LOTHAR KREISER

# Gottlob Frege

## Leben – Werk – Zeit

FELIX MEINER VERLAG
HAMBURG

*Gewidmet der wissenschaftlichen Wirkungsstätte Gottlob Freges,*
*der Friedrich-Schiller-Universität Jena*

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

*Kreiser, Lothar:* Gottlob Frege : Leben – Werk – Zeit /
Lothar Kreiser. – Hamburg : Meiner 2001
ISBN 3-7873-1551-9

Gedruckt mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft

 Satz: KCS GmbH Buchholz/Hamburg. Druck: Strauss, Mörlenbach. Buchbinderische Verarbeitung: Schaumann, Darmstadt. Werkdruckpapier: alterungsbeständig nach ANSI-Norm resp. DIN-ISO 9706, hergestellt aus 100% chlorfrei gebleichtem Zellstoff. Printed in Germany.

INHALT

# Vorwort

Ende der siebziger Jahre verständigte ich mich mit Herrn Thomas Egel, Lektor im damaligen Akademie-Verlag Berlin (Ost) darüber, Freges Leben anhand der Akten in den Thüringischen Archiven nachzuzeichnen. Wir kamen im Voranschlag so etwa auf 180 Seiten. In der Rückschau war die tragende Idee wohl doch eher eine mit Lebensverhältnissen verbundene Werkeinführung. Zu wenig schienen nach erster Sichtung die Archive über Frege selbst zu bieten. Mehr Aussicht war von einer Erweiterung des Fragenkatalogs zu erwarten. Die Erweiterung des Ansatzes wurde begünstigt durch meine Frege-Professur in Jena (1981/82), die hinreichend viel Zeit für die Materialsammlung vor Ort bot. Weitere Archive wurden in den folgenden Jahren einbezogen. Daß sich dadurch allerdings der Umfang des Buches auf über 600 Seiten erweitern würde, war damals nicht vorhersehbar.

Andere Aufgaben unterbrachen aber die zeitaufwendigen Nachforschungen. Die Materialsammlung mußte auf die Semesterpausen verlegt werden und hatte sich dort die Zeit mit anderen wissenschaftlichen Vorhaben zu teilen. Erst 1988/89 konnten im Grundriß das 1. und das 2. Kapitel fertiggestellt werden. Die mit dem Beitritt der DDR zur BRD verbundenen schwierigen wissenschaftspolitischen Probleme und komplexen wissenschaftsorganisatorischen Aufgaben, in deren Lösung ich auf verschiedene Weise einbezogen wurde, führten erneut zu einer längeren Unterbrechung. Hin und wieder konnte Laufendes mit dem Vorhaben so verbunden werden, daß drei Abschnitte aus dem Projekt zur Publikation gelangten. Anderes, wie z. B. die Herausgabe des sogenannten Tagebuches von Frege, mußte schweren Herzens anderen überlassen werden. Im Wintersemester 1996/97 ergab sich endlich wieder die Möglichkeit, die Arbeit kontinuierlicher fortzusetzen. Das zusammengetragene Material aus Archiven hatte nun aber selbst Archivcharakter gewonnen. Es mußte erst wieder gesichtet und neu aufgearbeitet werden.

Im Ergebnis zeigte sich, daß den unterschiedlichen Fragen in einer nun auch unterschiedlichen Weise ihrer Beantwortung nachgegangen werden mußte. Die dabei leitenden methodologischen Grundsätze sind den betreffenden Darstellungen vorangestellt worden.

Das Leben eines (männlichen oder weiblichen) Wissenschaftlers kennt Glück und Fehlschläge ganz anderer Art als das einer Persönlichkeit aus Staat und Politik, der Wirtschaft, des Theaters oder des Sports. Sein Verlauf ist bestimmt durch die Intensität, mit welcher er die Lösung eines Zieles mit allem Für und gegen alles Wider der Zeitumstände verfolgt und das Interesse an ihm wird vor allem genährt durch die Bedeutsamkeit des Themas für das wissenschaftliche Erkennen oder durch die gesellschaftlichen Auswirkungen der praktischen Verwertbarkeit gewonnener Einsicht. Bei Frege kommt noch die Tragik der resignierenden Selbsteinschätzung und die erst nach seinem Tode einsetzende Wertschätzung seines Werkes hinzu.

Die Wirkung seines Werkes hält nach wie vor an. Die in ihm enthaltenen Triebfedern des Erkennens sind noch nicht erschöpft und veranlassen zu immer wieder neuen, fruchtbaren Ideenverbindungen. Um überhaupt einen Abschluß für diese Biographie zu finden, war eine scharfe zeitliche Zäsur unvermeidlich. Sie wurde mit Freges Tod im Juli 1925 gesetzt. Ereignisse späterer Zeit sind nur dann berücksichtigt worden, wenn sie im unmittelbaren Zusammenhang mit persönlichen Erinnerungen an Frege stehen.

Auf der Bedeutsamkeit des wissenschaftlichen Werkes Freges beruht das allgemeine Interesse an seiner Person, seinem Leben und den Bedingungen seines Schaffens. Wie aber lassen sich biographisch diffizilste Aspekte des logischen und mathematischen Denkens betreffende Untersuchungen Freges darstellen, ohne nicht einen möglichst breiten Interessentenkreis durch vorauszusetzendes logisches Wissen einzuschränken? Eine Biographie z. B. von Ludwig van Beethoven steht hier vor einem analogen Problem, es sei denn, man entscheidet sich für die reißerische Oberflächlichkeit unter Berufung auf die künstlerische Freiheit. Ich habe mich dafür entschieden, auf Freges Grundideen und nicht so sehr auf ihre spezielle, vor allem technische Ausführung das Schwergewicht zu legen. Die hinter den Formeln steckenden Ideen waren mir wichtiger als die symbolischen Ausdrücke. Darin sehe ich mich auch in Übereinstimmung mit Freges Intentionen.

Gewährsleute für meine Interpretation Fregescher Überlegungen zu zitieren, habe ich ebenso unterlassen, wie eine Polemik gegen andere Meinungen, auch wenn ich mich im Hintergrund an den ersteren orientiert und gegen die letzteren gewendet habe. Der Preis dafür ist mehr Beschreibung des Werkes, als dessen Entwicklung aus seinen Voraussetzungen. Genau das aber ist ja auch meine Absicht. Für eine Diskussion von werkinternen Problemen gibt es andere Foren.

Die hiermit vorgelegte Biographie schließt ein, was »Milieugeschichte« genannt wird. Freges Leben wird biographisch zunächst im Kontext der Stadt und der Stadtschule Wismar, dann in dem der Stadt und der Universität Jena eingebettet rekonstruiert. Regional übergreifende politische und wissenschaftliche Vorgänge werden einbezogen, um verbürgten konkreten Ereignissen aus Freges Leben einen für unser Verstehen tieferen und festeren Rahmen zu geben. Im 5. Abschnitt des 2. Kapitels findet der Leser eine ausführlichere Begründung meiner methodischen Verfahrensweise in dieser Biographie, die vielleicht besser eine zu einer Milieustudie erweiterte Biographie genannt werden sollte. Ein besonderer Vorzug der Verfahrensweise scheint mir die mit ihr verbundene Möglichkeit, Freges Leben so darstellen zu können, daß Leser, die sich für gewisse Tätigkeiten von ihm nicht so sehr interessieren, wie z. B. seine Mitwirkung im mathematischen Seminar, diese Abschnitte überspringen können, ohne Verlust für das Verstehen der folgenden Abschnitte und Kapitel.

Für die Vollständigkeit der Freges Tod vorgelagerten Milieugeschichte gibt es sinnvollerweise nur den Gesichtspunkt der Wesentlichkeit für unser Wissen über Frege. Eine personenbezogene Milieustudie versucht nicht zu ermitteln, was diese Person, die Handlungsspielraum hat, alles machte, sondern wie sie in einer bestimmten Eigenschaft tätig gewesen ist: In ihrer Eigenschaft als Wissenschaftler, als Staatsbürger, als Mitglied einer Partei usw. Aber auch in dieser Hinsicht ist Wesentliches am Erfragten nicht dasselbe, wenn dieses Gegenstand eines Historikers, eines Sozialwissenschaftlers oder eines Wissenschaftshistorikers ist, um nur einige Sichtweisen zu nennen. Die vorgelegte Biographie folgt in erster Linie wissenschaftshistorischen und milieugeschichtlichen Gesichtspunkten. Leider sind auch sie nicht etwas, auf das wie auf ein allgemein anerkanntes und gesichertes Gut verwiesen werden kann. Die methodologischen Grundsätze haben deshalb auch die Aufgabe, durch die mit ihnen verbundenen Arten der Analyse das, was sie als Wesentliches zu erkennen erlauben, genauer zu bestimmen.

