorfeldern .....	287
6.1.5	Stabilität und Instabilität beim kräftefreien Kreisel .....	290

6.2	Langzeitverhalten dynamischer Flüsse und Abhängigkeit von äußeren Parametern .....	291
6.2.1	Strömung im Phasenraum .....	292
6.2.2	Allgemeinere Stabilitätskriterien .....	293
6.2.3	Attraktoren .....	296
6.2.4	Die Poincaréabbildung .....	299
6.2.5	Verzweigungen von Flüssen bei kritischen Punkten .....	303
6.2.6	Verzweigungen von periodischen Bahnen .....	306
6.3	Deterministisches Chaos .....	308
6.3.1	Iterative Abbildungen in einer Dimension .....	308
6.3.2	Quasi-Definition von Chaos .....	310
6.3.3	Ein Beispiel: Die logistische Gleichung .....	312
6.4	Quantitative Aussagen über ungeordnete Bewegung .....	316
6.4.1	Aufbruch in deterministisches Chaos .....	316
6.4.2	Liapunovsche Charakteristische Exponenten .....	320
6.4.3	Seltsame Attraktoren und Fraktale .....	323
6.5	Chaotische Bewegungen in der Himmelsmechanik .....	324
6.5.1	Rotationsdynamik von Planetensatelliten .....	325
6.5.2	Bahndynamik von Planetoiden mit chaotischem Verhalten ...	329
7.	<b>Kontinuierliche Systeme</b> .....	333
7.1	Diskrete und kontinuierliche Systeme .....	333
7.2	Grenzübergang zum kontinuierlichen System .....	337
7.3	Hamiltonsches Extremalprinzip für kontinuierliche Systeme .....	338
7.4	Kanonisch konjugierter Impuls und Hamiltondichte .....	340
7.5	Beispiel: Die Pendelkette .....	341
7.6	Bemerkungen .....	345
	<b>Anhang</b> .....	349
	A. Einige mathematische Begriffe .....	349
	B. Einige Hinweise zum Rechnereinsatz .....	352
	C. Historische Anmerkungen .....	356
	<b>Literatur</b> .....	361
	<b>Aufgaben</b> .....	365
	<b>Lösungen der Aufgaben</b> .....	383
	<b>Sachverzeichnis</b> .....	427