DARIUS KORIAKO

Kants Philosophie der Mathematik

Grundlagen – Voraussetzungen – Probleme

FELIX MEINER VERLAG
HAMBURG

FELIX MEINER VERLAG

Im Digitaldruck »on demand« hergestelltes, inhaltlich mit der ursprüng lichen Ausgabe identisches Exemplar. Wir bitten um Verständnis für unvermeidliche Abweichungen in der Ausstattung, die der Einzelfertigung geschuldet sind. Weitere Informationen unter: www.meiner.de/bod

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über ‹http://portal.dnb.de› abrufbar.
ISBN 978-3-7873-1429-4
ISBN eBook: 978-3-7873-2540-5

 Gesamtherstellung: BoD, Norderstedt. Gedruckt auf alterungsbeständigem Werkdruckpapier, hergestellt aus 100 % chlorfrei gebleichtem Zellstoff. Printed in Germany.
www.meiner.de

VORWORT

»In dem, was man Philosophie der Mathematik nennt, fehlt gewöhnlich eins von beiden; entweder die Philosophie oder die Mathematik.« Dieser Satz ist kein Zitat; ersetzt man jedoch »Mathematik« durch »Kunst«, dann geht er in jenen Ausspruch Friedrich Schlegels über, den Adorno als Motto seiner *Ästhetischen Theorie* vorgesehen hatte.

In der vorliegenden Untersuchung ist es die Mathematik, die mancher Leser vermissen wird. Denn zwar hat Kant der Mathematik in seinem philosophischen System einen prominenten Ort zugewiesen; doch wer seine Werke mit der Erwartung aufschlägt, Erhellendes über Einzelfragen zu finden, der wird enttäuscht. Die klassischen Probleme der Mathematikphilosophie (das Existenzproblem, die Begründung der Prinzipien, die Analyse des Beweisverfahrens) werden von Kant monoton mit ein und derselben Formel beantwortet: mathematische Erkenntnis ist Erkenntnis durch Konstruktion in reiner Anschauung, und sie ist synthetisch-apriorische Erkenntnis. Doch es fragt sich, ob eine solche Formel der Vielfalt und der Dynamik mathematischen Denkens gerecht werden kann. Dies ist eine der leitenden Fragen dieser Untersuchung.

Nur einem einzigen Punkt hat Kant seine ganze Aufmerksamkeit gewidmet: der Sicherstellung der Anwendbarkeit von Mathematik. Das ist es, was ihm eine umfassende Begründung wert war. Es ist bekannt, daß er sie in seiner Konzeption einer reinen Anschauung gegeben zu haben glaubte. Kant war der Ansicht, in dieser Theorie einen untrennbaren Konnex zwischen Mathematik und Wirklichkeit gestiftet zu haben. Wir verfügen über eine »reine« Anschauung von Raum und Zeit, die zugleich die Form einer jeden empirischen Anschauung ist; diese reine Anschauung liegt auch der Mathematik als ihre natürliche Erkenntnisquelle zugrunde; folglich gilt: »Die Synthesis der Räume und Zeiten, als der wesentlichen Form aller Anschauung, ist das, was zugleich die Apprehension der Erscheinung, mithin jede äußere Erfahrung, folglich auch alle Erkenntnis der Gegenstände derselben möglich macht, und was die Mathematik im reinen Gebrauch von jener beweist, das gilt auch notwendig von dieser.« (KV B 206)

Hier wird deutlich, wie tief Kants Mathematikverständnis in den Fundamenten seiner Philosophie verankert ist. Für Kant ist mathematische Erkenntnis nur Erkenntnis, wenn sie einen realen Erkenntnisstatus besitzt, d. h., wenn sie anwendbare Erkenntnis ist. Der Sinn dessen, wofür Mathematik einsteht, erschöpft sich für ihn in dieser Verwiesenheit der »reinen« Mathematik auf die »angewandte«. Die Frage: »Wie ist reine Mathematik möglich?« (*Prol.* §5) ist daher nicht so zu verstehen, als bezöge sie sich auf die Möglichkeit der reinen Mathematik als reiner; eine solche Mathematik wäre innerhalb der kantischen Konzeption eine nur vorgebliche Wissenschaft. Vielmehr bezieht sie sich auf die Möglichkeit einer reinen Erkenntnis dessen, was für die Wirklichkeit gültig ist; und nur aus diesem apriorischen Wirklichkeitsbezug gewinnt Mathematik für Kant philosophische Brisanz.

Damit ist die Perspektive bezeichnet, aus welcher Kant die Mathematik spätestens seit 1770 zu sehen pflegte: sie ist eine Wissenschaft, die uns in besonders tiefliegende und globale Eigenschaften der erscheinenden Welt einweiht. Weil sie solcherart auf die Welt als erscheinende bezogen ist, muß sie auch ihre Erkenntnisse aus einer Quelle beziehen, die aufs engste mit dieser Welt, ihrer Struktur und unserer Wahrnehmung dieser Struktur, verknüpft ist. So kommt es 1770 zur Ausbildung einer Theorie, die drei scheinbar voneinander unabhängige Themen sozusagen mit einem Schlag abhandelt: die Theorie von Raum und Zeit als reinen Anschauungen, und die von dieser Theorie abhängigen Lehrstücke von der mathematischen Erkenntnis als *cognitio sensitiva* und vom *mundus sensibilis*.

Auch in der vorliegenden Untersuchung wird diese Perspektive einzunehmen sein, da sie diejenige Kants ist und seinen Begriff von Mathematik wesentlich bestimmt. Aber der Schwerpunkt liegt hier eigentlich auf einer anderen Ebene: hier interessiert Kants Bild vom Mathematischen, und die Frage, wie dieses Bild einerseits durch seine Philosophie geprägt wurde, und andererseits auf diese zurückwirkte. So wird hier versuchsweise eine Fallstudie zum Verhältnis von Mathematik und Philosophie gegeben, und zu den Schwierigkeiten, die sich aus diesem Verhältnis (besonders für die Philosophie) ergeben.

Die vorliegende Untersuchung ist aus einer Arbeit hervorgegangen, die im November 1997 vom Fachbereich Gesellschaftswissenschaften und Philosophie der Philipps-Universität Marburg als Dissertation angenommen wurde. Sie wurde für den Druck überarbeitet.

Der Verfasser möchte an dieser Stelle Reinhard Brandt seinen herzlichsten Dank aussprechen für Kritik, Ermutigung und Toleranz, sowie dem Mitherausgeber der Kant-Forschungen, Werner Stark, für die Sorgfalt der Textrevision. Michael Friedman hat freundlicherweise eine frühere Version kritisch kommentiert und – trotz methodischer Bedenken – wertvolle Hinweise gegeben. In der letzten, schwierigsten, Phase der Textherstellung war mir die editorische Unterstützung durch Timo Off und Oliver Nebelung eine große Hilfe.

Berlin, Mai 1999 *Darius Koriako*

INHALT

EINLEITUNG

Die Mathematik »mit philosophischem Auge erwogen«

Kants Philosophie der Mathematik ist bisher vorwiegend prospektiv gelesen worden; die unterschiedlichsten Strömungen und Schulen haben sich auf ihn berufen. Er soll (so heißt es bei Gottfried Martin) die axiomatische Mathematikauffassung begründet haben; er habe (sagt Brouwer) die Grundgedanken der intuitionistischen Mathematik vorweggenommen; man finde bei ihm (behauptet Hilbert) Ansätze zur Metamathematik, oder sogar (insistiert Hintikka) Einsichten in tiefliegende quantorenlogische Sachverhalte; und schließlich sei Kant (nach Lorenzen) überhaupt ein veritabler Protokonstruktivist gewesen. Auf der anderen Seite ließe sich mühelos eine umfangreiche Liste illustrer Autoren aufstellen, die Kants Mathematikauffassung für grundsätzlich verfehlt halten. So schreibt etwa Philip Kitcher (1975 S. 123): »[...] Kant's theory was wrong from the beginning. His attempt at explaining mathematical knowledge gives no explanation at all.«

Allen diesen Behauptungen ist gemeinsam, daß sie Wahres mit Falschem oder Irreführendem verquicken. Sicher gibt es Affinitäten z. B. zwischen Kant und Brouwer,[1] oder zwischen Hilbert und Kant,[2] wie auch die systematische Nähe zur Erlanger Schule zweifellos auf der Hand liegt. Andererseits aber kann man es Kitcher nicht verdenken, wenn er aus den Schwierigkeiten im Begriff der reinen Anschauung auf die Unzulänglichkeit von Kants Theorie der Mathematik schließt. Doch niemand scheint sich zu fragen, ob wir überhaupt berechtigt sind, diese modernen Konzepte in Kants Theorie zu projizieren. Könnte es nicht sein, daß gerade diese Einstellung uns daran hindert, das Spezifische in Kants Mathematikbegriff zu erfassen? Und könnte es nicht sein, daß dieses Unvermögen, ältere Konzeptionen des Mathematischen in ihrer Eigenart zu begreifen, auch dafür verantwortlich ist, daß wir die radikalen Umbrüche nicht sehen, die uns von diesen Konzeptionen trennen?

Die heute vorherrschende Tendenz, Kant als einen zeitgenössischen Autor zu betrachten, dessen Thesen kürzlich in einem einschlägigen Fachblatt erschienen sind, ist nicht grundsätzlich verfehlt, denn sie nimmt Kant in seinem philosophischen Anspruch ernst – auch da, wo seine Thesen verworfen werden. Dagegen fördert die philosophiegeschichtliche Herleitung nur selten das Verständnis, wenn der bloße Nachweis von Analogien die Analyse des sachlichen Gehalts ersetzt. Doch auch der Versuch, Kants Thesen direkt in die Sprache der Gegenwartsphilosophie zu übersetzen, scheint nicht immer zu überzeugenden Ergeb-

[1] Vgl. hierzu Posy 1984, 1995, Parsons 1980.

[2] Vgl. hierzu die neueren Untersuchungen von Detlefsen (1993*a*, 1993*b*, 1995).

nissen zu führen. Gewiß haben Interpreten wie Hintikka oder Friedman eine Debatte in Gang gesetzt, die entscheidend dazu beigetragen hat, daß Kantinterpretation heute mit einem hohen Maß an begrifflicher Präzision betrieben wird. Aber diese Interpretationsmethode hat ihre Tücken. Wenn etwa Hintikka dafür plädiert, Kants Konstruktionsbegriff rein logisch zu interpretieren (in Anlehnung an die Konzeption der *ekthesis* bei Proklos), so kommt der Verdacht auf, hier werde Kant nur die Möglichkeit eingeräumt etwas zu sagen, was wir ohnehin schon wissen, daß nämlich allgemeingültige Beweise über Singuläres möglich sind, sofern dabei gewisse Restriktionen beachtet werden.

In vergleichbarer Weise schlägt Michael Friedman vor, Kants These von der Notwendigkeit von Anschauung in mathematischer Erkenntnis als eine These über die Unzulänglichkeit der traditionellen (syllogistischen) Logik zu lesen. Doch ganz abgesehen davon, daß es problematisch ist, Kant einen solchen Grad an logischem Spürsinn zuzuschreiben, wie ihn vermutlich nicht einmal Leibniz besessen hat, wird dabei übersehen, daß Kants Texte vielleicht Einsichten vermitteln könnten, über die wir gerade nicht bereits verfügen. Und die Einsicht, daß monadische Prädikatenkalküle keine unendlichen Individuenbereiche darstellen können, ist nicht gerade aufregend neu.

