2024

Abitur

Original-Prüfu
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Gymnasium · Gesamts

Mathematik G

+ Übungsaufgaben
+ Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz

PDF

STARK

Inhalt

* Der in der Aufgabe B4 behandelte Themenbereich ist nicht mehr prüfungsrelevant und wird daher nicht mehr abgedruckt.

Abiturprüfung 2021

Abiturprüfung 2022

Abiturprüfung 2023

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode auf der Umschlaginnenseite).

Bei **MyStark** finden Sie:

- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil A
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Lernvideos** zu Aufgaben aus Prüfungsteil A
- **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2017 bis 2023** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Den Zugangscode zu MyStark finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie haben Mathematik in Nordrhein-Westfalen als Grundkurs belegt und planen, in diesem Fach Ihr Abitur abzulegen. Mit diesem Buch helfen wir Ihnen, sich effektiv auf das **Zentralabitur 2024** vorzubereiten:

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches viele Informationen zur **gezielten Vorbereitung auf die Abiturprüfung**. Dazu gehören u. a. eine Aufstellung der für die Prüfung 2024 relevanten inhaltlichen Schwerpunkte und Fokussierungen, Hinweise zum Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Sie finden darüber hinaus zahlreiche **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Das Buch enthält **Übungsaufgaben** im Stil der schriftlichen Abiturprüfung sowie die vom Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen gestellten **Original-Abituraufgaben 2020 bis 2023**.
- Zu sämtlichen Aufgaben wurden von unseren Autoren **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Hinweise und Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem erhalten Sie zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil A
  - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  - **Lernvideos** zu Aufgaben aus Prüfungsteil A
  - **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht
  - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2017 bis 2023**, die nicht im Buch abgedruckt sind

  Den Zugangscode zu MyStark finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2024 vom Schulministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls bei MyStark.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Ihr Stark Verlag

Hinweise und Tipps zum Abitur 2024

1 Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

In Nordrhein-Westfalen gibt es im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Die Aufgaben werden im Auftrag des Ministeriums für Schule und Bildung erstellt. Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung sind die verbindlichen Vorgaben der Kernlehrpläne für die gymnasiale Oberstufe.
Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik besteht aus einem **Prüfungsteil A**, der **hilfsmittelfrei** zu bearbeitende Aufgaben umfasst, und einem **Prüfungsteil B**, bestehend aus Aufgaben mit realitätsnahem Kontext und innermathematischen Argumentationsaufgaben **mit Hilfsmitteln**.
Seit dem Abitur 2021 haben sich die zeitlichen Vorgaben für die Bearbeitung geändert. Die Aufgaben der früheren Abiturprüfungen sind inhaltlich (allerdings nicht unbedingt vom Umfang her) als Übungsmaterial weiterhin gut geeignet.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die schriftliche Abiturprüfung für den Grundkurs gliedert sich in zwei Prüfungsteile:

– Für den **Prüfungsteil A** erhält die Schule einen Satz **hilfsmittelfrei** zu bearbeitender Aufgaben, die grundlegende mathematische Kompetenzen abfragen. Er besteht aus einem Pflicht- und einem Wahlpflichtteil.
  Der **Pflichtteil** enthält drei Aufgaben: je eine Aufgabe aus der Analysis, der Vektoriellen Geometrie und der Stochastik. Alle **drei Aufgaben müssen bearbeitet** werden.
  Der **Wahlpflichtteil** enthält sechs Aufgaben: zwei aus der Analysis, zwei aus der Vektoriellen Geometrie und zwei aus der Stochastik. Die Schülerinnen und Schüler wählen ohne Einschränkungen aus diesen sechs Aufgaben **zwei Aufgaben** aus, die sie lösen.
  Insgesamt werden also im Prüfungsteil A **fünf Aufgaben** bearbeitet.
  Beim Lösen der Aufgaben darf **kein Taschenrechner** und **keine Formelsammlung** verwendet werden.
– Für den **Prüfungsteil B** erhält die Schule zwei Aufgabensätze – einen GTR-Aufgabensatz und einen CAS-Aufgabensatz. Jeder Aufgabensatz beinhaltet zwei Analysisaufgaben, eine Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie und eine Stochastikaufgabe.

Die **Fachlehrkraft** stellt aus einem der beiden Aufgabensätze (GTR oder CAS) die Aufgaben für den Prüfungsteil B nach folgenden Vorgaben zusammen:
Die Lehrkraft wählt eine der beiden Analysisaufgaben aus. Die Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie und die Aufgabe zur Stochastik sind verbindlich festgelegt. Insgesamt gibt es also eine **Analysisaufgabe**, eine Aufgabe zur **Vektoriellen Geometrie** und eine Aufgabe zur **Stochastik**.

