

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Elementare Newtonsche Mechanik</b> .....	1
1.0 Die Newtonschen Gesetze (1687) und ihre Interpretation .....	1
1.1 Gleichförmig geradlinige Bewegung und Inertialsysteme .....	4
1.2 Satz über Inertialsysteme .....	5
1.3 Impuls und Kraft .....	5
1.4 Typische Kräfte; Bemerkung über Maßeinheiten .....	7
1.5 Raum, Zeit und Kräfte .....	9
1.6 Das Zweiteilchensystem mit inneren Kräften .....	10
1.6.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung .....	10
1.6.2 Beispiel: Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern (Keplerproblem) .....	10
1.6.3 Schwerpunkts- und Relativimpuls im Zweiteilchensystem .....	15
1.7 Systeme von endlich vielen Teilchen .....	15
1.8 Der Schwerpunktsatz .....	16
1.9 Der Drehimpulssatz .....	17
1.10 Der Energiesatz .....	17
1.11 Das abgeschlossene $n$ -Teilchensystem .....	18
1.12 Galileitransformationen .....	19
1.13 Bemerkungen über Raum und Zeit bei Galileiinvarianz .....	22
1.14 Konservative Kraftfelder .....	24
1.15 Eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes .....	26
1.16 Beispiele für Bewegungen in einer Dimension .....	27
1.16.1 Harmonischer Oszillator .....	27
1.16.2 Das ebene mathematische Pendel im Schwerefeld .....	28
1.17 Phasenraum für das $n$ -Teilchensystem (im $\mathbb{R}^3$ ) .....	29
1.18 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen von (1.41) .....	30
1.19 Physikalische Konsequenzen von Satz aus Abschnitt 1.18 .....	31
1.20 Lineare Systeme .....	33
1.21 Zur Integration eindimensionaler Bewegungsgleichungen .....	35
1.22 Beispiel: Ebenes Pendel mit beliebigem Ausschlag .....	36
1.23 Beispiel: Zweiteilchensystem mit Zentralkraft .....	38
1.24 Rotierendes Koordinatensystem: Coriolis- und Zentrifugalkräfte .....	41
1.25 Beispiele zu Abschnitt 1.24 .....	43
1.26 Streuung zweier Teilchen, die über eine Zentralkraft miteinander wechselwirken: Kinematik .....	45
1.27 Zweiteilchenstreuung mit Zentralkraft: Dynamik .....	48
1.28 Beispiel: Coulombstreuung zweier Teilchen mit gleichen Massen und Ladungen .....	51

1.29 Ausgedehnte mechanische Körper .....	54
1.30 Virial und zeitliche Mittelwerte .....	57
Anhang: Praktische Übungen .....	59
<b>2. Die Prinzipien der kanonischen Mechanik .....</b>	<b>63</b>
2.1 Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten .....	63
2.1.1 Definition von Zwangsbedingungen .....	63
2.1.2 Generalisierte Koordinaten .....	64
2.2 Das d'Alembertsche Prinzip .....	65
2.2.1 Definition der virtuellen Verrückungen .....	65
2.2.2 Statischer Fall .....	65
2.2.3 Dynamischer Fall .....	66
2.3 Die Lagrangeschen Gleichungen .....	67
2.4 Beispiele zu Abschnitt 2.3 .....	68
2.5 Exkurs über Variationsprinzipien .....	70
2.6 Hamiltonsches Extremalprinzip .....	72
2.7 Die Euler-Lagrangegleichungen .....	73
2.8 Beispiele zu Abschnitt 2.7 .....	74
2.9 Anmerkung über die Nicht-Eindeutigkeit der Lagrangefunktion .....	75
2.10 Eichtransformationen an der Lagrangefunktion .....	75
2.11 Zulässige Transformationen der verallgemeinerten Koordinaten .....	76
2.12 Die Hamiltonfunktion und ihr Zusammenhang mit der Lagrangefunktion $L$ .....	78
2.13 Legendretransformation für den Fall einer Variablen .....	79
2.14 Legendretransformation im Fall mehrerer Veränderlicher .....	80
2.15 Kanonische Systeme .....	82
2.16 Beispiele zu Abschnitt 2.15 .....	82
2.17 Variationsprinzip auf die Hamiltonfunktion angewandt .....	84
2.18 Symmetrien und Erhaltungssätze .....	84
2.19 Satz von E. Noether .....	85
2.20 Infinitesimale Erzeugende für Drehung um eine Achse .....	86
2.21 Exkurs über die Drehgruppe .....	88
2.22 Infinitesimale Drehungen und ihre Erzeugenden .....	90
2.23 Kanonische Transformationen .....	91
2.24 Beispiele von kanonischen Transformationen .....	95
2.25 Die Struktur der kanonischen Gleichungen .....	96
2.26 Beispiel: Lineares, autonomes System in einer Dimension .....	97
2.27 Kanonische Transformationen in kompakter Notation .....	99
2.28 Zur symplektischen Struktur des Phasenraums .....	101
2.29 Der Liouillesche Satz .....	103
2.29.1 Lokale Form .....	104
2.29.2 Integrale Form .....	105
2.30 Beispiele zum Liouilleschen Satz .....	106
2.31 Die Poissonklammer .....	108
2.32 Eigenschaften der Poissonklammern .....	110
2.33 Infinitesimale kanonische Transformationen .....	112
2.34 Integrale der Bewegung .....	114
2.35 Hamilton-Jacobische Differentialgleichung .....	116
2.36 Beispiele zur Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung .....	117