Damit soll nicht gesagt sein, daß Friedmans Analysen grundsätzlich fehlgeleitet sind – ganz im Gegenteil, diese Analysen sind sogar die Voraussetzung dafür, daß alternative Interpretationen erwogen werden können. Das ist es, was in dieser Schrift unternommen werden soll. Hier wird darauf verzichtet, zu Kants Thesen nach passenden »Gegenstücken« in unserem gegenwärtigen Wissensbestand zu suchen. An die Stelle der prospektiven Betrachtungsweise soll die retrospektive treten: ohne jegliche apologetische oder destruktive Absicht wird untersucht, was Kant über Mathematik gesagt hat, wie er das Gesagte begründete und inwiefern die Einsichten, die ihm am Phänomen Mathematik aufgingen, neu sind – und wenn nicht neu, ob kohärent, und wenn nicht kohärent, so doch wenigstens im Scheitern nachvollziehbar. Denn auch dies kann noch lehrreich sein, wenn man sich nicht auf eine negative Diagnose beschränkt, sondern nach den Gründen solchen Scheiterns fragt.

Die vorliegende Studie erhebt jedoch keinen Vollständigkeitsanspruch; viele wichtige Einzelfragen können hier nicht erörtert werden. Hierzu zählen das schwierige Feld der »Antizipationen der Wahrnehmung« (der *prima matheseos intensorum principia*), das prekäre Thema »Zeit und Zahl«[3] und die Frage nach Kants Bewegungsbegriff.[4] Leider muß auch das Verhältnis zwischen Philosophie und Mathematik im Opus postumum übergangen werden, da mit diesen Texten erhebliche exegetische Probleme verknüpft sind. Daher werden einige

[3] Vgl. hierzu Noske (1997). Kants Überlegungen zum Verhältnis von Zeit und Algebra sind übrigens von W. R. Hamilton aufgegriffen worden; vgl. hierzu Hankins 1976, Winterbourne 1982, Hendry 1984, Øhrstrøm 1985, Napolitano 1990.

[4] Vgl. hierzu Hoffmann 1991.

Leser vergeblich nach einem Kapitel zum Problem des Parallelenpostulats Ausschau halten.[5]

Die Beschränkung auf Grundsätzliches erhält ihre Berechtigung aus der Tatsache, daß auch Kant selbst nur an Prinzipienfragen sich interessiert zeigte. Alle Diskussionen über mathematische Einzelfragen sind ihm von seinen Opponenten aufgenötigt worden.[6] Dieser wichtige Umstand wird von den neueren Interpretationen verdeckt, die zu wenig auf den Kontext dieser Diskussionen achten.

Kant war kein Mathematiker und hat die Entwicklung der zeitgenössischen Mathematik sicher nur am Rande verfolgt. Seine Einstellung zu dieser Wissenschaft war eine genuin philosophische; es war die Verwunderung, ja das Staunen über das Phänomen Mathematik, das seine philosophische Reflexion motivierte und durch das er sich vom professionellen Mathematiker unterschied. Er hat die Mathematik jederzeit »mit philosophischem Auge erwogen« – eine Formulierung, die er einmal zur Charakterisierung des Wolffschen Ähnlichkeitsbegriffs verwendet (*Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze* 72/277), und fast zeitgleich im *Beweisgrund* (50ff./93f.), um ein geradezu ästhetisches Erlebnis zu fassen, das sich auf die Proportionalität der Kreissehnen bezieht.[7] Es ist die Einheit in der Mannigfaltigkeit und die scheinbare Zweckmäßigkeit mathematischer Phänomene, die ihn beeindruckt. So heißt es in *Prol.* §38:

> Wenn man die Eigenschaften des Zirkels betrachtet, dadurch diese Figur so manche willkürliche Bestimmungen, des Raums in ihr, so fort in einer allgemeinen Regel vereinigt, so kann man nicht umhin, diesem geometrischen Dinge eine Natur beizulegen.

Damit ist gemeint, daß sich der Kreis wie ein Naturwesen zweckhaft und in seiner Mannigfaltigkeit doch als Einheit präsentiert. Der Kreis scheint sich in sei-

[5] Die hierzu bereits vorliegende Untersuchung (Büchel 1987) scheint diese Schwierigkeiten nicht gemeistert zu haben. (Besser: Tuschling 1971, Friedman 1992 Kap. 5.) Dieser Fragenkomplex ist überaus schwierig, auch wenn die diesbezügliche Forschungsliteratur den Anschein erweckt, als stünde sie auf festem Boden. Kants Überlegungen zum Parallelenproblem können nicht als Evidenz für die Behauptung verwendet werden, er habe die wesentlichen mathematischen Entwicklungen aufmerksam verfolgt; sie legen eher die Vermutung nahe, er habe den eigentlichen Kern des Problems nicht erfaßt. (Die einzige gründliche Untersuchung von Kants mathematischen Reflexionen stammt von Waschkies: 1987.)

[6] Wie etwa die Diskussion der Kegelschnitte im Streit mit Eberhard, die Frage nach dem epistemischen Status irrationaler Zahlen im Briefwechsel mit Rehberg und wohl auch das Problem der Beweisbarkeit des Parallelenpostulats.

[7] Dasselbe Beispiel führt er auch an anderen Stellen an, so in der Preisschrift von 1762 (73f./278), und mehr als 20 Jahre später in *Prol.* §36, und sogar noch in der *Kritik der Urteilskraft* (§62) – ein Hinweis darauf, daß Kant in der Wahl seiner Beispiele von bemerkenswerter Konstanz war. Man findet es außerdem in den Vorarbeiten zur Streitschrift gegen Eberhard (AA XX 360), im »Losen Blatt Leningrad 2«, Zeile 15^r (vgl. hierzu Waschkies 1987), in der *Metaphysik K 3* (AA XXIX 950), sowie in der *Logik Jäsche* am Ende des Abschnitts VIII der Einleitung (IX 65). (Darauf verweist Waschkies 1987 S.260.) Der Passus in der *Logik Jäsche* scheint jedoch ein Zusatz des Herausgebers zu sein; jedenfalls ist er weder in den Reflexionen, noch in der Pölitz-Nachschrift belegt (so Boswell 1991 S.70).

ner Struktur der begrifflichen Deduktion zu entziehen, denn wir begreifen nicht den Grund dieses Zusammentreffens von Simplizität der Gestalt und Vielfalt der Folgen. Insofern ähnelt diese geometrische Figur tatsächlich einem Naturwesen, das mehr ist, als eine willkürliche Setzung; denn die Naturwesen sind in ihrer inneren Verfaßtheit nicht restlos begreifbar, während die mathematischen »Wesen«, als willkürlich definierte, eigentlich eine nahezu adäquate Erkenntnis ermöglichen sollten.

Bei näherer Betrachtung dieser und ähnlicher Textstellen wird man zu dem Schluß geführt, daß Kants Mathematikphilosophie streng genommen eine Philosophie der Elementarmathematik ist. Es ist wichtig, sich über diesen Punkt im klaren zu sein, um das von Kant über Mathematik Gesagte richtig einschätzen zu können. Denn es ist das Ziel der *Kritik der reinen Vernunft*, die Prinzipien *aller* Erkenntnis anzugeben – nicht nur die eines spezialisierten Erkenntnisbereichs. So ist auch der Kausalitätsbegriff der *Kritik* nicht identisch mit dem Begriff des kausalen Naturgesetzes, sondern liegt diesem noch voraus und ist als Element jeder empirischen Erfahrung identifizierbar. Die von Kant in der *Kritik* erörterten Erkenntnisprinzipien sind demnach solche Prinzipien, wie sie jedem vernünftigen Menschen notwendigerweise angesonnen werden können; und nur weil dies so ist, kann es in den Einzelwissenschaften Prinzipien geben, die durch Spezialisierung aus diesen generellen epistemologischen Prinzipien hervorgehen.

Das gilt auch für mathematische Erkenntnisleistungen. Denn es ist ja nicht das Ziel etwa der transzendentalen Ästhetik, eine Begründung der Mathematik als einer wissenschaftlichen Disziplin zu geben; vielmehr geht es hier um jene mathematischen Erkenntnisse, die jedermann zugänglich sind, und die als solche das epistemische Fundament auch der Mathematik als Fachwissenschaft bilden. Darum kann sich Kant darauf beschränken, nur elementarmathematische Sachverhalte zu diskutieren, ja er ist sogar zu dieser Beschränkung verpflichtet. So heißt es in KV B 39:

> So werden auch alle geometrische Grundsätze, z.E. daß in einem Triangel zwei Seiten zusammen größer sein, als die dritte, niemals aus allgemeinen Begriffen von Linie und Triangel, sondern aus der Anschauung und zwar a priori mit apodiktischer Gewißheit abgeleitet.

Dem entspricht in der Dissertation von 1770 das Argument in § 15.C:

> Ceterum geometria propositiones suas universales non demonstrat obiectum cogitando per conceptum universalem, quod fit in rationalibus, sed illud oculis subiiciendo per intuitum singularem, quod fit in sensitivis.

Zuvor war der Begriff der reinen Anschauung erstmals in dieser Weise eingeführt worden:

> Hunc vero intuitum purum in axiomatibus geometriae et quaelibet constructione postulatorum s. etiam problematum mentali animadvertere proclive est. Non dari enim in spatio plures quam tres dimensiones, inter duo puncto non esse nisi rectam unicam,

> e dato in superficie plana puncto cum data recta circulum describere, etc., non ex universali aliqua spatii notione concludi, sed in ipso tantum velut in concreto *cerni* potest.

Kant sagt hier, daß die reine Anschauung »gar leicht zu entdecken ist« (animadvertere proclive est); es muß also für jeden Menschen möglich sein, diese Anschauung sich zu vergegenwärtigen, nämlich anhand eines beliebigen elementargeometrischen Sachverhalts. Dieses Evidenzerlebnis ist es, auf das er seine Analyse der Anschauung gründet, nicht die in der Fachmathematik anzutreffenden Beweis- und Begründungsmethoden. Man muß also kein Mathematiker sein, um diese reine Anschauung entdecken zu können, man muß Euklids Postulate nicht kennen, und man muß auch nichts über die Bedingungen der Konstruierbarkeit geometrischer Objekte wissen.

Es ergibt sich daraus, daß Kants »symbolische Konstruktion« in der Algebra hier nicht von Interesse ist, da sich diese wohl kaum unter den Begriff einer Erkenntnis aus reiner Anschauung subsumieren läßt.[8] Mathematische Erkenntnis ist zu einem ganz erheblichen Teil unanschauliche Erkenntnis – Erkenntnis, die sich aus dem regelgeleiteten Prozeß symbolischer Transformationen speist. Jeder Versuch, diese symbolischen Prozesse als »anschauliche« zu interpretieren scheint dem Geist des Mathematischen zu widersprechen. Anschaulich ist Mathematik dort, wo sie sich auf die unmittelbare Kontemplation des jeweiligen Sachverhaltes stützt. Von diesen unmittelbaren Repräsentationen geht mathematische Erkenntnis aus; und folglich müssen sie auch in philosophischer Reflexion berücksichtigt werden. Aber die symbolische Konstruktion ist von gänzlich anderer Natur und nicht etwa eine Unterart der Gattung »anschauliche Erkenntnis«.[9] Nichts charakterisiert Mathematik besser als die Formel, sie sei die Wissenschaft von der Ersetzung der Anschauung durch das Zeichen. Der Raum liegt der Erkenntnis des Kreises auf andere Weise zugrunde, als der Erkenntnis der Formel $x^2+y^2=r^2$, die doch ebenfalls eine Repräsentation des Kreises ist.[10] Wer diese Differenz nicht beachtet, der scheint keine befriedigende Theorie algebraischer Erkenntnis zu geben.

[8] Vgl. Broad 1942 S.20: »Now it seems to me that Kant has completely changed the meaning in which he is using the term ›constructing a concept in intuition‹, and that in the present sense it has no relation to the theory of mathematical reasoning which he has given before.« Brittan (1991, 1992) hat eine Rettung von Kants Algebratheorie versucht.