Zugelassene **Hilfsmittel** für den Prüfungsteil B:

- GTR (grafikfähiger Taschenrechner) **oder** CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

Dauer der Prüfung

Für die Bearbeitung stehen den Schülerinnen und Schülern im Grundkurs insgesamt **255 Minuten** zur Verfügung. Dabei beträgt die Arbeitszeit einschließlich Auswahlzeit für den Prüfungsteil A, der zu Beginn der Prüfung bearbeitet wird, maximal 90 Minuten. Sobald die Schülerinnen und Schüler mit dem Prüfungsteil A fertig sind, können sie ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben des Prüfungsteils B, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel.
Sollte der Prüfungsteil A schneller bearbeitet werden können, darf auch schon früher mit dem Prüfungsteil B begonnen werden. Dann steht für diesen entsprechend mehr Zeit zur Verfügung.

2 Inhaltliche Schwerpunkte und Fokussierungen 2024

Die inhaltlichen **Schwerpunkte und Fokussierungen** für den **Grundkurs** Mathematik in der **Abiturprüfung 2024** sind folgende:

Schwerpunkte und Fokussierungen	**Beispiele**
Funktionen und Analysis	
• Funktionen als mathematische Modelle	2022 – Aufgabe B2 (CAS)
• Fortführung der Differenzialrechnung	
– Untersuchung von ganzrationalen Funktionen	2022 – Aufgabe B2 (CAS)
– Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei p(x) ein Polynom mit maximal drei Summanden ist	2022 – Aufgabe B1 (CAS)
– Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben	2022 – Aufgabe A3, Teilaufgabe b
– Interpretation und Bestimmungen von Parametern der oben genannten Funktionen	2022 – Aufgabe B1 (CAS), Teilaufgabe d
– notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)	2022 – Aufgabe A3, Teilaufgabe b (2)

• Grundverständnis des Integralbegriffs • Integralrechnung	2021 – Aufgabe B2 (GTR/CAS), Teilaufgabe b (3) 2022 – Aufgabe A3, Teilaufgabe b (3)
Analytische Geometrie und Lineare Algebra • lineare Gleichungssysteme • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte • Lagebeziehungen • Skalarprodukt	 2021 – Aufgabe B3, Teilaufgabe b (1) 2022 – Aufgabe B3 (GTR/CAS) 2021 – Aufgabe A3, Teilaufgabe d (2) 2022 – Aufgabe B3 (GTR/CAS), Teilaufgabe a (2)
Stochastik • Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen • Binomialverteilung	 2021 – Aufgabe B4 (GTR/CAS) 2022 – Aufgabe B4 (GTR/CAS)

3 Leistungsanforderung und Bewertung

Im Grundkurs beläuft sich die Höchstpunktzahl für den Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel) auf 25 Punkte und für den Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln) auf 75 Punkte (Analysis 35 Punkte, Vektorielle Geometrie und Stochastik jeweils 20 Punkte).

Die Bewertung der Klausuraufgaben erfolgt auf der Grundlage eines der Aufgabenstellung beigefügten Bewertungsschemas. Darin sind Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln. Das Bewertungsschema ist Grundlage der Beurteilung. Von der Modelllösung abweichende Lösungen werden entsprechend bewertet, die für die Aufgabenstellung vorgesehene Höchstpunktzahl kann aber nicht überschritten werden. Ferner können nur ganze Punktzahlen vergeben werden. Ausschlaggebend ist hier die fachliche Richtigkeit und Vollständigkeit.

Ein weiteres wichtiges Bewertungskriterium ist die Darstellungsleistung, in welche der richtige Einsatz der Fachsprache und die Strukturiertheit der Ausführungen einfließen. Die Bewertung der Darstellungsleistung wird in die Bewertung der inhaltlichen Leistungen integriert. Punktabzug aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (Rechtschreibung und Grammatik) kann im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen erfolgen.

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung
Prüfungsteil A – Aufgaben ohne Hilfsmittel

Pflichtteil

a) Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Gleichungen
$f(x) = 3x^2 - 12x + 9,\ x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = -3x + 9,\ x \in \mathbb{R}$.

(1) Ermitteln Sie die Schnittstellen der Graphen der Funktionen f und g.

(2) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g begrenzt wird.

b) Gegeben sind die Punkte $A(1|2|-1)$, $B(-3|6|-3)$ und $D(3|6|3)$.

(1) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD rechtwinklig-gleichschenklig ist.