Letztlich ist es nur Hoffnung, daß das Wesentliche für das Erkennen im Umfang dessen liegt, was für Frege selbst wesentlich gewesen war. Es kann sich ferner auch nur darum handeln, die Bedingungen der Möglichkeit des Fregeschen Schaffens gerade als eines solchen festzustellen, nicht aber, was unmöglich geleistet werden kann, die Notwendigkeit genau dieses Schaffens abzuleiten.

Eine Schwierigkeit besonderer Art ist das Zitieren von Texten gewesen. Ich habe hier die Lesbarkeit vor die originalgetreue Wiedergabe gestellt, mit Ausnahme von Auszügen aus Gerichtsakten und Freges Bericht vom Ableben seiner Mutter. Dabei bin ich jenen Regeln der Rechtschreibung gefolgt, die auch leitend für Freges letzte wissenschaftliche Veröffentlichung gewesen ist und die bis zu der neuen Reform der Rechtschreibung am Ende des letzten Jahrhunderts galten.

Der eigentliche Zweck dieses Vorwortes aber ist, allen jenen auch öffentlich Dank zu sagen, die mich in besonderer Weise in meiner Arbeit unterstützt haben: Frau Margit Hartleb im Universitätsarchiv Jena für ihre unendliche Geduld, Frau Christel Kindler im Stadtarchiv Wismar für ihre sachkundige Beratung, Frau Barbara Kühl (Bad Kleinen) für Quellenhinweise und ihre Bewertung, Herrn Gottfried Gabriel (Jena) für die wertvollen Anregungen, Herrn Uwe Dathe (Jena) für wichtige Hinweise auf Quellen, Herrn Volker Peckhaus (Erlangen) für die anregenden Diskussionen über methodologische Fragen der Geschichtsschreibung einer wissen-

schaftlichen Disziplin, meinen Leipziger Kollegen, insbesondere den Herren Gerhard Terton, Peter Steinacker und Ingolf Max, die auch durch ihre eigenen Lehrveranstaltungen über Frege mir kompetente Gesprächspartner waren. Zu ihnen gehören auch die Herren Werner Stelzner (Jena) und Werner Wolff (Berlin), die ihres unverdienten Schicksals wegen hier zu nennen, mir besonders am Herzen liegt. Ehemaligen Studierenden an unserem Institut, wie Frau Daniela Raue und Herrn Sebastian Bauer, sowie den noch studierenden Herren Markus Mitschack und Andreas Nareike danke ich für die Mithilfe bei der technischen Überarbeitung des Manuskripts unter der sachkundigen Anleitung durch Herrn Ingolf Max; er, selbst auch über Frege publizierend, hat mich in der technischen und inhaltlichen Endfassung des Buches besonders unterstützt. Zu weiterem Dank habe ich im Werk an nicht wenigen Stellen einen dort auch gern nachgekommenen Grund.

Frau Anneliese Düsing (Wismar), der ehemaligen Direktorin des Stadtarchivs Wismar, und Herrn Willy Schönefeld (Hildesheim) kann ich hier nur noch im ehrenden Gedenken meine tiefempfundene Dankbarkeit für mannigfache Hilfe aussprechen, denn beide sind in der Zwischenzeit verstorben.

Herrn Jürgen Mittelstraß und Herrn Günther Patzig bin ich für Hinweise dankbar, denen ich gern versuchte nachzukommen, der Deutschen Forschungsgemeinschaft für den gewährten Druckkostenzuschuß, dem Meiner Verlag endlich für die Sorgfalt, mit der er sich des Manuskriptes angenommen hat. Einen Kollegen aber, Herrn Christian Thiel (Erlangen), möchte ich besonders herausheben. Ihm schulde ich mehr als Dank. Mit ihm, dem die Materie so vertraut ist, daß er (wenn sein Zeitbudget es erlauben würde) die Biographie auch auf seine vorzügliche Weise hätte selber schreiben können, verbindet mich nicht nur ein jahrzehntelanger schriftlicher und mündlicher Gedankenaustausch, sondern auch eine daraus erwachsene Freundschaft. Seine Arbeiten zu Frege, wie überhaupt zur Logik, haben mich derart beeindruckt und auch beeinflußt, daß ich, bei aller Eigenverantwortung für diese Biographie manchmal gar nicht mehr weiß, ob eine gewisse Nuancierung eines Gedankens, oder er gar selber, auf seine Anregung zurückgeht. Nur die von uns beiden geteilte Verehrung Freges hat den Ausschlag gegeben, Freges Wirkungsstätte diese Biographie zu widmen.

Leipzig, Januar 2001 Lothar Kreiser

| | |
|---|---|
| Frege, *NSchr I* | Frege, Gottlob: Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel. Hrsg. von H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach. Hamburg: Felix Meiner. Bd. 1: Nachgelassene Schriften. Unter Mitwirkung von Gottfried Gabriel und Walburga Rödding bearbeitet, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach. 2., revidierte Auflage, erweitert um einen Anhang *Nachschrift einer Vorlesung und Protokolle mathematischer Vorträge Freges* / eingeleitet von Lothar Kreiser unter Mitw. von Günther Grosche. 1983. |
| Frege, *NSchr II* | Frege, Gottlob: Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel. Hrsg. von H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach. Hamburg: Felix Meiner. Bd. 2: Wissenschaftlicher Briefwechsel. Herausgegeben, bearbeitet, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel, Albert Veraart. 1. Auflage, 1976. |
| Angelelli | Frege, Gottlob: Kleine Schriften. Herausgegeben und mit Nachbemerkungen zur Neuauflage versehen von Ignacio Angelelli. Hildesheim: Georg Olms, 1990. Um die Bemerkungen zur 2. Auflage erweiterter Nachdruck der 1. Auflage 1967. |
| Patzig (1) | Frege, Gottlob: Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien. Herausgegeben und eingeleitet von Günther Patzig. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht. 7., bibliographisch ergänzte Auflage 1994. |
| Patzig (2) | Frege, Gottlob: Logische Untersuchungen. Herausgegeben und eingeleitet von Günther Patzig. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht. 4., durchgesehene und bibliographisch ergänzte Auflage 1993. |
| Frege, *GLA* | Frege, Gottlob: Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Centenarausgabe. Mit ergän- |

| | |
|---|---|
| | zenden Texten kritisch herausgegeben von Christian Thiel. Hamburg: Felix Meiner, 1986. |
| Frege, *GGA I* | Frege, Gottlob: Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsgeschichtlich[1] abgeleitet, I/II. Erster Teil. Hildesheim: Georg Olms, 1998. 2. Nachdruck der Ausgaben Jena 1893 und 1903. |
| Frege, *GGA II* | Frege, Gottlob: Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsgeschichtlich[2] abgeleitet, I/II. Zweiter Teil. Hildesheim: Georg Olms, 1998. 2. Nachdruck der Ausgaben Jena 1893 und 1903. |
| Frege, *BS* | Frege, Gottlob: Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, in: Gottlob Frege. Begriffsschrift und andere Aufsätze, herausgegeben von I. Angelelli, 2. Auflage, Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim 1964. |
| Universitätsgeschichte Jena, *I* | Geschichte der Universität Jena, 1548/58–1958. Festausgabe zum vierhundertjährigen Universitätsjubiläum. Im Auftrag von Rektor und Senat verfaßt und herausgegeben von einem Kollektiv des Historischen Instituts der Friedrich-Schiller-Universität Jena unter der Leitung von Prof. Dr. phil. habil. Max Steinmetz. Band I: Darstellung, Jena 1958. |
| Auerbach, Felix: Ernst Abbe | Ernst Abbe. Sein Leben, sein Wirken, seine Persönlichkeit. Nach den Quellen und aus eigener Erfahrung geschildert. 2. Auflage, Leipzig 1922. |
| Stier, Fr.: Lebensskizzen | Friedrich Stier, Lebensskizzen der Dozenten und Professoren der Universität Jena, 1548/58–1958, Manuskript, Jena 1960, UAJ, H/C, Nr. 84/1–4 / Bd. 1: A–E / Bd. 2: F–H / Bd. 3: I–R / Bd. 4: S–Z. |
| ST. W. | Stadtarchiv der Hansestadt Wismar |
| ST. J. | Stadtarchiv Jena |
| UAJ | Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek Jena, Universitätsarchiv |
| ThULB | Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek Jena |
| TSaA | Thüringisches Staatsarchiv Altenburg |
| TSaG | Thüringisches Staatsarchiv Gotha |
| ThStAMgn | Thüringisches Staatsarchiv Meiningen |
| ThHSTAW | Thüringisches Hauptstaatsarchiv Weimar |

[1] Es muß natürlich »Begriffsschriftlich« heißen.
[2] Auch hier muß es »Begriffsschriftlich« heißen.

# 3 Zahl und Begriffsumfang

Die erste logische Schaffensperiode Freges kann unter die Frage gebracht werden: Wie läßt sich die logische Struktur von mathematischen Aussagen explizieren und ihr Beweiszusammenhang darstellen? Die »Begriffsschrift« ist Freges Antwort auf diese Frage. Mit der gefundenen Antwort verschiebt sich der Forschungsschwerpunkt. Eine zwar immer mitgedachte, aber nicht dominante, sondern sich erst präzisierende Frage tritt nun hervor und ihre Beantwortung markiert eine weitere Periode in seiner Forschungsarbeit: Was sind logische Gegenstände?