2.37	Hamilton-Jacobigleichung und integrable Systeme .....	121
2.37.1	Lokale Glättung von Hamiltonschen Systemen .....	121
2.37.2	Integrable Systeme .....	125
2.37.3	Winkel- und Wirkungsvariable .....	129
2.38	Störungen an quasiperiodischen Hamiltonschen Systemen .....	130
2.39	Autonome, nichtentartete Hamiltonsche Systeme in der Nähe von integrabilen Systemen .....	133
2.40	Beispiele, Mittelungsmethode .....	134
2.40.1	Anharmonischer Oszillator .....	134
2.40.2	Mittelung von Störungen .....	136
	Anhang: Praktische Übungen .....	138
<b>3.</b>	<b>Mechanik des starren Körpers .....</b>	<b>143</b>
3.0	Definition des starren Körpers .....	143
3.1	Infinitesimale Verrückung eines starren Körpers .....	145
3.2	Kinetische Energie und Trägheitstensor .....	146
3.3	Eigenschaften des Trägheitstensors .....	147
3.4	Der Satz von Steiner .....	151
3.5	Beispiele zum Satz von Steiner .....	151
3.6	Drehimpuls des starren Körpers .....	154
3.7	Kräftefreie Bewegung von starren Körpern .....	155
3.8	Die Eulerschen Winkel .....	157
3.9	Definition der Eulerschen Winkel .....	158
3.10	Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers .....	159
3.11	Die Eulerschen Gleichungen .....	162
3.12	Anwendungsbeispiel: Der kräftefreie Kreisel .....	163
3.13	Kräftefreier Kreisel und geometrische Konstruktionen .....	166
3.14	Der Kreisel im Rahmen der kanonischen Mechanik .....	169
3.15	Beispiel: Symmetrischer Kinderkreisel im Schwerefeld .....	172
3.16	Anmerkung zum Kreiselproblem .....	174
	Anhang: Praktische Übungen .....	174
<b>4.</b>	<b>Relativistische Mechanik .....</b>	<b>179</b>
4.0	Schwierigkeiten der nichtrelativistischen Mechanik .....	180
4.1	Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit .....	182
4.2	Die Lorentztransformationen .....	183
4.3	Analyse der Lorentz- und Poincarétransformationen .....	188
4.3.1	Drehungen und Spezielle Lorentztransformationen .....	190
4.3.2	Bedeutung der Speziellen Lorentztransformationen .....	193
4.4	Zerlegung von Lorentztransformationen in ihre Komponenten .....	194
4.4.1	Satz über orthochrone eigentliche Lorentztransformationen ..	194
4.4.2	Korollar zum Satz 4.4.1 und einige Konsequenzen .....	196
4.5	Addition von relativistischen Geschwindigkeiten .....	199
4.6	Galilei- und Lorentz-Raumzeitmannigfaltigkeiten .....	201
4.7	Bahnkurven und Eigenzeit .....	205
4.8	Relativistische Dynamik .....	206
4.8.1	Relativistisches Kraftgesetz .....	206
4.8.2	Energie-Impulsvektor .....	207
4.8.3	Die Lorentzkraft .....	210