(2) Ergänzen Sie das Dreieck ABD durch einen weiteren Punkt C zu einem Parallelogramm ABCD.
Erläutern Sie, um welche besondere Art von Parallelogramm es sich handelt.

c) Der Fußballverein Fortuna 09 veranstaltet zur Aufbesserung seiner Vereinskasse beim nächsten Heimspiel eine Lotterie. Es werden Lose zum Preis von 2 € das Stück verkauft. In der Lotterie befinden sich nur Nieten oder Gewinne. Jeder Gewinn beträgt 5 €. Von den insgesamt 1 000 zur Verfügung stehenden Losen sind 850 Nieten.

(1) Ordnen Sie den folgenden Ereignissen den korrekten Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit zu, wenn die Zufallsgröße X die Anzahl der Gewinne angibt.
A: Von 10 gekauften Losen gewinnt kein Los.
B: Von 10 gekauften Losen sind genau 2 Gewinnlose.
C: Unter 10 gekauften Losen ist mindestens ein Gewinnlos.

$P_1 = \binom{10}{0} \cdot 0{,}85^0 \cdot 0{,}15^{10}$ $\qquad$ $P_2 = \binom{10}{8} \cdot 0{,}15^8 \cdot 0{,}85^2$

$P_3 = 10 \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^9$ $\qquad$ $P_4 = \binom{10}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^8$

$P_5 = \binom{10}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^{10}$ $\qquad$ $P_6 = 1 - 0{,}85^{10}$

(2) Ein Fan kauft 10 Lose.
Berechnen Sie seinen erwarteten Gewinn bzw. Verlust.

Wahlpflichtteil

d) Gegeben ist die Funktion g mit der Gleichung $g(x) = 2e^{-x}$, $x \geq 0$.

(1) Eine der folgenden Abbildungen zeigt den Graphen der Funktion g.
Geben Sie begründet an, welche Abbildung dies ist.

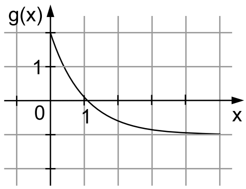


Abbildung 1

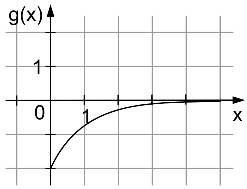


Abbildung 2

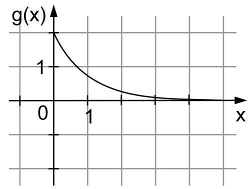


Abbildung 3

(2) Zusätzlich ist die Funktion f gegeben mit der Gleichung
$f(x) = -0{,}5x^2 - 2x + 2,\ \ x \leq 0.$
Überprüfen Sie, ob die Graphen der Funktionen f und g an der Stelle $x = 0$ knickfrei (glatt) ineinander übergehen.

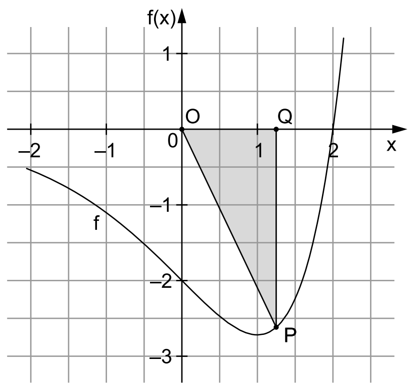
e) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (x-2) \cdot e^x,\ \ x \in \mathbb{R}.$

(1) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit der Gleichung $F(x) = (x-3) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist, und geben Sie die Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, die $G(0) = -2$ erfüllt.

(2) Die Abbildung rechts zeigt den Graphen der Funktion f und einen beliebigen Punkt P auf dem Funktionsgraphen im IV. Quadranten.
O sei der Koordinatenursprung und Q ein Punkt auf der x-Achse. Das im Punkt Q rechtwinklige Dreieck OPQ soll maximalen Flächeninhalt haben.
Begründen Sie, dass

$$A(x) = -\frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x),\ \ 0 \leq x \leq 2$$

eine geeignete Zielfunktion für dieses Extremalproblem ist.



Abbildung

f) Die Ebene E und die Gerade g werden durch die folgenden Parametergleichungen beschrieben:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

Hinweise und Tipps

Pflichtteil

Teilaufgabe a

(1) Setzen Sie die Funktionsterme von f und g gleich.

Ein Produkt wird null, wenn wenigstens ein Faktor null ist.

(2) Stellen Sie einen Term für die Differenzfunktion von f und g auf.

Integrieren Sie über die Differenzfunktion. Die Integrationsgrenzen sind die Schnittstellen.