Freges Antwort auf diese beiden Fragen wird nachfolgend in hermeneutischer Weise rekonstruiert.

## *3.1 R. Grassmanns Größenlehre und Freges Begriffsschrift*

In diesem und dem folgenden Abschnitt geht es um die Antwort auf die eben genannte erste Frage.

Kritische Äußerungen von Rezensenten seiner »Begriffsschrift«, die in ihr in erster Linie eine mißglückte Darstellung der damals herrschenden traditionellen Logik sahen, oder nur eine pasigraphisch unzweckmäßige Umschreibung der Booleschen Algebra, hielt Frege entgegen, daß sie den gänzlich anderen Zweck seiner Bemühungen im Vergleich mit der Absicht, die G. Boole in seiner algebraischen Darstellung dieser Logikgestalt verfolgt hatte, völlig außer Acht gelassen haben.

»Ich wollte nicht eine abstrakte Logik in Formeln darstellen«, sagte Frege in seiner Rede am 27. 1. 1883 vor den Mitgliedern der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft, »sondern einen Inhalt durch geschriebene Zeichen in genauerer und übersichtlicherer Weise zum Ausdruck bringen, als es durch Worte möglich ist. Ich wollte in der Tat nicht einen bloßen »*calculus ratiocinator*«, sondern eine »*lingua characterica*« im leibnizschen Sinne schaffen, wobei ich jene schlußfolgernde Rechnung immerhin als einen notwendigen Bestandteil einer Begriffsschrift anerkenne. Wenn dies verkannt wurde, so liegt das vielleicht daran, daß ich in der Ausführung das abstrakt Logische zu sehr in den Vordergrund habe treten lassen.«[1]

An anderer Stelle hebt er in Gegenüberstellung zu Booles Absicht, einen Kalkül zu schaffen, der logische Aufgaben in systematischer Weise löst, her-

[1] Frege, *BS*, S. 97 f.

vor: »Es sei nun dagegen der Zweck meiner Begriffsschrift dargelegt. Ich hatte dabei von vornherein den *Ausdruck eines Inhaltes* im Auge. Der Zielpunkt meiner Bestrebungen ist eine *lingua characterica* zunächst für die Mathematik, nicht ein auf reine Logik beschränkter *calculus*. Der Inhalt aber soll genauer als durch die Wortsprache wiedergegeben werden.«[2]

Die zeitgenössischen formalen Logiker konnten ihre Logik in der »Begriffsschrift« nicht wiedererkennen und die G. Boole folgenden Logiker beurteilten sie unter ihrem Anliegen einer rechnenden Behandlung formallogischer Themen. Sie übersahen, daß Frege eine logische Behandlung mathematischer Aussagen innerhalb eines dazu geeigneten Ausdruckssystems anstrebte. Auf die Logik der Mathematik kam es ihm an. Der Kontext, in den er sich gestellt sehen wollte, ist nicht der Rahmen der Algebra der Logik, sondern jener der keineswegs auf Frege beschränkten Bestrebungen einer wie auch immer konzipierten, aber doch als erforderlich angesehenen logischen Fundierung der Mathematik.

Hier sind bis 1879 im deutschsprachigen Raum die Arbeiten von Hermann Hankel[3] sowie von Hermann und Robert Grassmann[4] zu nennen.[5]

[2] Frege, *NSchr.I*, S. 13. Frege vergleicht in dieser Arbeit die Boolesche Algebra und seine Begriffsschrift mit der arithmetischen Formelsprache. Nach dem Hinweis darauf, daß die Arithmetik im weitesten Sinne Begriffe von einer Feinheit der inneren Gliederung bildet, wie sie in anderen Wissenschaften kaum vorkommen dürften, daß sie Urteile fälle, die von bloßen Gleichungen und Ungleichungen verschieden sind, daß eine natürliche Sprache für sie nicht ausreiche, führt er aus: »Der Grund dieser Unfähigkeit, der wissenschaftlichen Begriffsbildung zu folgen, liegt [Anmerkung Freges: bei der arithmetischen Formelsprache – L. K.] in dem Mangel eines der beiden Teile, aus denen jede ausgebildetere Sprache bestehen muß. Man kann nämlich den formalen Teil, der in den Wortsprachen aus Endungen, Praefixen und Suffixen und Formwörtern besteht, von dem eigentlich inhaltlichen unterscheiden. Die Zeichen der Arithmetik entsprechen den letzteren. Was noch fehlt, das ist der logische Mörtel, durch den diese Bausteine fest miteinander verbunden werden können. Diesen vertrat bisher die Wortsprache und konnte daher nicht nur in den für die strenge Schlußfolge unwesentlichen Teilen, die nur die Auffassung des Zusammenhanges erleichtern sollen, sondern auch im Beweise selbst nicht entbehrt werden. Booles symbolische Logik dagegen stellt nur den formalen Teil der Sprache und auch diesen nicht vollständig dar. Booles Formelsprache und die arithmetische lösen demnach je nur einen Teil der Aufgabe einer Begriffsschrift. Es ergab sich hieraus die Aufgabe, Zeichen für die logischen Beziehungen aufzustellen, die geeignet sind, mit der mathematischen Formelsprache zu verschmelzen und so eine für ein gewisses Gebiet wenigstens vollständige Begriffsschrift zu bilden. Das ist die Stelle, wo meine kleine Schrift einsetzt.« (Ebd., S. 14 f.)

[3] Theorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung, Leipzig 1867.

[4] Die Wissenschaftslehre oder Philosophie, zweiter Ergänzungsteil. Die Formenlehre, Stettin 1872. Grassmann, Hermann: Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten, Berlin 1861.

[5] Damit soll nicht ausgeschlossen sein, daß sich in den Werken anderer Mathematiker, wie z. B. bei Bernhard Riemann, Überlegungen zum Zahlbegriff und zum Aufbau der Mathematik finden lassen.

Wollte man Robert Grassmanns »Größenlehre« als den allgemeinen Zweig der Formenlehre oder der Mathematik in einen systematischen Zusammenhang zum heutigen Theorienbestand der Mathematik bringen, so wäre sie der Algebra und hier genauer in die Theorie der Ringe und Körper einzuordnen. Das zeigt schon einen wesentlichen Unterschied zur Algebra der Logik an, deren Gegenstände Verbände sind, d. h. algebraische Strukturen mit zwar auch zwei Verknüpfungen, für die aber die Absorptionsgesetze gelten.

Die »Größenlehre« von Robert Grassmann ist hier und nachfolgend herausgehoben, weil sie nicht nur der »Begriffsschrift« zeitlich, sondern auch in ihrer logischen Darstellung der reinen Mathematik am nächsten steht. Das hier verfolgte und zunächst zu erläuternde Anliegen ist eine auf den Zweck der Begriffsschrift bezogene Spiegelung ihres Inhaltes an der Grassmannschen Größenlehre.

Wie aus Freges Vorwort zur seiner »Begriffsschrift« zu entnehmen ist, hatte er sich die Frage gestellt, wie weit man den deduktiven Aufbau der Arithmetik in ihre Voraussetzungen hinein verfolgen kann. Er schreibt: »Der Gang war hierbei dieser, daß ich zuerst den Begriff der Anordnung in einer Reihe auf die *logische* Folge zurückzuführen suchte, um von hier aus zum Zahlbegriff fortzuschreiten.«[6]

Das klingt so, als müsse man genau so vorgehen, als könne es ganz offensichtlich naturgemäß auch gar nicht anders sein.

Wie kam Frege auf einen so bestimmt vorgetragenen Lösungsweg? Letztlich freilich ist das seine Idee gewesen und es führt zu bloßer Spekulation, ihrer ganz individuellen, sich in Freges Kopf allein abspielenden Entstehung nachgehen zu wollen. Da Frege 1925 verstorben ist, käme man mit einer solchen Frage ohnehin zu spät.

Wenn man aber einen literarisch verbürgten Ausgangspunkt seines Erkenntnisstandes und ein Frege zugängliches Werk als Bezugspunkt nimmt, so ist es schon zulässig, diese beiden objektiven Tatbestände durch die Frage aufeinander zu beziehen, ob in jenem zugänglichen Werk Probleme enthalten oder mit ihm verbunden sind, deren Bearbeitung mit der sanften Gewalt der Vernunft das Fregesche Erkennen – den durch das eigene Werk gesetzten Rahmenbedingungen gemäß – in die Richtung einer Begriffsschrift als seinem relativen Endpunkt drängen.

Diese logisch-hermeneutische Fragestellung, deren Ertrag wesentlich von dem Werk abhängt, das zur Spiegelung herangezogen wird, liegt auch dem nachfolgenden Abschnitt über die Leibniz-Tradition an der Universität Jena zugrunde. Auch da erfolgt eine Spiegelung der Leibnizschen Idee einer

[6] Frege, *BS*, S. X.