[9] Daher ist Breiderts etwas überzeichneter Bemerkung im Grundsätzlichen durchaus zuzustimmen: »Die symbolische Konstruktion ist für Kant erkenntnistheoretisch irrelevant, Konstruktion der Begriffe heißt für ihn letztlich immer geometrische Konstruktion« (Breidert 1981 S.107). Man kann sogar noch einen Schritt weiter gehen: letztlich muß auch die Konstruktion arithmetischer Begriffe im Raum und nicht nur in der Zeit erfolgen, denn wenn wir nur die Zeit bräuchten, um zu erkennen, daß $7+5=12$, dann wäre es nicht nötig, dies an *mehreren* Fingern abzuzählen, sondern es genügte *ein* Finger!

[10] »[...] the world of pure algebra, like that of pure logic, has every appearance of being a self-contained or autonomous world, and questions about its relations to extra-mathematical objects are apt to be more confusing than enlightening.« (Walsh 1975 S.24.)

Diese Untersuchung steht also auf dem Standpunkt jener Erkenntnis, von welcher Platon glaubte, daß sie jedem ungebildeten Knaben von selbst zufallen müßte, wenn man seine Aufmerksamkeit von den Sinnendingen ab- und den Mathematika zuwendet. Dieser Standpunkt ist auch durch die Entwicklung der modernen Mathematik nicht obsolet geworden. So unterscheidet auch Philip Kitcher in *The Nature of Mathematical Knowledge* implizit zwischen Alltagsmathematik und Expertenmathematik:[11] die Alltagsmathematik ist jene Mathematik, die im Begriff eines kognitiv kompetenten Individuums involviert ist. Wer seinen Besitz an Rindern mit dem eines Anderen vergleicht, der verwendet bereits implizit den Begriff der bijektiven Abbildung; und wer prüft, ob eine Rinderherde gerecht auf zwei Erben verteilt werden kann, der weiß schon mit geraden und ungeraden Zahlen umzugehen.

Die Expertenmathematik baut auf diesem Vorwissen auf, erweitert es und stellt sich sogar in Widerspruch zur Alltagsmathematik.[12] Die Entdeckung, daß es inkommensurable Strecken gibt, ist ein sinnfälliges Beispiel dafür, wie die Alltagsmathematik durch die Expertenmathematik aufgehoben werden kann. Es ist ja kennzeichnend für die Geschichte der Mathematik, daß sie auch eine retrograde Geschichte der Grundlagen der Mathematik darstellt: die elementarsten Voraussetzungen der Alltagsmathematik (der Isomorphiebegriff, die natürlichen Zahlen, die topologischen Raumverhältnisse, der Mengenbegriff) sind zugleich die jüngsten Entdeckungen der Experten, die mitunter sogar die schwierigsten Probleme aufwerfen können.

Wie Kitcher bemerkt, kann die epistemologische Untersuchung der Alltagsmathematik allerdings nicht mit den gleichen Mitteln durchgeführt werden, wie die der Expertenmathematik. Eine umfassende Philosophie der Mathematik müßte also drei Teile enthalten: a) eine Theorie der Alltagsmathematik; b) eine Theorie der Expertenmathematik; und schließlich c) eine Theorie, die den Übergang von a) nach b) erklärt. Es ist zu vermuten, daß dieser Übergang nur verständlich wird, wenn man auf eine Theorie semiotischer Prozesse rekurriert.[13] Kants Philosophie der Mathematik betrifft im wesentlichen nur a), und als solche will sie ernst genommen sein. Ob sie zu b) Brauchbares beiträgt, scheint

[11] »I take as my starting point the obvious and uncontroversial thesis that most people know some mathematics and some people know a large amount of mathematics. My goal is to understand how the mathematical knowledge of the ordinary person and of the expert mathematician is obtained.« (Kitcher 1983 S.3)

[12] Für diesen Sachverhalt ist seit Hahn (1933) der Begriff einer »Krise der Anschauung« in Mode gekommen (vgl. auch Volkert 1986).

[13] Als Anknüpfungspunkt könnten die Arbeiten Krämers dienen (1990, 1991, 1992). Die an Peirce anschließenden Untersuchungen zum mathematischen Symbol sind kaum über Anfänge hinausgekommen: Bogarin 1991, Leopold 1991. Instruktiver sind die Analysen von Carsten (1981), und von Pittioni (1983), der eine gehaltvolle Analyse des Modellbegriffs vorgelegt hat. Bussmans Studie (1992) scheint etwas Ähnliches wie c) unternehmen zu wollen. Dieser Autor ist auch mit einer Interpretation des Schematismuskapitels hervorgetreten (1994).

fraglich. Auch die vorliegende Abhandlung war urspünglich von dem Wunsch motiviert, in Kants Mathematiktheorie einen Reflex des damaligen Stands der mathematischen Forschung zu finden.

Diese Betrachtungen werfen die Frage auf, was Kant über Mathematik im allgemeinen und über die Entwicklung der zeitgenössischen Mathematik im besonderen bekannt war.[14] Nun wissen wir, daß Kants wichtigster akademischer Lehrer, Martin Knutzen, ein ungewöhnlich guter Kenner der Naturphilosophie Newtons war, und daß er Kant Zugang zu dessen Werken verschaffte.[15] Auch muß man berücksichtigen, daß Kants Frühschriften im wesentlichen naturphilosophischen Themen gewidmet sind, so etwa die *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*. Kant brachte den empirischen Wissenschaften also großes Interesse entgegen; eine gewisse Gewandtheit in mathematischen Dingen wird man ihm daher nicht absprechen können.

Weiterhin ist bekannt, daß Kant seit dem Wintersemester 1755/56 über Mathematik gelesen hat, und zwar etwa acht Jahre lang.[16] Er pflegte seiner Vorlesung Wolffs *Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften* zugrundezulegen; leider ist sein Handexemplar verschollen.[17] Was war das für eine Vorlesung? Wir dürfen uns keine sehr hohe Meinung von ihrem Niveau bilden. Man pflegte im 18. Jahrhundert recht früh (Kant z. B. als sechzehnjähriger) die Universität zu beziehen, und der naturwissenschaftliche Unterricht an den Schulen war mehr als kärglich. Kants Mathematik-Vorlesungen müssen also recht elementar gewesen sein (wie übrigens die Nachschriften Herders bestätigen). Auch der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht, den

[14] Zu dieser Frage vgl. Adickes 1924 I (besonders Einleitung, §§5ff.), sowie Fink 1889.

[15] Borowski, *Darstellung des Lebens und Charakters Immanuel Kants*: »Seinem Unterrichte in Philosophie und Mathematik wohnte er unausgesetzt bei.« (Zitiert nach Malter 1993 S.13.)

[16] Vgl. (auch zum folgenden) die Angaben bei Martin 1967*a*. Er kommt (S.62) zu dem Ergebnis, »daß Kant 16 Semester lang eine zweisemestrige Vorlesung über Wolffs *Auszug* gehalten hat, im ersten Semester Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie, im zweiten Semester Mechanik, Hydrostatik, Hydraulik, Aerometrie. Diese Vorlesung hat Kant neunmal gehalten, weil er im SS 1757 und im WS 1759/60 die Vorlesungen nebeneinander hielt.« Wichtig ist ferner noch die folgende Bemerkung in Martin 1956 S.91: »Dagegen war die Differential- und Integralrechnung mit einer an Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit auch in Kants Vorlesung nicht enthalten. Sie findet sich nicht in den der Vorlesung zugrunde liegenden Werken von Christian Wolff, sie gehörte damals nicht zu den Grundvorlesungen, sondern zu den Spezialvorlesungen, und es ist klar, daß bei dem eben angezeigten Programm in der Hauptvorlesung für die Infinitesimalrechnung keine Zeit war.« Sodann kommt Martin zu der These, daß Kant deshalb an den Problemen der Analysis nicht interessiert war, weil die Analysis damals auf ungeklärten Voraussetzungen beruhte, und weil die Grundlagenreflexion in einer »Metaphysik des Unendlichkleinen ausgewuchert war«: »Aber diese Metaphysik des Unendlichkleinen war auf dem falschen Weg; alle philosophischen Bemühungen waren solange unfruchtbar, bis nicht die Mathematiker selbst die logischen Probleme der Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung geklärt hatten. [...] Ich glaube daher, daß Kant sich mit Recht von den Problemen der Infinitesimalrechnung ferngehalten hat.« (l. c.) Das ist gut gemeint, aber leider völlig spekulativ.

[17] In seinem Nachlaß fand sich die Ausgabe von 1749; vgl. Warda 1922 S.38.

Kant selbst genossen hat, wird keine hohen Erwartungen erfüllt haben.[18] Wie rückständig die akademische Ausbildung in Deutschland damals war, ist jedoch erst jüngst durch Hans-Joachim Waschkies ins Licht gerückt worden.[19] Er weist darauf hin, daß nur eine kleine Schar von hochgebildeten und international agierenden Wissenschaftlern in der Lage war, den technischen Gehalt der Newtonschen *Principia* inhaltlich nachzuvollziehen. Und zu diesen dürfte Knutzen nach Waschkies' Untersuchungen nicht gehört haben.

Inwiefern kann die Liste von Kants Büchern Aufschluß über seine mathematischen Kenntnisse geben? Wir wissen, daß Kant keine umfangreiche Bibliothek hinterlassen hat, da sich der Auktionskatalog der Versteigerung erhalten hat (vgl. Warda 1922). Doch berichtet uns Jachmann, Schüler und Biograph Kants, daß dieser in den ersten Jahren seiner Privatdozentur gezwungen war, »seine damals ansehnliche und auserlesene Bibliothek nach und nach zu veräußern«.[20] Die von Warda wiederveröffentlichte Liste der Bücher Kants ist also nur bedingt brauchbar. Zwar können wir vermuten, daß Kant wohl kaum Bücher anzuschaffen pflegte, ohne sie auch zu lesen; andererseits sah er sich in späteren Jahren mit steigender Berühmtheit einer wahren Flut von Bücherzusendungen ausgesetzt. Und da wir wissen, daß er die ihm zugesandten Werke meist nicht zu lesen pflegte, sind auch Spekulationen über seine Reaktion auf Michelsens Übersetzung der Eulerschen *Introductio in analysin infinitorum* vergeblich. Wir

[18] Über den Mathematikunterricht am Fridericianum gibt jetzt Klemme (1994) Auskunft. In der von ihm edierten *Nachricht von den jetzigen Anstalten des Collegii Fridericianii* (Königsberg 1741) des Schulinspektors Christian Schiffert heißt es: »Die Arithmetic wird von 2 bis 3 in drey besondern Classen getrieben. In der dritten Classe lernen die Schüler die Species mit unbenannten und benannten Zahlen. Wenn sie hierin fertig sind, setzet man sie in die andere Classe woselbst sie in der Regel Detri geübet werden, und den Anfang in den Brüchen machen. [/] In der ersten Classe wird die Rechnung mit gemeinen Brüchen fortgesetzet, aber schwerere Arten, vorgenommen; wie denn auch die kurze Rechnung oder die so genannte welsche Practica hinzugethan wird.« (nach Klemme 1994 S.87) Weiter unten heißt es: »Die Mathesis wird des Mittwochs und Sonnabends gleichfalls des Nachmittags, in zwo ausserordentlichen Classen, dergestalt getrieben, daß in der ersten Classe die leichtesten Wahrheiten der Mathematic, durch mechanische Beweise und Proben, die in die Sinne fallen, vorgetragen: in der zweyten aber, nach des Herrn Geheimen Raths und Vice-Cantzlers Wolffens Auszug aus den Anfangs-Gründen aller mathematischen Wissenschaften, die ersten Theile, als die Arithmetic, Geometrie und Trigonometrie der Jugend beygebracht werden; wobey man nicht nur dahin siehet, daß die Schüler das Hauptsächlichste daraus verstehen, beweisen und auflösen mögen, sondern daß ihnen auch ein Begriff von der mathematischen Lehr-Art beygebracht, und der Verstand dadurch zu andern Wissenschaften fähig und geschickt gemacht werde.« (S.88) Damit sind sämtliche, dem Mathematikunterricht gewidmeten Passagen zitiert worden! Zum Schulunterricht Kants vgl. auch Vorländer 1924 Bd. II.