Achten Sie darauf, dass eine Fläche keinen negativen Flächeninhalt besitzen kann.

Teilaufgabe b

(1) Bei einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Seiten gleich lang.

Für die Länge eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2}$

Stehen die beiden gleich langen Seiten zudem senkrecht aufeinander, handelt es sich um ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck.

Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt gleich null ist.

(2) Bei einem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel, die Diagonalen halbieren sich.

Denken Sie daran, dass das Ausgangsdreieck rechtwinklig-gleichschenklig ist.

Teilaufgabe c

(1) Beachten Sie, dass die Zufallsgröße X die Anzahl der Gewinne angibt.

Überlegen Sie, wie viele Gewinnlose in der Lotterie sind und wie hoch damit die Trefferwahrscheinlichkeit p ist.

(2) Berechnen Sie den Erwartungswert für ein Los.

Beachten Sie den Kaufpreis des Loses. Dieser muss vom Gewinn abgezogen werden.

Multiplizieren Sie den Erwartungswert mit 10.

Wahlpflichtteil

Teilaufgabe d

(1) Denken Sie an den Wertebereich der natürlichen Exponentialfunktion.

(2) Zwei Graphen gehen dann knickfrei (glatt) ineinander über, wenn die Graphen an der „Nahtstelle“ den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung besitzen.

Überprüfen Sie beide Bedingungen.

Teilaufgabe e

(1) Die Funktion F ist dann eine Stammfunktion der Funktion f, falls $F'(x) = f(x)$ gilt.
Bestimmen Sie die Ableitung mithilfe der Produktregel.
Die Menge aller Stammfunktionen von f ist gegeben durch $G(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Konstante C so, dass die Bedingung $G(0) = -2$ erfüllt ist.

(2) Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet sich nach der Formel:
$A = \frac{1}{2} \cdot \text{Kathete 1} \cdot \text{Kathete 2}$
Durch die Koordinaten des Punktes P sind die Längen der Katheten festgelegt.
Beachten Sie, dass der Punkt P im IV. Quadranten liegt und seine y-Koordinate daher negativ ist.

Teilaufgabe f

(1) Zeigen Sie zunächst, dass die Gerade g parallel zur Ebene E verläuft.
Was muss in diesem Fall für den Richtungsvektor der Geraden und die Spannvektoren der Ebene gelten?
Weisen Sie nach, dass sich der Richtungsvektor der Geraden als Linearkombination der Spannvektoren der Ebene darstellen lässt.
Nun könnte noch der Fall vorliegen, dass die Gerade g in der Ebene E liegt.
Schließen Sie diese Möglichkeit aus, indem Sie eine Punktprobe durchführen.

(2) Überlegen Sie, welche Eigenschaft die Richtungsvektoren paralleler Geraden erfüllen.
Wählen Sie einen geeigneten Anbindungspunkt und stellen Sie die Punkt-Richtungsform der Geraden auf.

Teilaufgabe g

(1) Die x_2-Koordinatenachse kann als Gerade aufgefasst werden.
Entnehmen Sie der Geradengleichung für die x_2-Koordinatenachse einen Anbindungspunkt und einen Spannvektor für die Ebene.
Mithilfe des Punktes A, der nicht auf der x_2-Koordinatenachse liegt, kann der zweite Spannvektor für die Ebene gebildet werden.

(2) Ein Vektor steht senkrecht zur Ebene E, wenn er zu den Spannvektoren von E orthogonal ist.
Dies kann mithilfe des Skalarproduktes gezeigt werden.

(3) Beachten Sie Ihre bisherigen Ergebnisse.
Der Abstand von Punkt und Spiegelpunkt zur Ebene E ist gleich.
Nutzen Sie aus, dass der Vektor $\overrightarrow{BA}$ senkrecht zur Ebene E verläuft und seine Länge dem Abstand des Punktes B zur Ebene E entspricht.

Teilaufgabe h

(1) Gehen Sie von der Zufallsgröße X aus, die die Anzahl der Treffer ins Zentrum angibt.

Maximal einer bei Ereignis B bedeutet, dass entweder kein Pfeil oder genau ein Pfeil trifft.

(2) Entscheiden Sie anhand des Erwartungswertes und anhand der Länge n der Binomialverteilung.

Teilaufgabe i

(1) Gehen Sie von der binomialverteilten Zufallsgröße X aus für die Anzahl der Treffer von Elias.

Welche Werte ergeben sich für n und p?

(2) Beachten Sie, dass hier Wahrscheinlichkeiten von 1 abgezogen werden. Dies stellt ein Gegenereignis dar.