*logica nova* an den Werken von Persönlichkeiten, die innerhalb eines festgelegten Zeitraumes an der Jenaer Universität wirkten.

Auf den ersten Blick sieht die hier umrissene Verfahrensweise ziemlich willkürlich aus. Um ein solches Bedenken wenigstens zu mindern, seien noch einige allgemeine Bemerkungen über die mit der logisch-hermeneutischen Fragestellung verbundenen Methode ihrer Anwendung vorangestellt.

Ausgangspunkt, Bezugspunkt und Endpunkt sind bestimmt durch jeweils eine Menge nicht notwendig logisch durch eine Folgerungsrelation geordneter Aussagen. Sind alle drei Aussagenmengen gegeben, reduziert sich die Fragestellung darauf, ob die Aussagen dieser Mengen über vergleichbare Bereiche urteilen. Dabei ist ein Bereich festgelegt durch seine Objekte, ihre Eigenschaften und die zwischen ihnen vorausgesetzten Beziehungen.

Im einfachsten Fall können diese Bereiche identisch oder so beschaffen sein, daß zwischen ihnen ein Homomorphismus oder gar ein Isomorphismus besteht. In diesen Fällen spricht man dann sozusagen nur höchstens in verschiedenen Sprachen über ein und dieselbe Struktur. So spricht die an logischen Prinzipien orientierte *universelle Pasigraphie* einerseits und die *characteristica universalis* andererseits in jeweils nur anderer Ausdrucksweise über dasselbe – das machte sie vergleichbar.

Vergleichbarkeit setzt eine Gemeinsamkeit voraus. Es hängt ab von dem, was als das Gemeinsame bestimmt wird, ob der Vergleich mehr ist als nur eine Spielerei.

Ausgangspunkt und Bezugspunkt liegen als konstant gehaltene Aussagenmengen vor, zu bestimmen ist die den Endpunkt charakterisierende Aussagenmenge, also die Begriffsschrift. Die Lösung darf von Bemerkungen Freges über ihn anregende Fragen Gebrauch machen, nicht aber von der Begriffsschrift selber. Die Spiegelung ist also so vorzunehmen, daß vom Ausgangspunkt ausgehend sich möglichst viele der tragenden Ideen der Begriffsschrift ergeben.

Ob und wieweit das gelingt, hängt vom gewählten Bezugspunkt ab. Selbst dann, wenn sich dabei Ideen und Aufbau der Begriffsschrift ergeben, kann man jedoch nicht deduzieren, Frege sei genau so vorgegangen. Wir finden *unser* Verstehen, das nicht notwendig der Weg des Erkennens bei Frege gewesen sein mußte. Es wird deshalb hier von einer *hermeneutischen* Fragestellung gesprochen.

Bis auf ein faktengetreues hermeneutisches Verstehen werden wir es im historischen Erkennen wohl auch nicht bringen.

Der Fragestellung gemäß, die hier nicht erfunden, sondern längst allgemein praktiziert wird, wird hier als der literarisch verbürgte Ausgangspunkt des Fregeschen Erkenntnisstandes seine 1874 vorgelegte Habilitationsschrift bestimmt. Als Bezugspunkt wird aus den oben genannten Gründen

Robert Grassmanns »Wissenschaftslehre« gewählt. Frege und Robert Grassmann ist gemeinsam der Bezug auf die Menge der mathematischen Aussagen und ihrer Beweiszusammenhänge.[7]

Vom 27. 11. 1879 bis zum 23. 7. 1880 hat sich Frege aus der Universitätsbibliothek Jena Robert Grassmanns Wissenschaftslehre, Bd. I und Bd. II ausgeliehen, was nicht heißen muß, daß er diese Arbeiten erst zu diesem Zeitpunkt zur Kenntnis nahm.[8] Es ist nicht auszuschließen, daß er in Reaktion auf die Rezensionen seiner »Begriffsschrift« nochmals nachgelesen hat, ihm die betreffenden Bücher zunächst also auf andere Weise, etwa aus der Privatbibliothek von Ernst Abbe, zur Verfügung standen.[9]

Eine kurze Übersicht über die »Formenlehre« dürfte angebracht sein.

Die Bände der »Formenlehre« sind als Handbücher für den Mathematikunterricht an Gymnasien gedacht. Das jeweilige Wissensgebiet wird deduktiv entwickelt. Die Reihenfolge der Bände ist festgelegt durch das methodologische Prinzip, daß Theoreme, die mehreren Wissensgebieten gemeinsam sind, nicht mehrfach, sondern diesen Gebieten voraufgehend zu beweisen sind. Daraus ergibt sich für Grassmann (es ist nachfolgend, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, immer Robert Grassmann gemeint), daß die sich in allen Zweigen der Mathematik wiederfindenden Theoreme ihnen als erster Teil der Mathematik, »Größenlehre« genannt, voranzustellen sind. Es ist Grassmanns Entdeckung gewesen, daß sich diese Menge allgemeiner Theoreme zu einer deduktiv aufgebauten Theorie fügt.

Zweitens ist die Zugehörigkeit als Zweig der Mathematik festgelegt durch die Frage danach, was bei Knüpfung von zwei gleichen Elementen entsteht, d. h. ob e geknüpft mit e gleich oder ungleich e ist. In Vorgriff auf die Definitionen versteht Grassmann dabei unter einem Element eine Größe, die nicht selber durch Knüpfung zweier Größen entstanden ist.

[7] Einige biographische Bemerkungen noch zu Robert Grassmann, aber auch zu seinem Bruder, Hermann Grassmann, der den Philologen besonders durch seine Übersetzung des Rigveda und dem sechsbändige Wörterbuch dazu (erschienen zwischen 1873 und 1875) bekannt ist. Robert Grassmann (1815–1901) und Hermann Günther Grassmann (1809–1877) wurden in Stettin geboren und haben dort auch die meiste Zeit ihres Lebens verbracht. Ihr Vater, Justus Günther Grassmann, war Mathematiker, Physiker und Philologe, Talente, die bei seinen Söhnen in vollkommener Weise sich wiederholten. 1872 erschien in Robert Grassmanns Stettiner Selbstverlag seine »Formenlehre oder Mathematik« als Band I in einer fünfbändigen Reihe: Die Wissenschaftslehre oder Philosophie. Auf diesen und den im gleichen Jahr erschienen Band II »Begriffslehre oder Logik«, wird nachfolgend Bezug genommen.

[8] Vgl. zu den Ausleihen Freges aus der Jenaer Universitätsbibliothek bis 1884: Kreiser, Lothar: Freges »Grundlagen der Arithmetik«, in: Frege-Conference 1984, Mathematische Forschung, Bd. 20, herausgegeben von G. Wechsung, Berlin 1984, S. 13–27.

[9] Es konnte noch nicht festgestellt werden, wann die Jenaer Universitätsbibliothek diese beiden Bände erworben hat.

Bei zwei verschiedenen Knüpfungen, Addition und Multiplikation genannt, gibt es vier Kombinationen:

$$e + e = e$$
$$ee = e;$$

nach Grassmann die zur Größenlehre hinzutretenden spezifischen Gesetze der Begriffslehre oder der Logik.

$$e + e = e$$
$$ee \neq e;$$

nach Grassmann Gesetze, die zur Größenlehre hinzugenommen, in die Kombinatorik führen.

$$e + e \neq e$$
$$ee = e;$$

nach Grassmann beruht auf diesen Gesetzen und denen der Größenlehre die Arithmetik.

$$e + e \neq e$$
$$ee \neq e;$$

zusammen mit der Größenlehre die Ausdehnungslehre oder, wie man heute sagt, die Vektorrechnung.[10]

Von »Zweigen« zu sprechen und nicht z. B. von »Aufbaustufen«, d. h. einer Folge aufeinander aufbauender Theorien, rührt daher, daß die betreffenden Theorien Spezialfälle der Größenlehre sind. Durchbrochen wird das nur durch die Begriffslehre (Logik). Sie stellt Beweisverfahren zur Verfügung, die in den übrigen drei Zweigen, nicht aber in der Größenlehre Verwendung finden. Die Begriffslehre ist ein aus der Größenlehre folgender Zweig der Mathematik. Größenlehre muß also ohne Logik auskommen: »Glücklicher Weise bedürfen wir aber auch des begrifflichen oder logischen Schlusses gar nicht für unsre Beweise der Größenlehre. In dem begrifflichen Schlusse wird nämlich nur von einem Begriffe, der weiter ist, auf einen Begriff geschlossen, der ihm untergeordnet oder enger ist. Bei den Beweisen der Größenlehre dagegen haben wir es nicht mit untergeordneten, sondern allein mit gleichen oder ungleichen Größen zu tun.«[11]

Logik ist für Grassmann das subsumtive (unterordnende) Schließen der Aristotelischen Syllogistik.[12] In der Größenlehre wird aus Identität auf Iden-

[10] R. Grassmann verweist hier auf seinen Bruder, der diese Theorie 1844 im Grundsatz entworfen hat und in einer weiterentwickelten Fassung 1862 nochmals publizierte. Hans Wußing ist in seinem Buch »Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes« (1969) ausführlich und informativ auf diese Arbeiten eingegangen.