[19] Vgl. Waschkies 1987 §7: »Die Unterweisung in der Mathesis in den preußischen Universitäten zur Zeit des jungen Kant«, §18: »Die Newtonrezeption an den deutschen Hochschulen während der 1. Hälfte des 18. Jahrhunderts«, §19: »Die paradigmatische Funktion der universellen Gravitationstheorie aus I. Newtons Principia«, §20: »Das wissenschaftstheoretische Programm zu einer universellen Weltdeutung aus den Werken von Newton«.

[20] *Immanuel Kant geschildert in Briefen an einen Freund*, Königsberg 1804 (zitiert nach Malter 1993 S.111).

dürfen jedenfalls nicht einfach voraussetzen, daß er dieses höchst anspruchsvolle Buch adäquat erfassen konnte.[21]

Eine wichtige Beobachtung zu Kants Bibliotheksausstattung macht Gottfried Martin in seiner Dissertation; er weist darauf hin, »daß Kant nach Beendigung seiner mathematischen Vorlesungen für seine eigene Bibliothek keine mathematischen Werke mehr erworben hat, sonst müßte doch mindestens ein nach 1760 erschienenes Werk sich vorfinden« (Martin 1972 S. 15f.). Er zieht daraus aber nicht den einzigen naheliegenden Schluß, daß Kants Interesse an Mathematik mit der Niederlegung seiner mathematischen Vorlesungen für immer erlahmte. Auch eine Durchsicht von Kants philosophischen Werken bestätigt diese Vermutung: die mathematischen Beispiele sind nicht nur fast immer elementarster Natur (was mit der Rücksichtnahme auf den unkundigen Leser erklärbar ist), sondern es sind sogar zumeist dieselben *überlieferten* Beispiele, auf die er sich beruft. So stammt das Beispiel vom unmöglichen Zweieck in KV B 65, 204, 268, 348 aus Wolffs Ontologie,[22] und der Satz von der Winkelsumme im Dreieck zählt bekanntlich zu den notorischen Beispielen der Philosophiegeschichte. Wer seine Interpretation auf zufällige Eigentümlichkeiten dieses Beispiels gründet,[23] der muß damit rechnen, den Kern von Kants Mathematikbegriff zu verfehlen.

Eine andere Schwierigkeit bei der Beurteilung von Kants Mathematikkenntnissen liegt darin, daß sein mathematischer Gewährsmann Schultz in Königsberg ansässig war, und daher zwischen Kant und Schultz kaum Anlaß zum Briefwechsel bestand. Im Gegensatz zu Leibniz, dessen Korrespondenz fast keine Wünsche offen läßt, wissen wir daher nicht genau, inwiefern Kant Schultz in seinen mathematischen Schriften angeregt hat, und ob Kant durch Schultz über die Entwicklung der zeitgenössischen Mathematik auf dem laufenden gehalten wurde, obwohl es in der Literatur nicht an Spekulationen darüber fehlt.[24]

Man darf sich also in bezug auf Kants Mathematikkenntnisse keinen Illusionen hingeben; sicher wird er über die Entwicklungen etwa zum Problem des Parallelenaxioms (wie das Parallelenpostulat im 18. Jahrhundert bezeichnet wurde) grob informiert gewesen sein. Aber nichts deutet darauf hin, daß Kant über ein fachlich adäquates Verständnis mathematischer Probleme verfügte.

[21] Michelsen hatte Kant diese Übersetzung (die ihm gewidmet war) 1790 mit einem ausführlichen Begleitschreiben zukommen lassen. Zum Inhalt der Eulerschen *Introductio* und zu Michelsens Übersetzung vgl. die Angaben in Büchel 1987 S.290ff.

[22] Daher ist es unsinnig, hier einen Hinweis auf nichteuklidische Geometrien zu vermuten (so Peters 1963 S. 164ff., Martin 1969 S. 28f.). Zu den Problemen dieses Beispiels vgl. Martin 1967*b*, Vollrath 1970, Prauss 1994.

[23] Etwa darauf, daß hier zusätzliche Hilfslinien gezogen werden müssen, entsprechend der prokleischen *kataskeué* (zu dieser Interpretation vgl. Hintikka 1982).

[24] Zu Kant und Schultz vgl. die Erläuterungen des Hg. in AA XIV 23ff. Zu Schultz und seiner Rolle in der Geschichte des Kantianismus vgl. Bonelli Munegato 1992.

Kommt er gelegentlich auf diffizile Fragen zu sprechen, so wird seine Ausdrucksweise eigentümlich unscharf und gewunden.[25]

Überblickt man Kants Bemerkungen zur Mathematik, wie sie sich über sein Gesamtwerk verstreut finden, dann gewinnt man den Eindruck, daß diese Bemerkungen sich zu einem Bild zusammenschließen, das in seinen wesentlichen Zügen keine nennenswerten Veränderungen erfahren hat. Im folgenden soll einleitend versucht werden, diese Grundzüge des kantischen Mathematikbegriffs am Beispiel einer frühen Reflexion zu skizzieren.

Zwei Merkmale sind es, durch welche die Mathematik für Kant ihr spezifisches Profil erhält: durch ihren Gegenstandsbereich und durch das für sie typische Argumentationsverfahren. In beiden Punkten vertritt Kant eine dezidierte Position: der Gegenstandsbereich der Mathematik sind die Gegenstände der sinnlichen Erfahrung, und das mathematische Argumentationsverfahren fällt nicht zusammen mit der logischen Deduktion aus Allgemeinbegriffen und Definitionen. Obwohl Kant sich gerade hinsichtlich dieses Punktes nicht immer unzweideutig geäußert hat, so dürfte doch klar sein, daß die zweite These aus der ersten folgt und nur durch diese ihre Intention gewinnt: ist nämlich der Gegenstand der Mathematik das, was mit den Sinnen erfaßt wird (wenn auch in spezifisch mathematischer »Reinheit«, die erst 1770 im Begriff der *cognitio sensitiva* greifbar wird), dann kann die Erkenntnisquelle dieser Wissenschaft nicht der Begriff sein, sondern der unmittelbare Bezug auf den Gegenstand selbst, der auch die Evidenz der Mathematik verbürgt.[26]

Der Sinn dieser Distinktionen wird aus den jetzt zu erörternden Reflexionen zur Logik erhellen. Denn Kants frühe Logikreflexionen belehren uns nicht nur über seinen Begriff des Logischen, sondern sie vermitteln auch (gleichsam *ex negativo*) ein Bild vom Wesen des Mathematischen, wie es bereits zu Anfang seiner Vorlesungstätigkeit in den Grundzügen feststand.[27] Im Zentrum der kantischen Logikauffassung steht der Gedanke, daß die Sphäre des Logischen die der *Regel* ist: die Logik verfügt weder über einen eigenen Gegenstandsbereich, noch über eine spezielle Erkenntnisquelle, denn ihre Aufgabe ist es, die implizite Logik eines jeden vernünftigen Diskurses explizit zu machen. Deshalb ist

[25] Das ist mit Bezug auf *Prol.* §38 von Buhl (1996) aufgezeigt worden. Die Schrift *Ausgleichung eines auf Mißverstand beruhenden mathematischen Streits* verdankt ihre Existenz einer Nachlässigkeit Kants, der in *Von einem neuerdings erhobenen vornehmen Ton in der Philosophie* anzudeuten scheint, daß es nur ein Zahlentripel gibt, das die Gleichung $x^2+y^2=z^2$ erfüllt. Kants Duplik auf die berechtigte Kritik eines Mathematikers räumt nicht den Verdacht aus, daß er wirklich Opfer seiner mathematischen Unerfahrenheit geworden war.

[26] Vgl. *De mundi* §10: »Omnis enim intuitus noster adstringitur principio cuidam formae, sub qua sola aliquid immediate, s. ut *singulare*, a mente *cerni* et non tantum discursive per conceptus generales concipi potest.« Ebenso R 3957: »Nun haben wir eine zweyfache Form der Erkentnisse: die intuitive und rationale Form. Die erste findet nur in der unmittelbaren Erkentnis einzelner Dinge statt, die zweyte in allgemeinen Vorstellungen [...]«.

[27] Zu Kants Logikbegriff vgl. besonders Stuhlmann-Laeisz 1976, Shamoon 1979, Pozzo 1989, Wolff 1995.

die Logik keine materiale Wissenschaft; und es erhebt sich die Frage, ob sie überhaupt Erkenntnis generiert.

Bereits in R 1562, der ersten Logikreflexion in AA XVI, wird gesagt, daß die Vernunft »nach gewissen Regeln« handelt, und daß man diese Regeln entweder deutlich oder verworren erkennen kann.[28] Es ist klar, daß damit die logischen Prinzipien gemeint sind: in der »natürlichen Logik« wenden wir diese Regeln an, erkennen sie aber nur verworren, d. h. wir erkennen, ob sie korrekt gebraucht werden, ohne den Grund dieser Korrektheit zu wissen:

> Eben also findet man den Schluß: [/] Der Esel hat Füße [/] Der Mensch hat Füße [/] Ergo: .... auch unrichtig, aber darum, weil es den verworrenen Regeln der Vernunft wiederspricht.

Wer die Ungültigkeit dieses Schlusses einsieht (zu ergänzen: »ist der Mensch ein Esel«), der muß nicht wissen, *warum* er nicht gilt. Denn der Grund seiner Ungültigkeit liegt auf einer anderen Ebene als der der konkreten Aussagen; er liegt auf der Ebene der abstrakten Reflexion auf die Regeln selbst. Diese »deutliche Einsicht« in die Regeln und die Begründung ihrer Geltung ist Sache einer »Wissenschaft der Logik«.[29] In dieser Wissenschaft wenden wir die logischen Regeln nicht nur an, sondern sprechen auch über sie.

Dieser Unterschied zwischen der Anwendung einer Regel und deren Erwähnung ist für Kants Denken fundamental und zählt zu den Voraussetzungen auch der vorliegenden Studie. Kant ist der Meinung, daß es Erkenntnis gibt, die von gewissen Prinzipien zwar Gebrauch macht, doch ohne von der Anwendung dieser Prinzipien Rechenschaft ablegen zu können. Für diese Differenz hat er später die Termini *in concreto/in abstracto* geprägt. Kants weitergehende These ist nun, daß es Wissenschaften gibt, die ohne ein solches explizites Wissen der logischen Regeln auskommen können, weil ihnen die Eigenart ihres Gegenstandsbereichs jederzeit die Erkenntnis dieser Regeln *in concreto* (also verworren) erlaubt. Die Mathematik ist eine solche Wissenschaft, wie wir gleich sehen werden.

In R 1571 verwendet Kant Meiers Unterscheidung zwischen gemeiner und gelehrter Erkenntnis, um seine Kernthese zu formulieren:

> Die gemeine Erkenntniß weis die Gründe von der richtigkeit seiner Einsichten durch den Zusammenhang derselben mit den allgemeinen und ersten Grundsätzen nicht einzusehen. Weil sie durch die Sinne beynahe nur entstanden ist, so wird sie durch den vicarius der Sinne, die Einbildung Kraft unterhalten und verdunkelt.