Was stellen die einzelnen Wahrscheinlichkeiten dar?

(3) Bedenken Sie, dass $p_1 + p_2 = 1$ und damit $P(X_1 = k) = P(X_2 = 5 - k)$ gilt.

Das Diagramm von Elias ist daher symmetrisch zum Diagramm von Jan.

Verwenden Sie diesen Zusammenhang, um die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten in Abbildung 1 b einzutragen.

Lösung

Pflichtteil

a) (1) Die Schnittstellen von f und g ergeben sich durch Gleichsetzen der Funktionsterme:

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 12x + 9 &= -3x + 9 \quad \Big| +3x - 9 \\
3x^2 - 9x &= 0 \\
3x \cdot (x - 3) &= 0
\end{aligned}
$$

Ein Produkt wird null, wenn wenigstens ein Faktor null ist.

$x_1 = 0$ oder $x_2 = 3$

(2) Zur Berechnung des Flächeninhalts wird über die Differenzfunktion integriert. Diese lautet:

$d(x) = f(x) - g(x) = 3x^2 - 12x + 9 - (-3x + 9) = 3x^2 - 9x$

Da Flächen immer positiv sind, wird der Betrag benötigt.

$$
\begin{aligned}
A &= \left| \int_0^3 d(x)\,dx \right| \\
&= \left| \int_0^3 (3x^2 - 9x)\,dx \right| \\
&= \left| \left[x^3 - \frac{9}{2}x^2 \right]_0^3 \right| \\
&= \left| 27 - \frac{81}{2} - 0 \right| \\
&= |\,27 - 40{,}5\,| \\
&= |-13{,}5| \\
&= 13{,}5\,[\text{FE}]
\end{aligned}
$$

Statt den Betrag zu verwenden, kann auch mithilfe geeigneter Funktionswerte, z. B. $f(1)$ und $g(1)$, festgestellt werden, dass der Graph der Funktion g zwischen den Integrationsgrenzen oberhalb des Graphen von f verläuft. Wird als Differenzfunktion nicht $f(x) - g(x)$, sondern $g(x) - f(x)$ gewählt, ergibt sich bei der Integration auch ohne Berücksichtigung des Betrags ein positiver Wert.

b) (1) Bei einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Seiten gleich lang. Stehen diese beiden gleich langen Seiten senkrecht aufeinander, so ist das Dreieck rechtwinklig.

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6\,[\text{LE}]$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6\,[\text{LE}]$$

$$|\overrightarrow{BD}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36+36} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}\,[\text{LE}]$$

Das Dreieck ist gleichschenklig mit den gleich langen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$.

Diese Seiten stehen senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ gleich null ist.

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + (-2) \cdot 4 = -8 + 16 - 8 = 0$$

Das gleichschenklige Dreieck hat bei A einen rechten Winkel. Es ist daher rechtwinklig-gleichschenklig.

(2) Den Ortsvektor des Punktes C erhält man, indem man an B den Vektor $\overrightarrow{AD}$ oder an D den Vektor $\overrightarrow{AB}$ anträgt oder indem man den Mittelpunkt M der Seite $\overline{BD}$ bestimmt und den Punkt A an M spiegelt.

$$\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C(-1|10|1)$$

Alternativ:

$$\vec{c} = \vec{d} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C(-1|10|1)$$

Alternativ:

Der Ortsvektor des Mittelpunktes der Seite $\overline{BD}$ ist gleich der halben Summe der Ortsvektoren der Endpunkte B und D.

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} + \vec{d}) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M(0|6|0)$$

Der Eckpunkt C ergibt sich durch Spiegelung von A an M:

$$\vec{c} = \vec{a} + 2 \cdot \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C(-1|10|1)$$

Bei dem Parallelogramm handelt es sich um ein Quadrat, da alle Seiten gleich lang sind und bei A ein rechter Winkel vorliegt.

c) (1) Es handelt sich um einen 10-stufigen Bernoulli-Versuch mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{150}{1\,000} = 0{,}15$ für ein Gewinnlos und der Wahrscheinlichkeit $q = \frac{850}{1\,000} = 0{,}85$ für eine Niete. Die Zufallsgröße X, die die Anzahl der Gewinne angibt, ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}15$.