[11] Die Größenlehre. Erstes Buch der Formenlehre oder Mathematik, Stettin 1872, S. 19.

[12] R. Grassmann zitiert G. Boole nicht, auch nicht im Zusammenhang mit der Logik von

tität geschlossen. Einen dazu passenden Kalkül würde man also »Identitätskalkül« nennen dürfen, der nicht zur Logik gehört. Alle Beweise sind in Formeln zu führen, wobei eine Formel eine Knüpfung von Größen ist.[13] Der Aufbau der Größenlehre schließt die Schaffung einer solchen Formelsprache ein. Sie kann nicht in einer natürlichen Sprache entwickelt werden, denn die Wörter dieser Sprache sind mehrdeutig. Die Exaktheit der Größenlehre beruht aber auch auf der Eindeutigkeit ihrer verwendeten Ausdrücke. Grassmann ist mit eindeutigen Bezeichnungen zufrieden.

Größenlehre ist Theorie der Verknüpfung von Größen.[14] »Größe« und »Verknüpfung« sind die beiden tragenden Begriffe. Was ist Größe? »*Größe* heißt jedes, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann, sofern es nur einen und nicht mehrere Werte hat.«[15]

Grassmann definiert nicht, was man unter »Wert« zu verstehen habe. Die von ihm angegebenen Beispiele von Wörtern, die, weil sie mehrdeutig sind, keine Größen zum Gegenstand haben, lassen aber erkennen, daß genau einen Wert zu haben bedeutet, genau einen Gegenstand zu bezeichnen, der *unveränderlich* ist. So bezeichnet »der Meißner Dom« zwar genau einen, aber keinen unveränderlichen Gegenstand. Eine Größe ist ein *gesetzter* Gegenstand, denn Unveränderlichkeit findet sich in der Erfahrung nicht. Größe ist gesetzter *Gegenstand.* Das steht im Gegensatz zu Freges Meinung, derzufolge *Größe* ein Begriff ist. Eine Größe messen heißt für Frege erstens festzustellen, ob ein Ding unter den betreffenden Größenbegriff fällt und zweitens, mit welcher Summe von Einheiten dieser Größe das Ding identisch ist. Der Gegensatz, wenn Vermittlung nicht gewollt ist, und Frege hat nie vermitteln wollen, schärft den Blick über die Schwächen der anderen Position auf das selbst Gewollte.

Größe ist ein Ding besonderer Art, ein jenseitiges Ding. Aus der Größenlehre geht die Arithmetik hervor. Arithmetik ist auf diesseitige Dinge anwendbar. Ohne Wahrheitsverlust kann für das jenseitige Ding ein diesseitiges Ding eingesetzt werden. Zwei Äpfel zu weiteren zwei Äpfeln addiert, sind vier Äpfel, gleichgültig, ob sie morgen verfault sind oder nicht. Grassmann gibt für die »weltliche Gültigkeit« von 2 + 2 = 4 keine Erklärung. Größe fest-

G. W. Leibniz. Was er aber versucht, ist auch nichts anderes, als die Syllogistik in Form einer algebraischen Gleichungslehre darzustellen. Aufgrund der Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert hing diese Idee überall da sozusagen zum Greifen in der Luft, wo das Forschungsinteresse mehr auf der Analyse algebraischer Strukturen lag.

[13] Ebd., S. 28.

[14] Ebd., S. 7 bzw. S. 26.

[15] H. Grassmann hat in seinem »Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten« unter Größe ein Ding verstanden, das gleich oder ungleich einem anderen gesetzt wird (S. 1). Dieser Definition zufolge ist jedes Ding ein Gegenstand.

stellen heißt dagegen nach Frege im ersten Schritt einem Begriff subsumieren – also muß Zahl Begriffen von Dingen als Eigenschaft eigen sein.

»Von der Mathematik ging ich aus. In dieser Wissenschaft schien mir die dringlichste Aufgabe in einer besseren Grundlegung zu bestehen. Bald erkannte ich, dass die Zahl nicht ein Haufe, eine Reihe von Dingen ist, auch nicht eine Eigenschaft eines Haufens, sondern dass die Zahlangabe, die auf Grund einer Zählung gemacht wird, eine Aussage von einem Begriffe enthält (Plato, Hippias d. Gr.).«[16]

Wie das nun im Einzelnen auch zu fassen ist, Frege benötigt ganz unabhängig von der Aufgabe der feststellbaren Lückenlosigkeit eines Beweises Ausdrucksmittel für Dinge, Begriffe und Eigenschaften von Begriffen.[17]

Größenlehre ist Theorie der Knüpfung von Größen. Was ist eine Knüpfung? »*Knüpfung* von Größen heißt eine jede Zusammenstellung oder Verbindung von Größen, welche dem Geiste des Menschen möglich ist, sofern sie nur einen und nicht mehr Werte hat.«[18]

Das Gleichheitszeichen bezeichnet nach Grassmann ebenso wie das Zeichen für die Ungleichheit eine Knüpfung. Die Knüpfung zweier Größen durch das Gleichheitszeichen heißt eine Gleichung.[19] Zwei Größen heißen gleich genau dann, wenn in jeder Knüpfung der Größenlehre die eine gegen die andere ersetzt werden kann, ohne daß sich der Wert der Knüpfung ändert. Zwei Größen nennt Grassmann ungleich, wenn es keine Knüpfung der Größenlehre gibt, in der wechselweise Substitution nicht zu Wertänderung der Knüpfung führt. Frege sagt in seiner Habilitationsschrift: »Wenn wir in jedem Falle beurteilen können, wann Gegenstände in einer Eigenschaft übereinstimmen, so haben wir offenbar den richtigen Begriff der Eigenschaft.«[20]

Wann haben wir demzufolge nicht den richtigen Begriff der Eigenschaft? Wenn wir in mindestens einem Fall von einem Gegenstand nicht beurteilen können, ob er mit einem anderem in einer Eigenschaft übereinstimmt. Nach Grassmann müßte es aber heißen, daß von keinem Gegenstand beurteilt werden kann, ob er mit einem anderen in einer Eigenschaft übereinstimmt. Beide verstehen unter Negation nicht dasselbe. Was bezeichnet Grassmann als »Negation«?

[16] Frege, *NSchr I,* S. 273.

[17] Daß die Definitionen von Größe und Verknüpfung innerhalb der Grassmannschen Größenlehre zu Schwierigkeiten führen, dürfte Frege als zusätzliche Stütze seines Standpunktes empfunden haben, der zumindest in die hier skizzierte Richtung weisend ausgehend von seiner Habilitationsschrift angenommen werden kann.

[18] Ebd., S. 26.

[19] Ebd., S. 27.

[20] Rechnungsmethoden, a. a. O., S. 2.

In seiner »Begriffslehre« wird die Negation als Begriffsnegation eingeführt und mit der Komplementbildung gleichgesetzt.[21] »Nicht-Mensch« bezeichnet demzufolge die Menge aller Gegenstände, die keine Menschen sind. Das Komplement von »knüpfungsgleich« ist die Menge alles dessen, was nicht knüpfungsgleich ist. »a ist nicht knüpfungsgleich mit b« bedeutet demzufolge, daß a und b außerhalb der Menge des Knüpfungsgleichen liegen, es also keine Knüpfung gibt, bei der sie gleich sind. Das ist in sich konsequent gedacht und führt innerhalb der Aristotelischen Syllogistik auch nicht zu Widersprüchen. Der Begriff von Negation, der Frege vorschwebt, läßt sich auf diese Weise nicht fassen. Frege ist umso mehr gezwungen, über Negation nachzudenken, da ihm schon rein empirisch aus der mathematischen Praxis der Beweisführung auch die Negation zusammengesetzter Aussagen gegeben ist. Was hilft ihm da eine Negation, die für Begriffe, aber nicht für Aussagen erklärt ist? Wie im Einzelnen auch durchgeführt, man erwartet von Frege eine explizite Erklärung der Negation.

Bleiben wir noch bei der Zusammensetzung von Aussagen. Nach Grassmann sind in der Logik die Begriffe die betrachteten Größen. Die Knüpfung »+« ist das Zufügen eines Begriffes (Merkmales) zu einem Begriff und wird gelesen als »und«. Diese Erklärung wird nicht durchgehalten. In der Gleichung 36 steht das Zeichen »+« zwischen Gleichungen: $[a < u] + [a' < u'] = [a = u]$. (»$x < y$« bedeutet: der Begriffsumfang x eines Begriffes ist Teilmenge des Begriffsumfangs y eines Begriffes.) Die Knüpfung und die Gleichung haben genau einen Wert. Wenn dieser Wert eine Größe, in unserem Fall ein Begriff ist, besteht Einstimmigkeit mit der Erklärung. Welcher Begriff aber ist dieser Wert? Hier ist Grassmanns Erklärung lückenhaft. Da zumindest feststeht, daß Aussagen nicht wie Begriffe behandelt werden können, wird man von Frege eine Antwort darauf erwarten können, welches der Wert einer Aussage ist, falls er gleich Grassmann dem umfangslogischen Ansatz folgt.