[28] »Alles, was aus einem gewißen Vermögen herfließt, entsteht gewißen Regeln gemäß. Denn es geschieht immer einem Grunde gemäß. Folglich wird auch die Vernuft nach gewißen Regeln handeln. Diese Regeln werden entweder deutlich oder verworren erkannt. In dem letzteren Falle ist es die Natürliche Logic. e. g. Man setzt beym Gehen seine Füße nach gewißen Regeln, aber man hat von diesen Regeln nur einen verworrenen Begriff.« (AA XVI 4f.)

[29] »Dagegen, wenn man die Regeln vernünftig zu dencken deutlich einsieht und sie gründlich beweisen kan, so hat man eine Wissenschaft der Logik.« (l. c.)

Wer also etwas durch gemeine Erkenntnis einsieht, der kann zwar nicht von den Gründen seiner Einsicht Rechenschaft ablegen, aber er verfügt dennoch über eine wahre Erkenntnis. Denn die gemeine Erkenntnis ist wesentlich an die sinnliche Wahrnehmung gebunden; in dieser kann es zwar wahre Erkenntnis durch Anwendung von Regeln geben, nicht jedoch eine Erkenntnis dieser Regeln selbst. Denn Regeln sind abstrakte Prinzipien (Prinzipien zweiter Stufe) und können daher niemals Gegenstand der sinnlichen Erfahrung werden, mögen sie auch in sie involviert sein. Daher gilt: »Gelehrt ist dasjenige Erkenntniß, welches durch eine besondere Anwendung der Vernunftkräfte und durch wohlerwiesene Regeln von ihrer Richtigkeit erlangt wird« (l. c.). Für eine gelehrte Erkenntnis bedarf es also einer »besonderen Anwendung der Vernunftkräfte«, die mit der gewöhnlichen Anwendung nicht identisch ist. Das wird in R 1572 wie folgt präzisiert:

> Eine Regel ist die (ᵍgründliche) Erkenntniß der Art, wie etwas einem gewißen Zweke gemäß soll ausgeübt werden. Wer ohne solche Regeln handelt, der übet seine Kraft des Verstandes aus, ohne zu wißen, warum er sie so und nicht anders ausübet. Was man, ohne den Grund (ᵍzu) wißen, handelt, kan eben so wohl unrichtig als richtig geschehen. Also wer ohne Regeln seine Vernunft ausübt, ist der Gefahr zu irren gar zu sehr unterworfen.

Damit wird ein erster Grund dafür genannt, warum es sinnvoll ist, eine »Wissenschaft der Logik« zu betreiben: wer die Prinzipien des richtigen Vernunftgebrauchs *in abstracto* erkannt hat, ist weniger der Gefahr des Irrens unterworfen. Wer eingesehen hat, daß der Schluß »Der Esel hat Füße, der Mensch hat Füße, ergo: der Mensch ist ein Esel« deshalb ungültig ist, weil er auf einer ungültigen Schluß*form* beruht, der ist damit auch gegen die Wiederholung dieses Fehlers gefeit. Seine Erkenntnis wird dann zwar immer noch »durch den vicarius der Sinne, die Einbildungskraft unterhalten«, aber nicht mehr »verdunkelt«.

Die Kultivierung einer theoretischen Logik hat also zunächst die Verbesserung der natürlichen zum Ziel.[30] Denn mag auch für die Gewinnung inhaltlicher Erkenntnis die natürliche Logik ausreichen – wir werden dennoch immer wieder auf die theoretische Logik zurückgreifen müssen, wenn wir nachweisen wollen, daß in einem Beweis ein logischer Fehler liegt. Denn dazu muß man in der Lage sein, logische Regeln explizit anzugeben.

Die theoretische Logik hat also den negativen Nutzen, den Irrtum zu verhindern; so dient sie der »gelehrten« Erkenntnis dessen, was der »gemeine Verstand« schon immer praktiziert.[31] Doch wenn es stimmt, daß die wissenschaft-

[30] »Die Logik ist also eine *Theorie* und ein Mittel der *diiudication*.« (R 1585) Die Einteilung in *logica naturalis* und *logica artificialis* ist ganz traditionell (Pozzo 1989 S. 160ff.).

[31] »Die Gemeine Vernunft ist keine Gesunde Vernunft, auch nicht einmal eine natürliche. Wir müssen uns durch die Logic noch einmal selbst erziehen. Vorher war es besser, sich seiner Vernunft verkehrt als gar nicht zu bedienen; dadurch erwarben wir fertigkeiten. Jetzt muß der misbrauch abgeschaft werden. Diese Logic ist keine doctrin, sondern disciplin, kein organon, sondern catarcticon.« (R 1589) Zum *sensus communis* vgl. R 1573, 1578.

liche Logik eigentlich nichts anderes tut, als die Prinzipien, die wir schon immer verwenden und deren Geltung jedem konkreten Erkenntnisanspruch vorausliegen, explizit zur Sprache zu bringen, dann scheint es doch, als habe die Logik weder einen eigenen Gegenstand, noch einen eigenen Erkenntnismodus. Es gibt also weder so etwas wie »logische Gegenstände«, noch eine »logische Erkenntnisquelle«. Vielmehr traktiert diese Logik das, was allen inhaltlichen Erkenntnisansprüchen als deren logische Form inhäriert. In diesem Sinne kann man sie eine parasitäre Wissenschaft nennen, da sie sich immer auf mögliche Erkenntnisse *in concreto* bezieht:

> Philosophia instrumentalis heißt sie [die Logik] darum, weil sie gleichsam ein instrument ist, andere Wissenschaften zu tractiren; so wie ein Lineal ein instrument ist, gerade linien zu ziehen, und ein transporteur ein instrument, Winkel von behöriger Größe zu machen: so ist der Vorrath und Inbegriff dieser Regeln das instrument, begriffe und schlüße richtig zu formiren und zu prüfen. (R 1569)

Die Logik ist demnach, wie es des öfteren heißt, kein Organon der Erkenntnis, kein Mittel also, Erkenntnisse zu generieren, sondern lediglich ein Mittel, bereits gewonnene Erkenntnisse zu beurteilen (vgl. etwa R 1600). Um Begriffe und Schlüsse »formieren« zu können, brauchen wir die theoretische Logik also nicht; wir brauchen sie nur, um vorliegende Schlüsse auf ihre Korrektheit zu prüfen. Es ist genau diese Auffassung vom Logischen, die Kant daran gehindert hat, sich die Frage zu stellen, ob die logische Deduktion nicht doch ein veritables (ja sogar unverzichtbares) Erkenntnismittel ist.

Was Kant also primär interessiert, ist nicht die Rechtfertigung der Logik als eigenständiger Wissenschaft; vielmehr kommt es ihm darauf an zu zeigen, daß die natürliche Logik schon immer das anwendet, was in der wissenschaftlichen gelehrt wird. Daraus folgt, daß die Kultivierung der theoretischen Logik nicht eine unabdingbare Voraussetzung für richtiges materiales Schließen sein muß. Denn in manchen Wissenschaften liegt uns ja bereits ein Material vor Augen, an dem sich das Vermögen der natürlichen Logik erproben kann:

> Man darf nicht einwenden, daß man seine Vernunft im gemeinen erkenntniße ohne Regeln sehr richtig gebrauchen kan. Hier ist vom gelehrten Erkenntniß die Rede, d. i. welches von der täglichen Erfahrung etwas entfernt ist. Beym gemeinen Erkenntniße erwirbt man durch Erfahrungen eine Fähigkeit, in singularen Fällen richtig zu urtheilen. (R 1572)

Hier spricht Kant ein wichtiges Motiv seiner philosophischen Forschung aus, das uns aus KV B 172f. bekannt ist. Die Fähigkeit, abstrakte Prinzipien *in concreto* zu erkennen, also zu erkennen, daß ein bestimmter Sachverhalt ein Anwendungsfall einer abstrakten Regel ist, ist nach Kant eine Grundfähigkeit, die durch keine Gelehrsamkeit ersetzt werden kann. *Daß* man seine Vernunft in der gemeinen Erkenntnis »ohne Regeln sehr richtig gebrauchen kann«, möchte Kant also keineswegs in Frage stellen. Denn ohne eine solche ursprüngliche Erwerbung logischer Fähigkeiten gäbe es ja auch keine wissenschaftliche Logik.

Im nächsten Satz der soeben zitierten Reflexion nennt Kant einen zweiten wichtigen Grund, warum wir eine wissenschaftliche Logik brauchen:

> In allgemeinen obiectis, wo die sinnliche Ideen nicht allein zulangen, muß eine Wissenschaft von den Regeln voraus gehen, nach welchen dieselbe sollen gebraucht werden.

Auch dies ist ein Gedanke, den Kant über viele Jahre, sogar Jahrzehnte beibehalten hat. Überall dort, wo Erkenntnis auf sinnliche Ideen sich stützt, ist eine vorgängige Untersuchung der Prinzipien dieser Erkenntnis nicht erforderlich. Nur dort, wo dieser Rekurs auf sinnliche Ideen nicht möglich oder gefährlich ist, z. B. in Metaphysik, bedarf es einer expliziten Voranstellung solcher Prinzipien; denn hier fehlt es an der Gelegenheit, das Vermögen der Erkenntnis der Prinzipien *in concreto* in Funktion zu setzen.[32] Der Schlußabsatz der R 1572 gibt nun das Stichwort zur Bestimmung der Mathematik:

> Öfters heißt es wie bey den Lacedaemonischen Gesandten in Athen. Die Logici wißen die Regeln, aber die Mathematici üben sie aus.[33]

Die Logiker sind also diejenigen, die die Regeln des Vernunftgebrauchs untersuchen und rechtfertigen; die Mathematiker aber jene, die ohne explizite Kenntnis dieser Regeln unmittelbar zur Anwendung der Vernunft *in concreto* schreiten. Offenbar ist damit auch gesagt, daß die Mathematiker aufgrund der Beschaffenheit ihres Gegenstandsbereichs in der Lage sind, die Vernunftgesetze reflexionslos zu gebrauchen. Das können sie deshalb, weil dieses Objekt ein sinnliches ist, wo also die konkrete Einsicht der abstrakten Reflexion vorhergeht. Das wird an anderer Stelle päzisiert:

> Bey allen Wißenschaften muß der theoretische Theil dem Praktischen vorhergehen. Man muß vorher wißen, wie man reden soll, ehe man redet; man muß richtig denken lernen, ehe man mit vergeblichem Dencken sich occupiren soll. In der Mathematik allein kan die ausübende Logick der lehrenden voraus gehen. Denn da hat man einen sichern Leitfaden des Nachdenkens: unsere Sinne oder deren Vicaria, die imaginatio, kan uns die Fehler der Denkungsart leicht überführen. Wir könen hernach davon eine Logick abstrahiren, sowie tschirnhausen. (R 1670)

Die Mathematik nimmt also in Kants Wissenschaftsverständnis eine Sonderstellung ein: hier sind die Sinne und die sie vertretende Einbildungskraft wesentliche Hilfsmittel der Erkenntnis, nicht etwa bloß eine Quelle von Irrtum und »Verdunklung« (vgl. R 1571, zitiert auf S. 11). Aus diesem Grunde kann in der Mathematik die »ausübende« Logik der »lehrenden« vorangehen: jedes mathe-

[32] Dieser Gedanke findet später etwa in der Inauguraldissertation von 1770 einen prominenten Ort (*De mundi* § 23; vgl. auch R 1602, sowie hier § 10).