Für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse erhält man:

$$P(A) = P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^{10} = P_5$$

$$P(B) = P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^8 = P_4$$

$$P(C) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^{10} = 1 - 0{,}85^{10} = P_6$$

Die korrekte Zuordnung ist daher:

$A \Leftrightarrow P_5$; $B \Leftrightarrow P_4$; $C \Leftrightarrow P_6$

Abiturprüfung 2022 Mathematik Grundkurs (Nordrhein-Westfalen)
Prüfungsteil B – Analysis B1 (CAS)

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 9 \cdot x \cdot e^{-1,5 \cdot x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion f ist in Abbildung 1 dargestellt.

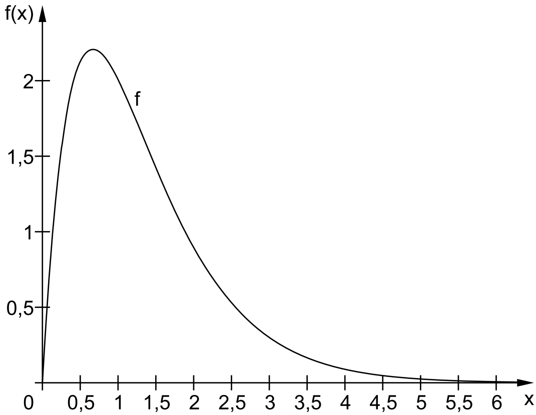


Abbildung 1

Punkte

a) (1) Begründen Sie, dass die Funktion f nur eine Nullstelle besitzt. 2

(2) Untersuchen Sie den Graphen von f rechnerisch auf lokale Extrempunkte. 5

(3) Der Graph der Funktion f hat genau einen Wendepunkt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes. 2

(4) Ermitteln Sie, an welchen Stellen im Intervall [0; 6] der Graph der Funktion f die größte bzw. die kleinste Steigung hat. 3

b) Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 6$ schließen die Fläche A ein.

(1) Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche A. 2

(2) Für jedes $0 < u \leq 6$ sind $O(0|0)$, $P(6|0)$ und $Q_u(u|f(u))$ die Eckpunkte eines Dreiecks.

(i) Zeichnen Sie das Dreieck OPQ_u mit $u = 2$ in Abbildung 1 ein.

(ii) Begründen Sie, dass sich der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ_u in Abhängigkeit von u mit der Gleichung $A_{OPQ_u}(u) = 3 \cdot f(u)$ berechnen lässt.

(iii) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, für welchen Wert von u der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ_u maximal wird.

(iv) Bestimmen Sie alle Werte von u, für die das Dreieck OPQ_u einen Flächeninhalt von 4 Flächeneinheiten hat. 7

c) Für ein z mit $\frac{2}{3} < z < \frac{4}{3}$ ist der Punkt $R(z\,|\,f(z))$ gegeben. Der Graph der Funktion t ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt R. Für $x < z$ wird der Graph von f betrachtet. Für $x \geq z$ wird der Graph von t betrachtet. Abbildung 2 veranschaulicht diese Situation für das Beispiel $z = 0{,}9$.
Die betrachteten Graphen der Funktionen f und t schließen mit der x-Achse die in Abbildung 2 grau dargestellte Fläche ein. Der Wert von z kann mithilfe der folgenden Bedingungen so bestimmt werden, dass diese Fläche einen Flächeninhalt von 4 Flächeneinheiten hat:

I: $t(z) = f(z)$

II: $t'(z) = f'(z)$

III: $\int_0^z f(x)\,dx + \int_z^c t(x)\,dx = 4$, wobei c die Nullstelle von t ist.

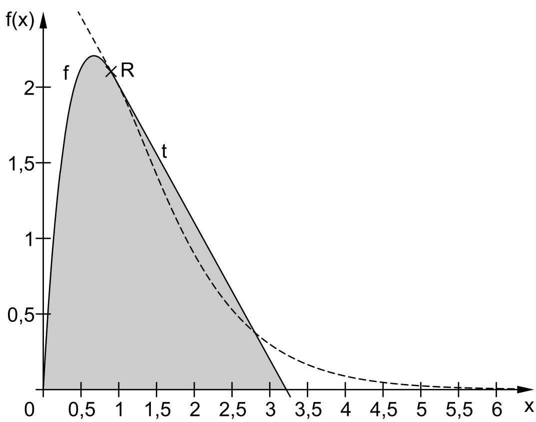


Abbildung 2

(1) (i) Begründen Sie die Wahl der Bedingungen I und II.

(ii) Erläutern Sie die linke Seite der Gleichung in Bedingung III. 4

(2) Aus den Bedingungen folgt $z \approx 0{,}9428$. [Nachweis nicht erforderlich.]

(i) Bestimmen Sie für $z = 0{,}9428$ rechnerisch eine Gleichung der Funktion t, deren Graph die Tangente an den Graphen von f im Punkt $R(z\,|\,f(z))$ ist.