4.9	Zeitdilatation und Längenkontraktion . . . . .	212
4.10	Mehr über die Bewegung kräftefreier Teilchen . . . . .	213
4.11	Die konforme Gruppe . . . . .	216
<b>5.</b>	<b>Geometrische Aspekte der Mechanik . . . . .</b>	<b>219</b>
5.1	Mannigfaltigkeiten von verallgemeinerten Koordinaten . . . . .	220
5.2	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	222
5.2.1	Der Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ . . . . .	222
5.2.2	Glatte oder differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	223
5.2.3	Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten . . . . .	225
5.3	Geometrische Objekte auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	229
5.3.1	Funktionen und Kurven auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	230
5.3.2	Tangentialvektoren an eine glatte Mannigfaltigkeit . . . . .	232
5.3.3	Das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit . . . . .	233
5.3.4	Vektorfelder auf glatten Mannigfaltigkeiten . . . . .	235
5.3.5	Äußere Formen . . . . .	238
5.4	Kalkül auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	240
5.4.1	Differenzierbare Abbildungen von Mannigfaltigkeiten . . . . .	240
5.4.2	Integralkurven von Vektorfeldern . . . . .	242
5.4.3	Äußeres Produkt von Einsformen . . . . .	243
5.4.4	Die äußere Ableitung . . . . .	245
5.4.5	Äußere Ableitung und Vektoren im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	246
5.5	Hamilton-Jacobische und Lagrangesche Mechanik . . . . .	249
5.5.1	Koordinatenmannigfaltigkeit $Q$ , Geschwindigkeitsraum $TQ$ , und Phasenraum $T^*Q$ . . . . .	249
5.5.2	Die kanonische Einsform auf dem Phasenraum ( $T^*Q$ ) . . . . .	252
5.5.3	Die kanonische Zweiform als symplektische Form auf $M$ . . . . .	255
5.5.4	Symplektische Zweiform und Satz von Darboux . . . . .	256
5.5.5	Die kanonischen Gleichungen . . . . .	259
5.5.6	Die Poissonklammer . . . . .	262
5.5.7	Zeitabhängige Hamiltonsche Systeme . . . . .	265
5.6	Lagrangesche Mechanik und Lagrange-Gleichungen . . . . .	267
5.6.1	Zusammenhang der beiden Formulierungen der Mechanik . . . . .	267
5.6.2	Die Lagrangesche Zweiform . . . . .	268
5.6.3	Energie als Funktion auf $TQ$ und Lagrangesches Vektorfeld . . . . .	270
5.6.4	Vektorfelder auf dem Geschwindigkeitsraum $TQ$ und Lagrangesche Gleichungen . . . . .	271
5.6.5	Legendretransformation und Zuordnung von Lagrange- und Hamiltonfunktion . . . . .	273
<b>6.</b>	<b>Stabilität und Chaos . . . . .</b>	<b>277</b>
6.0	Qualitative Dynamik . . . . .	277
6.1	Vektorfelder als dynamische Systeme . . . . .	278
6.1.1	Einige Definitionen für Vektorfelder und ihre Integralkurven . . . . .	280
6.1.2	Gleichgewichtslagen und Linearisierung von Vektorfeldern . . . . .	282
6.1.3	Stabilität von Gleichgewichtslagen . . . . .	285
6.1.4	Kritische Punkte von Hamiltonschen Vektorfeldern . . . . .	287
6.1.5	Stabilität und Instabilität beim kräftefreien Kreisel . . . . .	290

6.2	Langzeitverhalten dynamischer Flüsse und Abhängigkeit von äußereren Parametern .....	291
6.2.1	Strömung im Phasenraum .....	292
6.2.2	Allgemeinere Stabilitätskriterien .....	293
6.2.3	Attraktoren .....	296
6.2.4	Die Poincaréabbildung .....	299
6.2.5	Verzweigungen von Flüssen bei kritischen Punkten .....	303
6.2.6	Verzweigungen von periodischen Bahn .....	306
6.3	Deterministisches Chaos .....	308
6.3.1	Iterative Abbildungen in einer Dimension .....	308
6.3.2	Quasi-Definition von Chaos .....	310
6.3.3	Ein Beispiel: Die logistische Gleichung .....	312
6.4	Quantitative Aussagen über ungeordnete Bewegung .....	316
6.4.1	Aufbruch in deterministisches Chaos .....	316
6.4.2	Liapunovsche Charakteristische Exponenten .....	320
6.4.3	Seltsame Attraktoren und Fraktale .....	323
6.5	Chaosche Bewegungen in der Himmelsmechanik .....	324
6.5.1	Rotationsdynamik von Planetensatelliten .....	325
6.5.2	Bahndynamik von Planetoiden mit chaotischem Verhalten ..	329
7.	<b>Kontinuierliche Systeme</b> .....	333
7.1	Diskrete und kontinuierliche Systeme .....	333
7.2	Grenzübergang zum kontinuierlichen System .....	337
7.3	Hamiltonsches Extremalprinzip für kontinuierliche Systeme .....	338
7.4	Kanonisch konjugierter Impuls und Hamiltondichte .....	340
7.5	Beispiel: Die Pendelkette .....	341
7.6	Bemerkungen .....	345
<b>Anhang</b>	.....	349
A.	Einige mathematische Begriffe .....	349
B.	Einige Hinweise zum Rechnereinsatz .....	352
C.	Historische Anmerkungen .....	356
<b>Literatur</b>	.....	361
<b>Aufgaben</b>	.....	365
<b>Lösungen der Aufgaben</b>	.....	383
<b>Sachverzeichnis</b>	.....	427