Das erste Theorem der Größenlehre, $a = a$, beweist Grassmann durch Rückgriff auf die Definition der Gleichheit zweier Größen. Welches der Wert dieser Gleichung ist, sagt er, wie nach dem voraufgehenden auch zu erwarten, nicht.

Das folgende zu beweisende Theorem lautet: $(a = b) = (b = a)$ – die Symmetrie der Gleichheit.[22]

[21] Die Begriffslehre oder die Logik. Zweites Buch der Formenlehre oder der Mathematik, a. a. O., S. 15.

[22] Ich lasse den Beweis des ersten Theorems aus, obwohl gerade er es ist, der darauf führt, daß der deduktive Aufbau der Größenlehre nicht mit Definitionen, sondern mit Axiomen beginnen muß. Die für die Prädikatenlogik erforderlichen Axiome gewinnt Frege noch im Abschnitt I seiner »Begriffsschrift«; der zweite Abschnitt ist dann der Ableitung logischer Theoreme gewidmet.

Der in Worten geführte Beweis geht bei Grassmann so:

Sind zwei Größen gleich, dann kann man der Definition von Gleichheit zufolge in jeder Knüpfung die eine durch die andere ohne Wertänderung der Gleichung ersetzen; (a = b) ist eine solche Knüpfung, also kann man

a durch b
b durch a

ersetzen und erhält: (b = a).
Wie aber kommt die *Gleichung* beider Gleichungen, also: (a = b) = (b = a), zustande?

Dazu muß die Definition der Gleichheit mehr leisten, als ihr Wortlaut hergibt, sie fungiert nämlich zugleich als Ersetzbarkeitsregel für identische Ausdrücke:

Wenn H und ($H_1 = H_2$) wahre Formeln sind, so ist auch die Formel $H'$ wahr, die aus H dadurch entsteht, daß $H_1$ bzw. $H_2$ an einer Stelle, mehreren oder allen Stellen seines Vorkommens in H durch $H_2$ bzw. $H_1$ ersetzt wird *und es ist wahr: (H = H′ ).*[23]

Diese letzte Aussage der Ersetzbarkeitsregel fehlt in der Definition der Gleichheit.

Setzt man, wie geschehen, in der Ersetzbarkeitsregel das H mit dem ($H_1 = H_2$) gleich, dann kann gemäß dieser Regel übergegangen werden zu: (a = b) = (b = a).

Der in Formeln geführte Beweis geht bei Grassmann so:

$$(a = b) = (a = a) = (b = a).$$

Das ist zweimalige Anwendung der Ersetzbarkeitsregel in der eben genannten Weise. Das führt – in nur anderer Wiedergabe – zu:

$$[(a = b) = (a = a)] = (b = a).$$

Und wie bekommt man das (a = a) wieder aus dieser Gleichung heraus? Hier haben wir die obige Lücke in einer nur anderen Form.

Wandelt man die Gleichung um in: (a = a) = [(a = b) = (b = a)], wird sichtbar, daß nun noch die Abtrennungsregel erforderlich ist: Wenn $H_1$ und $H_1 = H_2$ wahr sind, dann ist auch $H_2$ wahr.

Darf man ohne diese Regel abtrennen, dann steht nichts im Wege, aus: Wenn (b = a), dann (a • a) = (a • b) zu schließen auf: (a • a) = (a • b). (»•« steht als Variablenzeichen für eine Knüpfung.) Diese Folgerung ist für die Größenlehre eine sicher unerwünschte Konsequenz, denn sie be-

[23] Die Definition setzt voraus, daß die Einsetzungsregel so definiert ist, daß eine Ersetzung in einer Formel, in welcher das zu ersetzende H nicht vorkommt, mit der ursprünglichen Formel gleich ist.

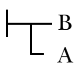
sagt, daß sich alle Knüpfungen reduzieren auf die einer Größe mit sich selbst.

Grassmann hat diese Lücke gespürt. Er definiert – allerdings erst im Anschluß an diesen Beweis – die *bedingte Gleichheit*: Bedingt gleich in bezug auf eine Bedingung heißen zwei Größen, sofern die Bedingung eintritt. Verstehen wir naheliegend das »eintreten« als »bewiesen«, so dürfen wir (a = a) abtrennen, jedoch (b = a) als eine bloße Annahme nicht.

Die Einführung der bedingten Gleichheit ist die Einführung einer neuen Beweisart in der Größenlehre, denn deren Beweisgang schreitet nun eben *nicht mehr allein* von Gleichung zu Gleichung fort. Die Größenlehre verlangt zu ihrem Aufbau bereits solche logischen Schlußregeln wie die Einsetzungs- und Abtrennungsregel. Seine Gleichsetzung des Logischen mit der Aristotelischen Syllogistik und, bei klassenlogischer Deutung, ihrer Entwicklung als Zweig der Größenlehre hat Grassmann offensichtlich dazu verleitet, das Vorhandensein von Logischem bereits in der Größenlehre zu übersehen.

Bislang ergaben sich aus der Spiegelung Problemstellungen mit gewissen Bedingungen für ihre Lösung für Frege. Hat Frege die Probleme aufgegriffen? Er hat sie aufgegriffen.

Sagt man, mit den Intentionen Grassmanns übereinstimmend, daß die Bedingtheit den Wert wahr hat, wenn ausgeschlossen ist, daß die Annahme zu bejahen, die Folgerung aber zu verneinen ist, ist man bei der Analyse der Bedingtheit im § 5 des ersten Abschnittes der »Begriffsschrift« von Frege. Dort wird die Bedingtheit (oder, wie man heute sagt, die Implikation) für diesen Wahrfall dargestellt durch:




Aus dieser Festsetzung und dem Wahrsein von A, dargestellt durch: $\vdash$A, erhält man, so Frege im § 6, die wahre Aussage B, dargestellt durch: $\vdash$B, und hat so die Bestandteile der Abtrennungsregel.[24]

Um den im Zusammenhang mit der Bedingtheit auftretenden Falschfall einer Aussage zu berücksichtigen, muß nunmehr festgesetzt werden, was unter der Verneinung oder der Negation einer Aussage zu verstehen ist. Das findet sich im § 7 der »Begriffsschrift«. Daß und wie weitere aussagenlogische Funktoren mit Hilfe der Bedingtheit und der Negation definiert werden können, wird ebenfalls im § 7 ausgeführt. Die Gesamtheit der auf Aussagen und ihre Knüpfungen bezogenen Untersuchungen gehören zur

[24] Die Regel insgesamt wird durch Untereinandersetzung der Teile und der Trennung von $\vdash$ B von den beiden anderen Teilen durch einen waagerechten Strich dargestellt.

Aussagenlogik. Zum Logischen der Größenlehre gehört also die Aussagenlogik. Sie ist eine Voraussetzung für ihren Aufbau.

Wenn Grassmann versucht hätte, eine formalisierte Sprache zu schaffen, wäre ihm diese Voraussetzung aufgefallen. Wie hatte doch Frege die Bildung seiner Begriffsschrift begründet? »Sie soll also zunächst dazu dienen, die Bündigkeit einer Schlußkette auf die sicherste Weise zu prüfen und jede Voraussetzung, die sich unbemerkt einschleichen will, anzuzeigen, damit letztere auf ihren Ursprung untersucht werden könne.«[25]

Will man bei der Sicherheit in der Beweisführung über Grassmann hinaus, bleibt eigentlich nur, sich ein formales Mittel zu ihrer Beschreibung zu verschaffen – und so steht denn auch seine Entwicklung als »lingua characteristica« unter Einschluß der Aussagenlogik am Anfang der Fregeschen Untersuchungen.

Nach dieser ersten problemauflösenden Spiegelung wieder zurück zu Grassmann.

Die von Frege entwickelte Aussagenlogik schließt durch die Einführung von »wahr« und »falsch« als zwei neue Werte eigentlich nur, was bei Grassmann Lücke ist. Die Aussagenlogik könnte man als Teil der Größenlehre verstehen. Setzen wir auch unter diesem Aspekt die Spiegelung fort.

Formel von a, in Zeichen: F(a), nennt Grassmann eine Formel, welche die Größe a (neben eventuell weiteren Größen) enthält.