(ii) Ermitteln Sie die Nullstelle dieser Funktion t. 4

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe a

(1) Setzen Sie den Funktionsterm gleich null.
Beachten Sie, dass $e^x \neq 0$ gilt.

(2) Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist $f'(x) = 0$.
Bestimmen Sie die Ableitung mithilfe der Produkt- und Kettenregel.
Die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle ist $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$.
Alternativ: Die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle ist $f'(x) = 0$ und an der möglichen Extremstelle tritt ein Vorzeichenwechsel bei der Ableitung auf.
Berechnen Sie den Funktionswert an der Extremstelle.

(3) Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle ist $f''(x) = 0$.
Beachten Sie, dass es nach Aufgabenstellung nur eine Wendestelle gibt.
Berechnen Sie den Funktionswert an der Wendestelle.

(4) An welchen Stellen kann die Steigung maximal bzw. minimal werden?
Berechnen Sie die Steigungen an diesen Stellen.

Teilaufgabe b

(1) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Flächeninhalt einer Fläche, wenn der Graph der Funktion oberhalb der x-Achse verläuft, und dem bestimmten Integral?

(2) (i) Zeichnen Sie die Punkte in die Abbildung ein und verbinden Sie diese.

(ii) Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Grundseite g und der Höhe h berechnet sich nach der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.
Wählen Sie als Grundseite des Dreiecks die Strecke $\overline{OP}$ und als Höhe des Dreiecks die Lotstrecke von Q_u auf die x-Achse.

(iii) Beachten Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks dem Dreifachen des Funktionswertes der Funktion f an der Stelle $x = u$ entspricht.
Überlegen Sie, was dies für das Maximum des Flächeninhalts bedeutet.

(iv) Setzen Sie den Flächeninhalt gleich dem vorgegebenen Flächeninhalt und lösen Sie die Gleichung mit dem CAS.

Teilaufgabe c

(1) (i) Vergleichen Sie die Bedingungen I und II mit Abbildung 2 im Punkt R.

(ii) Unterteilen Sie die graue Fläche in Abbildung 2 durch das Lot von R auf die x-Achse.
Vergleichen Sie die Flächeninhalte der Teilflächen mit dem Term auf der linken Seite der Gleichung.

(2) (i) Beachten Sie Bedingung I und II.
Die Tangente hat die allgemeine Form der Geradengleichung $y = m \cdot x + n$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an der vorgegebenen z-Stelle.
(ii) In der Nullstelle der Tangente t ist der Funktionswert gleich null.

Teilaufgabe d

(1) (i) Bestimmen Sie den Hochpunkt bzw. den Schnittpunkt grafisch.
(ii) Tragen Sie die bekannten Punkte ein und beachten Sie das Grenzwertverhalten des Graphen der Funktion.

(2) Vergleichen Sie die Lage der Hochpunkte miteinander.

Lösung

a) (1) An der Nullstelle ist der Funktionswert gleich null.

$$9x \cdot e^{-1,5x} = 0 \quad \Big| : (9 \cdot e^{-1,5x}) \neq 0$$
$$x = 0$$

Die einzige Nullstelle ist $x = 0$.

(2) Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist $f'(x) = 0$.
Eine Ableitung mithilfe der Produkt- und Kettenregel ergibt:

$$f'(x) = 9 \cdot e^{-1,5x} + 9x \cdot (-1,5) \cdot e^{-1,5x} = 9 \cdot e^{-1,5x} \cdot (1 - 1,5x)$$

Es gilt:

$$9 \cdot e^{-1,5x} \cdot (1 - 1,5x) = 0 \quad \Big| : (9 \cdot e^{-1,5x}) \neq 0$$
$$1 - 1,5x = 0$$
$$x = \frac{2}{3}$$

Die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle ist $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 9 \cdot (-1,5) \cdot e^{-1,5x} + 9 \cdot (1 - 1,5x) \cdot (-1,5) \cdot e^{-1,5x} \\ &= -13,5 \cdot e^{-1,5x} \cdot (1 + 1 - 1,5x) \\ &= -13,5 \cdot e^{-1,5x} \cdot (2 - 1,5x) \end{aligned}$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = -13,5 \cdot e^{-1} \cdot (2 - 1) = -13,5 \cdot e^{-1} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximumstelle}$$

Alternativ:
Die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle ist $f'(x)=0$ und an der möglichen Extremstelle tritt ein Vorzeichenwechsel bei der Ableitung auf.
Es werden Werte vor und nach der Nullstelle der 1. Ableitungsfunktion in die 1. Ableitung eingesetzt:

$f'(0) = 9 \cdot e^0 \cdot 1 > 0$

$f'(1) = -4{,}5 \cdot e^{-1{,}5} < 0$

An der möglichen Extremstelle tritt ein (+/–)-Vorzeichenwechsel auf, daher ist $x = \frac{2}{3}$ eine Maximumstelle.