[33] Hier spielt Kant auf eine Anekdote an, die in Ciceros *Cato maior* § 63 f. überliefert ist (worauf Adickes in der Anmerkung zu R 1572 hinweist): die Athener hatten bei einer gut besuchten Veranstaltung im Theater einem greisen Mitbürger keinen Sitzplatz angeboten, wohl aber die Gesandten aus Lakedämon, von denen sich einer zu der Bemerkung hinreißen ließ, die Athener wüßten zwar was sich schickte, täten es aber nicht.

matische Argument, das sich auf sinnliche Evidenz beruft, ist somit davor geschützt, in einem bloß abstrakten Räsonnement die Orientierung zu verlieren und auf Abwege zu geraten. Und schließlich heißt es in R 1672, nachdem gesagt wurde, daß der Logikunterricht in den Schulen unnütz sei: »Die Mathematik soll also billig den Anfang machen. Man kan darin nicht irren, weil man gut geführet wird.«

Während die zuletzt angeführten Reflexionen der β^1-Phase entstammen, zeigt die folgende R 1602 aus ς (1775–77), daß Kant an diesem Grundgedanken auch später noch festgehalten hat:

> Die mathematic hat keine abstrahirte regeln vom gebrauch, sondern sie sind selbständig. Daher braucht die Mathematic keinen canon, d. i. Eine Richtschnur ihrer sätze. Sie bedarf auch kein Organon.

Es ist der Vorzug der mathematischen Erkenntnis, daß sie als sinnliche Erkenntnis keiner Richtschnur bedarf, sondern diese gleichsam unmittelbar von und mit ihrem Untersuchungsobjekt zugewiesen bekommt. So verwundert es nicht, daß Kant in einer β^1-Reflexion den Begriff der mathematischen Gewißheit aus Meiers § 161 wie folgt kommentiert: »Sie lößt sich zuletzt in bloß sinnlich klare Begriffe auf, hat nichts überflüßiges« (R 2430).

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nunmehr gut gerüstet für eine genaue Examination der R 1634 (β^1, 1752–56), deren erster Absatz wie folgt lautet:

> Die Erste haupteintheilung der Philosophie ist 1. diejenige, da die Gründe durch eine von den Sinnen und den deutlichen Bildern der imagination abgezogene Betrachtung, also durch den intellectum purum, erkannt werden; 2. diejenige, welche die gründe vermittelst der Vergleichung sinnlicher Vorstellungen unmittelbar abnimmt. Die erste ist die Philosophie im eigentlichen Verstande, die zweyte die Mathematik. Diese Erklärungen bestimmen das specifische Merkmal beider Wißenschaften. Wir können aber in verschiedener absicht sinnliche Vorstellungen mit einander vergleichen. Allein in absicht auf die Gründe können wir keine andere Vergleichung anstellen, die unmittelbar durch die Sinne auf die Erkentniß des Grundes führen solte, als in so fern sie die Größe betrifft. Folglich ist die Mathematik die einzige Wißenschaft, wo eine deutliche einsicht der Gründe unmittelbar von den Sinnen oder der Vertreterin, der Einbildungskraft, abhängt.

Daß die Philosophie mit Gründen befaßt sei, war spätestens seit Wolff ein Gemeinplatz; und weil Kant ganz traditionell die Mathematik zu den philosophischen Wissenschaften zählt, muß er auch die mathematische Erkenntnis als eine Erkenntnis von Gründen begreifen. Das ist insofern unproblematisch, als die Mathematik eine beweisende Wissenschaft ist; und wer beweist, der gibt auch Gründe für seine Behauptungen an.

Kant ist jedoch der Meinung, daß man auf zwei verschiedene Weisen »Gründe« angeben kann: man kann von der sinnlichen Erfahrung zu den unsinnlichen und letzten Gründen aufsteigen, und das tut die Philosophie; und man kann sich auf die Sphäre des Sinnlichen beschränken und solche Gründe aufsuchen, die in dieser Sphäre »unmittelbar auf die Erkenntnis des Grundes führen«, und das ist kennzeichend für die Mathematik. Denn diese Wissenschaft vollzieht sich ja »vermittelst der Vergleichung sinnlicher Vorstellungen« – und das bedeutet: sie vergleicht diese sinnlichen Vorstellungen hinsichtlich der Relation des Größer und Kleiner. Nur diese Relation ist ja einer Exposition in der Anschauung fähig, nicht die Relationen von Grund und Folge oder von Inhärenz und Subsistenz. Aus diesem Grunde ist die Mathematik die Wissenschaft von den Größen. Aber sie ist eine *Wissenschaft* – sie muß ihre Sätze also beweisen. Wenn aber »beweisen« heißt, die Gründe von etwas anzugeben, dann scheint es, als ob die Mathematik doch in den Bereich der philosophischen Wissenschaften fiele. So sieht sich Kant gezwungen, die Begriffe des Grundes und des Beweises genauer zu differenzieren:

> Man könte vielleicht sagen: die Philosophie sey durch ihre definition nicht genugsam von der Mathematic unterschieden, weil diese auch die Gründe der Dinge, nemlich in so ferne man ihre Größe considerirt, betrachtet. Solte man also nicht sagen: der mathematicus habe eine philosophische Erkentniß von den Verhältnissen der Größen. Er beweißt ja? Es ist hiebey zu betrachten, daß in der Mathematik der Grund und die Abhängigkeit der Verhältnisse von diesem Grunde durch eine reihe sinnlicher Vergleichungen oder solcher Vorstellungen, die alle können sinnlich gemacht werden, hergeleitet und erkant werden. z. E. Was vor eine verhältnis alle drey Winkel in einem triangel zu zwey rechten haben, die in einem halben Zirkel begriffen werden können. Dieses zusamt dem Grunde kan man einsehen, indem man alle darauf führende Begriffe auf der Tafel zeichnet und sinnlich macht.

Der wesentliche Unterschied zwischen Philosophie und Mathematik ist also der, daß das Verhältnis des Grundes zur Folge in der Mathematik selbst ein in die Sinne fallendes Verhältnis ist: der in der Mathematik gesuchte Grund ist ja auch ein sinnlicher, während in der Philosophie im engeren Sinne die zu suchenden Gründe unsinnliche sind.

Dieser Gedanke erscheint auf den ersten Blick harmlos; doch er hat weitreichende Konsequenzen. Denn es ist eine Folge dieses Mathematikverständnisses, daß Kant auch später kategorisch verneinte, die Mathematik könne eine unanschauliche Wissenschaft werden. So schreibt er 1770:

> Maximi autem momenti hic est, notasse, cognitiones semper habendas esse pro sensitivis, quantuscunque circa illas intellectui fuerit usus logicus. Nam vocantur sensitiva *propter genesin*, non ob *collationem* quoad identitatem vel oppositionem. Hinc generalissimae leges empiricae sunt nihilo secius sensuales et, quae in geometria reperiuntur, formae sensitivae principia (respectus in spatio determinati), quantumcunque intellectus circa illa versetur, argumentando e sensitive datis (per intuitum purum) secundum regulas logicas, tamen non excedunt sensitivorum classem. (*De mundi* § 5, 9/393 f.)

Diese These ist nur eine in ihren Konsequenzen durchdachte Version der Überlegungen, die bereits in R 1634 *in nuce* angelegt sind. Sie zeigt einmal mehr, daß Kants Auffassung vom Wesen des Mathematischen schon sehr früh festgelegt war. Nach dieser Auffassung *kann* es keine unanschauliche Mathematik geben. So schreibt Kant am 25.11.1788 an Schultz, der die Ansicht vertreten hatte, die Arithmetik sei eine analytische Wissenschaft:

> Die Zeit hat, wie Sie ganz wohl bemerken, keinen Einfluß auf die Eigenschaften der Zahlen (als reiner Größenbestimmungen) [...], und die Zahlwissenschaft ist, unerachtet der Sukzession, welche jede Konstruktion der Größe erfodert, eine reine intellektuelle Synthesis, die wir uns in Gedanken vorstellen. Sofern aber doch Größen (quanta) darnach zu bestimmen sein, so müssen sie uns so gegeben werden, daß wir ihre Anschauung sukzessiv auffassen können und also diese Auffassung der Zeitbedingung unterworfen sein, so, daß wir denn doch keinen Gegenstand, als den der möglichen *sinnlichen* Anschauung, unserer Größenschätzung durch Zählen unterwerfen können, und es also ein Grundsatz ohne Ausnahme bleibt, daß die Mathematik sich nur auf sensibilia erstrecke.

»Und es also ein Grundsatz ohne Ausnahme bleibt, daß die Mathematik sich nur auf sensibilia erstrecke«: Das ist der Punkt, auf den es Kant ankommt, da der Gedanke, es gebe eine Mathematik des Unsinnlichen, die strengen Distinktionen seiner Systematik zum Einsturz bringen würde. Und dieser Punkt (hier sollte man sich keinen Illusionen hingeben) zeigt zugleich die Sollbruchstelle seines Mathematikbegriffes an.

Betrachtet man das letzte Zitat aus R 1634 genauer, dann wird man noch auf eine andere Beobachtung geführt: weil in Mathematik der jeweilige Sachverhalt »zusamt dem Grunde« kann eingesehen werden, »indem man alle darauf führende Begriffe auf der Tafel zeichnet und sinnlich macht«, so folgt, daß in dieser Wissenschaft die eigentliche logische Deduktion überflüssig ist. Denn diese vollzieht sich nach Kant durch die Subsumtion des Einzelfalls unter ein allgemeines Prinzip; haben wir aber bereits dieses Prinzip (z. B. ein geometrisches Axiom) *in concreto* vor Augen, dann müssen wir uns nicht mehr auf seine abstrakte Formulierung berufen. Folglich brauchen wir uns nicht explizit auf die Geltung unserer jeweiligen Schlußform berufen, wenn wir einen mathematischen Beweis führen wollen. Also müssen diese Schlußformen und die Prämissen unserer mathematischen Argumente nicht a priori aufgezählt werden.[34]

Kant führt nun genauer aus, was er unter der Unsinnlichkeit der eigentlich philosophischen Gründe versteht:

> Allein die Philosophie erfordert eine solche einsicht der Gründe, deren Verbindung mit dem daraus abgeleiteten nicht durch eine unmittelbare sinnliche Reihe Vorstellungen, folglich per intellectum purum begriffen wird. Wenn ich z.E. frage: woher der Mond zu gewißen Zeiten verfinstert wird, so kan ich dieses nicht anders einsehen, als wenn ich voraus gesetzt habe: ein Körper, der sein eigen licht hat, aber einem andern lichte ausgesetzt ist, kan nicht anders verdunkelt werden, als wenn etwas entweder ihn verdeckt oder ein anderes das licht verhindert darauf zu fallen. etc. etc. Diese Ideen können nicht ganz sinnlich gemacht werden. Wenn ich aber nach der Größe

[34] Man sieht, wie der Gedanke vom Primat der sinnlichen Erkenntnis und der von der Hybridität der logischen Deduktion Hand in Hand gehen. Dieser Konnex reicht bis Descartes' *Regulae ad directionem ingenii* zurück und war für Kant etwa in Lockes *Essay* greifbar.

> frage: Wie lange die Finsterniß dauert, so kan ich alles aus den Gegebenen Verhältnissen der größe, die ich durch zahlen ausdrüke, auf der Tafel vorstellig machen. Daher ist das mathematische Erkentniß von dem Philosophischen zu Unterscheiden.