Unter Rückgriff auf die Definition von Größe und Identität beweist Grassmann folgendes Theorem, Satz des fortleitenden oder induktorischen Größenbeweises genannt:

Annahme: $\mathrm{F}(a_1) = F(a_1)$, $[\mathrm{F}(a_m) = F(a_m)] = [\mathrm{F}(a_{m+1}) = F(a_{m+1})]$
Folgerung: $\mathrm{F}(a_n) = F(a_n)$

Beweis in Formeln:

Es ist $\mathrm{F}(a_1) = F(a_1)$ und $[\mathrm{F}(a_1) = F(a_1)] = [\mathrm{F}(a_2) = F(a_2)]$, dann: $\mathrm{F}(a_2) = F(a_2)$
Es ist $\mathrm{F}(a_2) = F(a_2)$ und $[\mathrm{F}(a_2) = F(a_2)] = [\mathrm{F}(a_3) = F(a_3)]$, dann: $\mathrm{F}(a_3) = F(a_3)$
usw.
Es ist $\mathrm{F}(a_{n-1}) = F(a_{n-1})$ und $[\mathrm{F}(a_{n-1}) = F(a_{n-1})] = [\mathrm{F}(a_n) = F(a_n)]$,
dann $\mathrm{F}(a_n) = F(a_n)$.

Bilden wir dazu ein Beispiel und sehen wir zu, wie weit uns das Theorem kommen läßt.

$\mathrm{F}(a_i)$ stehe für: $a_i$ hat $a_j$ einen Brief gegeben.
$F(a_i)$ stehe für: $a_j$ hat von $a_i$ einen Brief erhalten.

[25] Frege, *BS*, S. X.

Wenn $a_n$ ein so gebildeter Eigenname ist, daß er genau einen Wert hat, M die Menge aller dieser Eigennamen ist, so haben die beiden Verbindungen von $a_i$ und $a_j$ genau einen Wert, denn $a_i$ hat $a_j$ einen Brief gegeben oder nicht bzw. $a_j$ hat von $a_i$ einen Brief erhalten oder nicht. Per definitionem sind diese beiden Verbindungen also Knüpfungen.

Für den Wahrfall stehe das Zeichen »1«, für den Falschfall das Zeichen »0«. Man denke sich nun noch den Elementen von M eineindeutig eine natürliche Zahl als unteren Index zugeordnet.

Annahme 1: $\mathrm{F}(a_1) = F(a_1)$;
diese Annahme ist wahr, denn beide Gleichungsglieder haben zugleich entweder den Wert 1 oder den Wert 0.
Annahme 2: $[\mathrm{F}(a_m) = F(a_m)] = [\mathrm{F}a_{m+1}) = F(a_{m+1})]$;
auch diese Gleichung von Gleichungen ist wahr.
Folgerung: $\mathrm{F}(a_n) = F(a_n)$ ist wahr.

Daraus folgt nicht: Alle Größen aus M mit Ausnahme der letzten übergeben einen Brief und alle Größen aus M mit Ausnahme der ersten erhalten einen Brief.

Denn gesetzt den Fall $\mathrm{F}(a_1)$ ist wahr, dann ist zwar auch $F(a_1)$ wahr, aber daraus folgt nichts bezüglich der Wahrheit von $\mathrm{F}(a_2)$, $\mathrm{F}(a_3)$ usw.

In der hier bewiesenen Fassung von vollständiger Induktion fehlt etwas und offensichtlich ist das Fehlende eine Relation, die zwischen den Größen einer Reihe besteht und die Eigenschaft der Vererbung einer Eigenschaft von einer Größe der Reihe auf das nächste Reihenglied hat.

Gespiegelt an der Größenlehre erscheint der Gang der Untersuchung, wie weit man es mit logischem Schließen in der Arithmetik allein bringen kann, nun in der Tat wie selbstverständlich: Nach Frege muß der Begriff der Anordnung in einer Reihe definiert werden, es ist die Vererbung einer Eigenschaft in einer Reihe, das Folgen eines Reihengliedes auf ein solches zu definieren usw. Die Frage ist »nur«, ist *Reihe* ein arithmetischer oder ein logischer Begriff? Ist er ein logischer Begriff, dann greift die Größenlehre mit ihrer Verwendung von *Reihe* oder *Folge* auf etwas ihr Voraufgehendes zurück. Grassmanns eigener Aussage zufolge muß sie dann der Größenlehre voraufgehend behandelt werden. Da sie nur im Kontext der Logik, einschließlich der Aussagenlogik, definiert werden kann, heißt das, die Logik geht der Größenlehre vorauf.

Zunächst ist diese zweite problemauflösende Spiegelung eine bloße Vermutung, nur Hinweis auf eine Denkmöglichkeit, die noch ohne festen Boden ist. Immerhin aber enthält sie einen Wink auf die weitere Denkrichtung. Der Bezugspunkt, von dem aus die Spiegelung fortgesetzt wird, ist nun schon mehr als die Habilitationsschrift.

In den Gleichungen der Größenlehre (und ihrer Zweige) kommen Zeichen für Größen und für die zweistelligen Knüpfungen vor. Eine Knüpfung ist eine eindeutige Abbildung aus dem zweistelligen kartesischen Produkt der Menge der Größen in diese Menge. In der Größenlehre lassen sich auch alle mittels einer Operation definierbaren Relationen zwischen Größen einführen, wie z. B. die Größer-Relation. Dadurch erweitert sich ihr Formelreichtum. Sie bietet aber kein Mittel, um z. B. die Behauptung auszudrücken, daß es zu jeder Größe mindestens eine Größe gibt, die in der Größer-Relation auf sie folgt.

Grassmanns Begriffslehre hilft hier auch nicht weiter, denn sie beschränkt sich auf Begriffe. Indem R. Grassmann vom Begriff zu dessen Umfang übergeht, kann er die Mengeninklusion einführen. Mit ihr und dem Komplement einer Menge lassen sich alle in der Syllogistik vorkommenden Begriffsbeziehungen darstellen. Eine Subsumtion, das heißt das Fallen eines Gegenstandes unter einen Begriff, kann er jedoch mit diesen Mitteln nicht ausdrücken. »5 ist eine Primzahl« z. B. muß er als eine Mengenbeziehung darstellen: $\{5\} \subset a$, wobei »a« der Umfang des Begriffes *Primzahl* ist. Eine Menge mit einem Element ist etwas von diesem Element verschiedenes. Deshalb wird nichts über die *Zahl* 5, sondern etwas über die *Menge* mit dem Element 5 in der Mengeninklusion ausgesagt. Es fehlt also auch ein Zugriff auf die Gegenstände eines Bereichs. Die Größen- und Knüpfungszeichen sind Scheinvariable. In der Größenlehre und in den einzelnen Zweigen sind die Knüpfungszeichen jeweils mit einer zweistelligen Operation fest belegt. Die Größenzeichen bedeuten innerhalb eines Buchabschnittes stets eine beliebig wählbare, aber konstant gehaltene Größe. Die Allgemeinheit einer Formel resultiert dann aus der Beliebigkeit der Größenzuordnung.[26] Echte Variablen sind nur die Zeichen für eine Knüpfung.

Wie also kann auf Gegenstände Bezug genommen werden, oder, was ist logisch gesehen eine Subsumtion? Das ist für Frege ein Problem, wenn er an dieser Stelle eine Lücke in Grassmanns Begriffslehre sieht. Die Lösung des Problems steht unter der Bedingung, daß erstens der Zusammenhang mit der Aussagenlogik gewahrt bleibt, denn eine Subsumtion ist eine Aussage. Genauer besagt das: Kommt es nur auf das Wahr- oder Falschsein der Subsumtion an, muß sie aussagenlogischen Regeln unterstehen. Zweitens muß auch der Zusammenhang mit anderen Urteilsarten gewahrt werden. Auch für sie ist die genannte Lösungsbedingung zu beachten.

Subsumtion ist im einfachsten Fall das Behaupten des Fallens unter einen Begriff, z. B.: 5 ist eine Primzahl. Allgemeiner gefaßt ist die Subsumtion das Stehen von n Gegenständen in einer Beziehung, wie z. B.: 4 ist kleiner als 5.

[26] Die Größenlehre, a. a. O., S. 26.

Ersetzt man die Gegenstandsnamen durch Gegenstandsvariable, so geht die Subsumtion in eine n-stellige Aussagenfunktion über, die Ausdruck einer Beziehung für den Fall $n \geq 2$ und Ausdruck eines Begriffes für $n = 1$ ist. Werden nun umgekehrt für die n Gegenstandsvariablen Gegenstandsnamen eingesetzt (und nur solche Eigennamen sind als Argumente zulässig), so geht die Aussagenfunktion in eine wahre oder falsche Aussage über, je nachdem, ob die Gegenstände in der betreffenden Beziehung stehen oder der eine Gegenstand die betreffende Eigenschaft hat.

Die Festsetzung, nur solche Aussagefunktionen zu betrachten, deren Funktionswert für jedes zulässige Argument genau einer der beiden genannten Wahrheitswerte ist, bedingt die Zweiwertigkeit der aufzubauenden logischen Theorie.

Die zweite Urteilsart, die Frege findet, ist die Subordination.

Die Subordination ist – ebenfalls allgemein gesagt – die quantifizierte Einordnung einer n-stelligen Subsumtion in eine m-stellige Subsumtion mittels aussagenlogischer Quantoren.