Für die y-Koordinate des Maximums gilt:

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot e^{-1{,}5 \cdot \frac{2}{3}} = 6 \cdot e^{-1}$$

Der Graph der Funktion f hat den Hochpunkt $H\left(\frac{2}{3} \,\middle|\, \frac{6}{e}\right)$.

(3) Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle ist $f''(x)=0$.

$$\begin{aligned} -13{,}5 \cdot e^{-1{,}5x} \cdot (2-1{,}5x) &= 0 \qquad \Big| : (-13{,}5 \cdot e^{-1{,}5x}) \neq 0 \\ 2 - 1{,}5x &= 0 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Da es genau eine Wendestelle gibt, ist diese $x = \frac{4}{3}$.
Die y-Koordinate des Wendepunktes erhält man durch Einsetzen der Wendestelle in den Funktionsterm:

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = 9 \cdot \frac{4}{3} \cdot e^{-1{,}5 \cdot \frac{4}{3}} = 12 \cdot e^{-2}$$

Der Graph der Funktion f hat den Wendepunkt $W\left(\frac{4}{3} \,\middle|\, \frac{12}{e^2}\right)$.

(4) Im Wendepunkt oder an den Rändern des Definitionsbereichs ist die Steigung am kleinsten oder größten.

$$f'\left(\frac{4}{3}\right) = 9 \cdot e^{-1{,}5 \cdot \frac{4}{3}} \cdot \left(1 - 1{,}5 \cdot \frac{4}{3}\right) = 9 \cdot e^{-2} \cdot (1-2) = -9 \cdot e^{-2} \approx -1{,}22$$

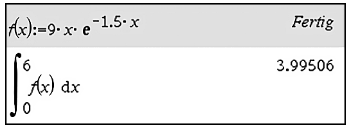
$$f'(0) = 9 \cdot e^{-1{,}5 \cdot 0} \cdot (1 - 1{,}5 \cdot 0) = 9 \cdot e^0 = 9$$

$$f'(6) = 9 \cdot e^{-1{,}5 \cdot 6} \cdot (1 - 1{,}5 \cdot 6) = 9 \cdot e^{-9} \cdot (-8) = -72e^{-9} \approx -0{,}009$$

Die Steigung ist an der Wendestelle $x = \frac{4}{3}$ am kleinsten und an der Stelle $x=0$ am größten.

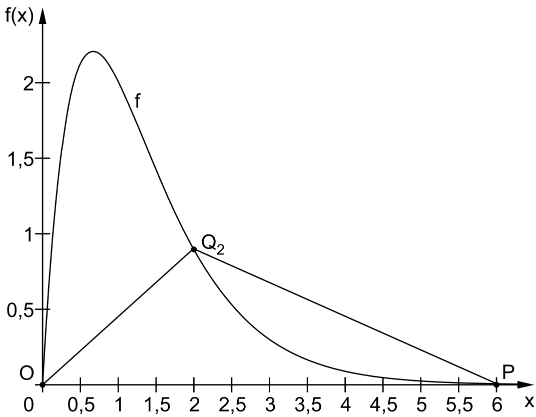
b) (1) Der Graph der Funktion f verläuft oberhalb der x-Achse. Der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse im Intervall [0; 6] entspricht dem Wert des bestimmten Integrals über die Funktion f(x) mit den Integrationsgrenzen 0 und 6:

$$\int_0^6 f(x)\,dx \approx 4\,[\text{FE}]$$



Der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse im Intervall [0; 6] hat einen Flächeninhalt von ca. 4 Flächeneinheiten.

(2) (i) Einzeichnen und Verbinden der Punkte O, P und Q_2 ergibt das Dreieck OPQ_2.



(ii) Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Grundseite g und der Höhe h berechnet sich nach folgender Formel:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Wählt man als Grundseite des Dreiecks die Strecke $\overline{OP}$, so ist die Länge der Grundseite gleich dem Abstand des Punktes P vom Ursprung. Sie beträgt 6 Längeneinheiten. Die Höhe des Dreiecks entspricht der Lotstrecke von Q_u auf die x-Achse, also dem Funktionswert f(u).
Somit gilt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot f(u) = 3 \cdot f(u)$$