Das hier angedeutete Verhältnis zwischen Philosophie und Mathematik erinnert an die einleitenden Bemerkungen der *Monadologia physica*, die ja ungefähr in die Zeit der Niederschrift der β^1-Reflexionen fällt. Dort sagt Kant, daß es zur Aufsuchung und Berechnung der einzelnen Naturgesetze zwar der Erfahrung und der sinnlichen Erkenntnis bedarf, daß aber auf diesem Wege die Gründe dieser Erscheinungen nicht aufgespürt werden können. Das kann nur die Metaphysik mit der ihr eigenen Erkenntnisart, die der Aufsuchung der letzten, unsinnlichen Prinzipien gemäß ist. Dementsprechend betont Kant an dieser Stelle, daß wir in Philosophie dazu gezwungen sind, die Prinzipien der Geltung unserer Behauptungen *in abstracto* aufzustellen und uns auf diese zu berufen. Hier kann man also nicht ohne weiteres die sinnliche Erkenntnis in Anspruch nehmen, ohne in den Bereich logischer Sophismen zu geraten. Die Philosophie ist also der eigentliche Ort der logischen Deduktion aus obersten Prinzipien, nicht die Mathematik. Denn in dieser Wissenschaft »kann ich alles aus den gegebenen Verhältnissen der Größe auf der Tafel vorstellig machen«, hier ersetzt also gleichsam die Berufung auf die Tafel die Berufung auf diskursive Prinzipien.

Nun behauptet Kant in R 1634 aber auch, daß es eine philosophische Erkenntnis von mathematischen Gegenständen gibt:

> Eine philosophische Erkentniß von den Größen und ihren Verhältnißen ist gantz anders. Ich weis z. E. Gewiß, daß der Cirkel eine Figur sey, die mit ihrem Umfange den größten Raum einschließt, den sie mit diesem Umfange einschließen kan. ([g]Den Beweiß gibt die Geometrie.) Aber wenn ich frage: woher muß denn aber diejenige Figur, die den größten Raum etc. etc. einschließet, so beschaffen seyn, daß sie sich durch und durch ähnlich ist. Dieses wäre eine philosophische Frage; eben dieses bey den Perpendikular linien.

Der hier angesprochene Unterschied zwischen dem geometrischen und dem philosophischen Beweis ergibt sich aus einem entsprechenden Unterschied der Fragestellung. Es ist Aufgabe der Geometrie, die Eigenschaften des Kreises herauszufinden, die in die Sinne fallen. Die Frage: »Warum schließt diese Figur den größten Raum ein?« beantwortet sich hier durch den Hinweis auf die Kreisförmigkeit dieser Figur, also auf eine Eigenschaft, die in die Sinne fällt. Die Frage: »warum ist die Figur, die den größten Raum einschließt, sich durch und durch ähnlich?« kann dagegen nicht auf diese Weise beantwortet werden, denn die Ähnlichkeit ist nach Kants Auffassung ein genuin philosophischer und daher unsinnlicher Begriff.

Halten wir jedoch fest, daß Kant die Möglichkeit einer philosophischen Erkenntnis mathematischer Sachverhalte nicht ausschließt, daß er sie aber für sehr schwer hält und es ablehnt, diese Erkenntnis dem Mathematiker zu vindizieren. So notiert er weiter unten:

Ein philosophisch Erkentniß der geometrischen und Arithmetischen Aufgaben würde vortreflich seyn. sie würde den Weg zur Erfindungskunst bahnen. aber sie ist sehr schweer. z.E. Daß, wenn ich von einem punkte auf eine Linie eine andere so ziehe, daß sie lauter gleiche Winckel macht, diese die kürtzeste unter allen Möglichen sey, beweißt die Geometrie; aber woher muß man eben diese Bestimmung treffen, um die kürzeste zu ziehen? Das kan nur eine erhabene Philosophie zeigen.
Hieraus ist auch zu sehen, warum das Mathematische Erkentniß sicherer ist als das Philosophische.

Ohne in diese Bemerkung zuviel hineinzulegen, kann man doch sagen, daß die hier angesprochene Arbeitsteilung eine Grenze zieht, die für die Mathematik nicht fruchtbar ist. Denn hier wird der Mathematik ein für allemal ein bestimmter Gegenstandsbereich zugewiesen, den sie bei Strafe des Irrens nicht verlassen darf: wagt es der Geometer, seinen gewöhnlichen Begriff der Ähnlichkeit von Figuren zu verallgemeinern, um damit seine Theoreme allgemeiner und eleganter zu beweisen, dann muß er sich vom Philosophen den Vorwurf gefallen lassen, in fremdem Gebiet herumzupfuschen. (Genau diesen Vorwurf erhebt Kant später gegen Wolffs Ähnlichkeitsbegriff, wie wir in §8 sehen werden.) Aber gerade die Frage, warum die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist, gehört nicht in eine »erhabene Philosophie«, sondern in die Topologie, und diese ist eine mathematische Disziplin.

Die soeben angeführten Reflexionen zeigen, daß Kants Denken über Mathematik von Anfang an unter einigen fundamentalen Prämissen stand: sie ist eine sinnliche oder anschauliche Wissenschaft, und darin ist ihr epistemischer Vorzug gegenüber der philosophischen Erkenntnis zu suchen, einer Erkenntnis, die abstrakt und diskursiv ist und folglich einer methodischen Richtschnur bedarf. Weil die Mathematik sich dergestalt an den sinnlichen Gegebenheiten orientieren kann, ist sie auch nicht darauf angewiesen, ihre anschaulich geleiteten Schlüsse durch explizit anzugebende logische Prinzipien zu begründen. Das aber bedeutet, daß die mathematische Deduktion nicht nach Maßgabe der theoretischen Logik erfolgen muß.

Es ist wichtig, sich über die Intention dieser These im klaren zu sein. Sie ist nicht als eine These über die *kompensatorische* Funktion von Anschauung zu verstehen, eine Interpretation, die erstmals von Russell vorgeschlagen wurde und heute vor allem durch Friedman vertreten wird.[35] Kants These vom anschaulichen Charakter des mathematischen Beweis- und Erkenntnisverfahrens bezieht sich nicht auf die Unzulänglichkeit der logischen Deduktionsmittel, über die man zu seiner Zeit verfügte, und auch nicht auf die Mängel der damaligen Axiomensysteme. Diese These bezieht sich vielmehr zunächst auf die elementare Beobachtung, daß die Disziplinierung des mathematischen Verfahrens

[35] »Kant, having observed that the geometers of his day could not prove their theorems by unaided argument, invented a theory of mathematical reasoning according to which the inference is never strictly logical, but always requires the support of what is called ›intuition‹.« (Russell 1919 S.145)

durch die Zwänge eines logischen Prokrustesbettes *überflüssig* ist: wir müssen uns nicht auf allgemeine Prinzipien berufen, um mathematische Sachverhalte einsehen zu können, und deshalb müssen wir (so Kant) solche Prinzipien auch nicht explizit angeben, wenn wir mathematisch räsonnieren.

Die These vom nichtlogischen Charakter der mathematischen Deduktion ist also zunächst einfach als die These vom *evidentiellen* Status des mathematischen Beweises zu verstehen: da in Mathematik die relevanten Informationen nicht durch allgemeine Prinzipien vermittelt werden, sondern in unmittelbarer Referenz gegeben sind, können wir dieses prinzipiierende Wissen jederzeit *in concreto* (an diesem konkreten Dreieck) aktivieren und wenn nötig sogar erweitern. Weil in Mathematik Grund und Begründetes *in die Anschauung fallen*, bedarf es hier keiner syllogistischen Subsumtion. Das ist die wichtigste Lehre, die sich aufgrund der vorstehenden Betrachtungen ergibt.

Es ist sinnvoll, diese Bemerkungen zum Mathematikverständnis des frühen Kant mit einem Blick auf Leibniz' Theorie der mathematischen Erkenntnis zu beschließen. So nämlich wird deutlich, daß Kants Begriff von Mathematik durch eine kleine, aber entscheidende Akzentverschiebung aus demjenigen von Leibniz hervorgeht.

Leibniz schrieb 1702 einen Brief an Königin Sophie Charlotte, der unter dem Titel *Lettre touchant ce qui est independant des Sens et de la Matière* bekannt geworden ist. Bereits der Titel sagt, worum es geht: zur Debatte steht die Frage des epistemischen Zugangs zu nichtsinnlichen Erkenntnissen. Leibniz unterscheidet in diesem Zusammenhang drei Klassen von Begriffen: die Begriffe der *qualités sensibles*, die den einzelnen Sinnen zugeordnet sind und als *claires mais confuses* bestimmt werden, die Begriffe, die auf dem *sens commun* beruhen und klar und distinkt sind, und schließlich jene Begriffe, die im Gegensatz zu denen der ersten beiden Klassen nicht der Imagination unterworfen sind und folglich nur vom Verstand erfaßt werden können. Die mathematischen Begriffe ordnet Leibniz in die zweite Klasse ein: sie sind sowohl wahrnehmbar (*sensibles*) als auch verstehbar (*intelligibles*). Somit verbinden sie die Vorzüge der Sinnes- und der Verstandeserkenntnis miteinander: sie sind für uns so leicht zu erfassen wie die sinnlichen Begriffe, teilen aber nicht deren Verworrenheit und Unkontrollierbarkeit; folglich sind sie von wissenschaftlicher Dignität.

Die mathematischen Axiome erkennt man nach Leibniz durch das natürliche Licht; dabei gilt es jedoch zu beachten, daß nach seiner Auffassung auch das archimedische Prinzip vom Gleichgewicht der Waage, wenn auf beiden Seiten alles gleich ist, ein mathematisches ist:

> C'est par cette *Lumiere naturelle* que l'on reconnoist aussi *les Axiomes* de Mathematique; par exemple que, si de deux choses égales on retranche la même quantité, les choses qui restent sont egales; item que si dans une balance tout est egal de part et d'autre, rien ne penchera, ce qu'on prevoit bien sans l'avoir jamais experimenté. (GP VI 503)

Damit ist der Gedanke der Anwendbarkeit mathematischen Wissens in den leibnizschen Begriff von Mathematik bereits eingeschlossen. So heißt es daher auch:

> Et c'est sur de tels fondemens qu'on établit l'Arithmetique, la Geometrie, la Mechanique et les autres sciences demonstratives, où à la verité les sens sont bien necessaires pour avoir certaines idées des choses sensibles, et les experiences sont necessaires pour établir certain faits, et même utiles pour verifier les raisonnements comme par une maniere d'épreuve. (l. c. S. 503 f.)

Hier räumt Leibniz ein, daß wir die Begriffe mathematischer Sachverhalte durch die Sinne gewinnen können, sogar müssen, denn diese Begriffe beziehen sich ja letztlich auf solche Sachverhalte, wie sie in der sinnlichen Erfahrung anzutreffen sind. Es ist also der *Gehalt* dieser Begriffe, welcher auf Sinnliches verweist und sie daher der Imagination zugänglich macht.
Andererseits genügt diese Imaginierbarkeit aber keineswegs, wenn es darum geht, aus diesen Begriffen und Axiomen allgemeine und notwendige Wahrheiten herzuleiten. Leibniz ist daher der Ansicht, daß diese Wahrheiten nur erfaßt werden können, wenn sie durch den Verstand erkannt (also bewiesen) werden: »Mais la force des demonstrations depend des notions et verités intelligibles, seules capables de nous faire juger de ce qui est necessaire [...]« (l. c. S. 504). Denn die sinnliche Erkenntnis weist einen erheblichen Mangel auf: sie kann uns zwar davon überzeugen, was ist, nicht aber davon, was sein muß:

> Mais pour revenir aux *Verités necessaires*, il est generalement vray, que nous ne les connoissons que par cette Lumiere naturelle, et nullement par les experiences des Sens. Car les Sens peuvent bien faire connoistre en quelque façon, ce qui est, mais ils ne sauroient faire connoistre ce qui doit-estre ou ne sauroit estre autrement. (S. 504)

Nun sind aber die mathematischen Wahrheiten notwendige Wahrheiten; doch wie können sie das sein, wenn die Begriffe, in denen sie formuliert werden, sinnliche Begriffe sind? Es ist diese Frage, die sich auch anläßlich der Betrachtung von Kants Aufstellungen in R 1634 aufgedrängt haben müßte. Wir haben gesehen, daß Kant selbst diese Frage nicht für wesentlich hielt: daß der Mathematiker sich auf die Tafel berufen kann (vgl. oben S. 16), ist in seinen Augen ein *Vorteil*, nicht etwas, das dringend einer philosophischen Explikation bedürfte. Denn seine Perspektive war auf die Frage fokussiert, was es für *Philosophie* bedeutet, ohne solche sinnliche Evidenzen auskommen zu müssen. Darin unterscheidet er sich von Leibniz, der S. 506 einräumt:

> Je demeure cependant d'accord, que dans le present estat, les Sens externes nous sont necessaires pour penser, et que, si nous n'en avions eu aucun, nous ne penserions pas. Mais ce qui est necessaire pour quelque choses, n'en fait point l'essence pour cela. L'air nous est necessaire pour la vie, mais nostre vie est autre chose que l'air. Les sens nous fournissent de la matiere pour le raisonnement, et nous n'avons jamais des pensées si abstraites, que quelque chose de sensible ne s'y mêle; mais le raisonnement demande encor autre chose que ce qui est sensible.

In typisch leibnizscher Manier wird hier ein komplexes epistemologisches Programm, dessen Ausarbeitung ein Buch erfordert hätte, mit wenigen, aber präzisen Strichen skizziert. Leibniz bestimmt die mathematischen Begriffe als *sensibles et intelligibles à la fois*. Sie sind also Begriffe sinnlicher Sachverhalte, aber sie sind es in intelligibler Manier. Nur die Begriffe sind wahrhaft mathematische, die das sinnlich Gegebene nicht als sinnliches, sondern als intelligibles thematisieren. So ist der Begriff des Kreises ein Begriff, den wir zwar in alltäglicher Erfahrung zur Charakterisierung gewisser Sachverhalte verwenden; aber das, was den mathematischen Gehalt dieses Begriffs ausmacht (die Kongruenz der Verbindungslinien von Mittelpunkt und Peripherie) ist ein Sachverhalt, der ganz und gar nicht im sinnlichen Gehalt sich erschöpft. Es interessiert uns einfach nicht, daß jeder empirische Kreis nur eine Annäherung an diesen idealen Kreis ist, wie ihn der mathematische Begriff beschreibt. Deshalb bedarf das mathematische Räsonnement noch eines anderen Elements als der bloß sinnlichen Repräsentation, die zwar für uns notwendig ist, um überhaupt Kreise erfassen zu können, die aber nicht das Wesentliche des Kreises selbst zur Darstellung bringt.

Wir verwenden also in Mathematik empirische Sachverhalte als Zeichen intelligibler Sachverhalte; und nur deshalb kann es eine gegenseitige Ersetzbarkeit dieser Begriffe geben: der geometrische Sachverhalt der Inkommensurabilität von Quadratseite und Diagonale entspricht dem arithmetischen Sachverhalt der Irrationalität von $\sqrt{2}$. Dies sind unterschiedliche sinnliche Instanziierungen eines und desselben intelligiblen Sachverhalts, der uns freilich auf nichtsinnliche Weise nicht zugänglich ist. Und genau das unterscheidet den intelligiblen Begriff der Diagonalen vom nur sinnlichen Begriff dieser Strecke: unter empirischen Gesichtspunkten kann es keine Inkommensurabilität geben, denn für den Feldmesser sind ja alle Strecken miteinander vergleichbar. In diesem Sinne stützt sich also mathematische Erkenntnis auf sinnliche Gehalte: sie nimmt sie zum Anlaß des Räsonnements, erschöpft sich aber nicht in ihnen, sondern geht über sie hinaus, und tritt sogar in Widerspruch zur sinnlichen Evidenz.

Weil also die mathematischen Begriffe mehr als nur sinnliche Begriffe sind, können sie auch in Beweisen Verwendung finden und so zu notwendigen Konklusionen führen. Daß *nur* solche Begriffe mit einer »intelligiblen Seite« als Deduktionsgrundlage fungieren können, sieht man leicht ein: nehmen wir den Kreis so, wie er sich der sinnlichen Repräsentation darbietet, dann können wir überhaupt nichts mit mathematischer Präzision ermitteln. Das Mathematische am Kreis ist also nicht das, was seine Sinnlichkeit ausmacht – streng genommen gibt es ja so etwas wie »Kreis« überhaupt nicht. Es ist diese intelligible Seite der mathematischen Begriffe, die es erlaubt, allgemeine und notwendige Wahrheiten auch über Sinnliches zu erschließen. Das möchte Leibniz mit dem zuletzt zitierten Satz zum Ausdruck bringen. Wir können demnach zwar »ewige Wahrheiten« *via* sinnliche Sachverhalte erkennen, aber nur unter der Voraussetzung, daß wir diese Sachverhalte intelligibel machen, sie also mit dem Verstand, nicht nur mit den Sinnen erfassen:

> Il est vray que les sciences mathematiques ne seroient point demonstratives, et consisteroient dans une simple induction ou observation, qui ne nous asseureroit jamais d'une parfaite generalité des verités qui s'y trouvent, si quelque chose de plus haut, et que l'intelligence seule peut fournier, ne venoit au secour de *l'imagination et des sens.* (S. 501)

Leibniz stimmt also mit Kant darin überein, daß er die Funktion der Sinne und der Einbildungskraft für die mathematische Erkenntnis durchaus anzuerkennen weiß: ohne die Sinne könnten wir nach seiner Auffassung nichts Mathematisches erkennen. Aber das heißt noch nicht, so Leibniz, daß dieser sinnliche Aspekt der mathematischen Begriffe zugleich für die Rechtfertigung dieser Erkenntnis in Anspruch genommen werden darf; das ist vielmehr gerade nicht der Fall! Im Gegensatz zu Kant nimmt daher Leibniz diesen Dissens zwischen Sinnlichkeit und Verstand zum Anlaß, seine rationalistische Ausrichtung herauszustellen: die Tatsache, daß es uns möglich ist, solcherart Intelligibles im Sensiblen zu erkennen, kann nach seiner Auffassung nur durch eine Theorie der *ideae innatae* erklärt werden. Und diese Theorie ist es, für die er in diesem Brief werben möchte.[36]

So sehen wir, wie aus einer kleinen Wendung eine große Differenz hervorgeht: Kant nämlich ignoriert zunächst diesen Zusammenhang zwischen der Allgemeinheit und Notwendigkeit der mathematischen Erkenntnis und deren intelligiblen Ursprüngen. Denn seine Theorie von 1762 enthält zwar die These, daß mathematische Erkenntnis *in concreto* gewonnen wird, aber sie enthält keine Erklärung dafür – ganz einfach weil es nicht Teil from Kants Primärzielen war, eine Begründung der mathematischen Praxis zu geben. Daß mathematische Erkenntnis *in concreto* gewonnen wird, fungiert in dieser Theorie vielmehr als Prämisse.

Aus diesem Grunde kann die Interpretation von Beth und Hintikka nicht überzeugen; denn diese Interpretation setzt voraus, daß es der Zweck der Theorie von 1762 war, die Möglichkeit mathematischer Erkenntnis *in concreto* zu erklären. Leider enthält dieser Text keine solche Erklärung, und wir werden in §7 sehen, daß die These vom anschaulich-konkreten Charakter mathematischer Begriffe alles andere als neu war.

[36] »Cette consideration fait encor connoistre qu'il y a une *Lumiere née avec nous.* Car puisque les sens et les inductions ne nous sauroient jamais apprendre des verités tout à fait universelles, ny ce qui est absolument necessaire, mais seulement ce qui est, et ce qui se trouve dans des exemples particuliers, et puisque nous connoissons cependant des verités necessaires et universelles des sciences, en quoy nous sommes privilegiés au dessus des bestes: il s'ensuit que nous avons tirés ces verités en partie de ce qui est en nous. Ainsi peut-on y mener un enfant par des simples interrogations à la maniere de Socrate, sans luy rien dire, et sans le rien faire experimenter sur la verité de ce qu'on luy demande. Et cela se pourroit practiquer fort aisement dans les nombres, et autres matieres approchantes.« (S. 505 f.)

Kant hat also das von Leibniz sorgfältig austarierte Gleichgewichtsverhältnis zwischen Anschauung und Begriff zugunsten der ersteren verschoben: während Leibniz gerade darauf abhebt, daß uns die Anschauung nicht vom Allgemeinen und Notwendigen überzeugen kann, um zu einer Theorie der *ideae innatae* zu gelangen, nimmt Kant die Tatsache, *daß* uns die Mathematik solcherart unterrichtet, zum Anlaß, eine vollkommen neuartige Theorie der *Anschauung* zu entwickeln. So lesen wir in der Inauguraldissertation von 1770:

> Mathesis itaque pura, omnis nostra sensitiva cognitionis formam exponens, est cuiuslibet intuitivae et distinctae cognitionis organon; et, quoniam eius obiecta ipsa sunt omnis non solum principia formalia, sed ipsa *intuitus originarii*, largitur cognitionem verissimam simulque summae evidentiae in aliis exemplar. (§ 12)

Es ist wichtig, sich über den folgenden Punkt im klaren zu sein: Kant bietet diese reine Anschauung auf als Explikans dessen, was die Apriorität (Allgemeinheit und Nowendigkeit) der mathematischen Erkenntnis ausmacht: sie kann notwendig und allgemein sein, weil es die ihr zugrundeliegende Anschauung ist, nicht weil sie diese Anschauung in mathematikspezifischer Weise traktiert, wie Leibniz gesagt hatte.[37] Und während der leibnizsche Ansatz mit reinen mathematischen Begriffen einerseits und empirischen Anschauungen andererseits auskam, postuliert Kant nunmehr eine dritte Erkenntnisquelle, die reine Anschauung, deren systematische Position so schwer zu bestimmen ist und im dritten Teil dieser Untersuchung ausführlich erörtert werden soll.

Damit dürfte der Leser einen ersten Begriff dessen, was hier zur Debatte steht, gewonnen haben. Zum Aufbau dieser Untersuchung sei hier noch folgendes angemerkt: Teil I und II enthalten überwiegend immanente und begriffsgeschichtliche Analysen der Texte von 1762 und 1770. Diese Analysen sind diffizil und stellen die Geduld des Lesers auf eine harte Probe. Die Intention war, diese Texte, die gewöhnlich nur als Dokumente der Entwicklungsgeschichte gelesen werden, in ihrem Wahrheitsanspruch ernst zu nehmen; aus diesem Grunde war es unvermeidlich, auf Probleme einzugehen, die nicht unmittelbar mit unserem Thema zusammenhängen, sofern sie in diesen Schriften zentral sind. Hinzu kommt, daß in Teil I einige grundsätzliche Dinge besprochen werden müssen, die nicht Teil von Kants Mathematikphilosophie sind, wohl aber zu deren Voraussetzungen gehören. Erst in Teil III kommt es zu einer inhaltlichen Auseinandersetzung mit Kants ausgereifter Theorie.

[37] In dieser Untersuchung kann der kantische Aprioritätsbegriff nicht problematisiert werden. Kant selbst hat diesen Begriff für unproblematisch gehalten; vgl. die Streitschrift gegen Eberhard 82/228: »Das zweite, nämlich was ein *Urteil a priori*, zum Unterschiede des empirischen, sei, macht hier keine Schwierigkeit, weil es ein in der Logik längst bekannter und benannter Unterschied ist [...].« Zu Kants Aprioritätsbegriff vgl. die neueren Untersuchungen: 1981, Palmquist 1987, Grondin 1989, Tait 1992, Peacocke 1994, Strawson 1994.