So wird z. B.: Alle Primzahlen sind natürliche Zahlen, gelesen als: Wenn etwas eine Primzahl ist, dann ist es eine natürliche Zahl. Oder: Einige arithmetische Operationen sind kommutativ, wird gelesen als: Es gibt etwas, was eine arithmetische Operation ist und was kommutativ ist. Eine nichtquantifizierte Subordination ist eine aussagenlogische Verknüpfung zweier Subsumtionen, deren Variablen frei sein können (ungesättigte Aussagenfunktionen), oder teilweise bzw. insgesamt durch Eigennamen ersetzt sind. Eine Subsumtion, deren Variablen insgesamt durch Eigennamen ersetzt sind, nennt Frege eine gesättigte Aussagenfunktion. Eine Ausdrucksweise, die er auch auf andere Aussagenfunktionen erweitert.

Es kommt nach Frege noch eine dritte Urteilsart hinzu, die hier kurz als »Subalternation« bezeichnet werden soll, da Frege für sie keine besondere Bezeichnung verwendet hat: Die Aussage, daß ein Begriff oder eine Beziehung eine bestimmte Eigenschaft hat, z. B.: Es gibt mindestens eine Quadratwurzel aus 4.[27]

»Obgleich unser Satz den Begriff nicht als Subjekt erscheinen läßt, sagt er doch etwas von ihm aus. Man kann es so auffassen, als werde das Fallen eines Begriffes unter einen höheren ausgedrückt.«[28]

[27] Die Subalternation läßt den Unterschied zwischen dem Verständnis von »alle«, »einige«, »jeder« bei Frege als auf Begriffe bezogener Prädikate und einer heute üblichen als auf Gegenstände bezogener Quantoren besonders deutlich werden.

[28] Frege, *BG,* S. 74. In einer Anmerkung auf der gleichen Seite fügt Frege hinzu: »Ich habe in meinen Grundlagen einen solchen Begriff zweiter Ordnung und in meiner Schrift »Funktion und Begriff« zweiter Stufe genannt, was ich auch hier tun will.« In den »Grundlagen der Arithmetik« macht Frege ausdrücklich darauf aufmerksam: »Dies Verhältnis ist aber nicht mit dem der Unterordnung zu verwechseln.« (Ebd., S. 65).

Diese drei Urteilsarten sind nicht aufeinander reduzierbar; sie sind auch nicht auf eine allgemeinere Urteilsstruktur zurückführbar. Was aber ist das sie trotzdem verbindende Gemeinsame?

Man kann in Kenntnis der Fregeschen Lösung vom Problem ausgehend erklärende Zwischenschritte einfügen, die so nahe als möglich an die Lösung heranführen. Eine solche Verfahrensweise kann einem systematischen oder einem historischen Leitfaden folgen.

Der historische Leitfaden fragt nach vorliegenden, Frege zugänglichen Lösungsangeboten in der Literatur. Z. B. kann man sich die Frage stellen, ob Frege Hinweise aus Lotzes »Logik« entnommen hat.[29] Dem systematischen Leitfaden folgt die Werksanalyse, die in einem gegebenen Wissensstand Hinweise sucht, deren Befolgen auf einen neuen Erkenntnisstand Freges führt.

So oder so, es war letztlich Freges Idee, die drei Urteilsarten als *Funktionen* zu verstehen. Diese Idee zusammen mit ihrer Ausführung macht die nur als »genial« zu bezeichnende Leistung Freges aus und hat ihn zum Begründer einer neuen Entwicklungsperiode der Logik werden lassen.

Die Paragraphen 9 bis 12 seiner »Begriffsschrift« öffnen mit der Lösung des Problems das Tor zur Prädikatenlogik.

Der Funktionsbegriff der Prädikatenlogik ist nicht mehr der algebraische Funktionsbegriff der Habilitationsschrift. Er ist weiter gefaßt, oder nur anders gesagt: »Man sieht hieran besonders klar, daß der Funktionsbegriff der Analysis, dem ich mich im Allgemeinen angeschlossen habe, weit beschränkter ist als der hier entwickelte.«[30]

Frege ging vom mathematischen Funktionsbegriff aus, der historisch in zwei Richtungen eine Erweiterung erfahren hatte: Erstens dadurch, daß immer mehr Rechenoperationen einbezogen worden sind, und zweitens dadurch, daß der Kreis dessen, was Argument- und was Funktionswert ist, erweitert worden ist. Frege hatte ja in seiner Habilitationsschrift auch einen Beitrag zur Erweiterung des mathematischen Funktionsbegriffes (als einer eindeutigen Abbildung der Menge der Argumentwerte auf die Menge der Funktionswerte) geleistet. In seiner »Begriffsschrift« schritt er in beiden Richtungen weiter fort.

[29] Ein Beispiel für dieses Vorgehen ist die Einleitung von G. Gabriel in die von ihm besorgte Ausgabe von Hermann Lotzes »Logik. 1. Buch. Vom Denken«, Hamburg 1989. Falls Frege wirklich bei H. Lotze eine Logik-Vorlesung gehört haben sollte, kann man mit fast allem, was G. Gabriel an Einflüssen findet, einverstanden sein. Das gilt auch für den Fall, daß Frege zwar eine solche Vorlesung nicht besucht, aber in der Göttinger Zeit oder kurz danach das genannte Werk von H. Lotze gelesen hat. Von den Untersuchungen zum Funktionsbegriff ausgehend führt der Weg aber eher zu R. Grassmann als zu H. Lotze. Die Arbeit von H. Sluga: Gottlob Frege, London, Boston and Henley 1980, wird man auch unter diese Verfahrensweise subsumieren können.

[30] Frege, *BS*, S. 19.

Durch die Auffassung eines Begriffs als einer einstelligen Funktion wird der Umkreis dessen, was eine Funktion ist, über die Mathematik hinaus erweitert. Dadurch, daß die Argumente eines Begriffes beliebige Gegenstände sind, wird das, was Argument sein kann, zusammen mit dem, was Funktionswert sein kann, über den Bereich der Zahlen hinaus ausgedehnt: »Wenn wir so Gegenstände ohne Einschränkung als Argumente und als Funktionswerte zugelassen haben, so fragt es sich nun, was hier Gegenstand genannt wird. Eine schulmäßige Definition halte ich für unmöglich, weil wir hier etwas haben, was wegen seiner Einfachheit eine logische Zerlegung nicht zuläßt. Es ist nur möglich, auf das hinzudeuten, was gemeint ist. Hier kann nur kurz gesagt werden: Gegenstand ist alles, was nicht Funktion ist, dessen Ausdruck also keine leere Stelle mit sich führt.«[31]

Daß logisch gesehen Aussagen gesättigte Funktionsausdrücke sind, ist noch nicht die vollständige Lösung. Noch immer ist offen, welchen Umfang der einer Gegenstandsvariablen zugeordnete Wertebereich hat. Im einfachsten, bei Grassmann vorkommenden Fall setzt man für die Gegenstandsvariable einen Gegenstandsnamen aus einem für alle Gegenstandsvariablen gleichen Wertebereich ein. Frege spaltet den Zugriff auf die Gegenstände dadurch auf, daß er jede Gegenstandsvariable in einer Aussagenfunktion quantifiziert: für alle zulässigen Werte oder nicht für alle zulässigen Werte. Diese Quantifizierung wird angezeigt durch den Allquantifikator; mit dessen Hilfe und der Negation ist der Existenzquantifikator definierbar. Damit ist die vollständige Lösung des Problems der Einbeziehung aller drei Aussagenarten erreicht.

Es war zu erwarten, daß Frege die Arten der Allaussagen und der partikulären Aussagen prädikatenlogisch darstellt und die Ableitbarkeit gültiger Modi der aristotelischen Syllogistik aus seinem Axiomensystem zeigt. Der zweite Abschnitt seiner »Begriffsschrift« ist der Ableitung von Theoremen aus logischen Axiomen gewidmet.

Bezieht man dieses Resultat auf die Formenlehre, so kann die Aussage, daß die Aussagenlogik der Größenlehre und ihren Zweigen voraufgeht, verstärkt werden: Die Logik ist kein Zweig der Mathematik, sondern sie geht ihr vorauf. »Voraufgehen« kann dabei meinen, Logik findet unter anderem auch in der Mathematik Anwendung; mit diesem Terminus kann aber auch gemeint sein, daß ein Deduktionszusammenhang im Sinne Grassmanns besteht, die reine Mathematik also ein Zweig der Logik ist. Frege spricht die letztere Version nicht direkt aus, läßt aber keinen Zweifel, daß er genau in dieser Richtung fortzuschreiten beabsichtige.

[31] Frege, Gottlob: Funktion und Begriff, in: Patzig (1), S. 29 f., außerdem in: Angelelli, S. 134.

Im dritten, dem letzten Abschnitt seiner »Begriffsschrift« beginnt er nämlich, Schwierigkeiten, die sich seinem logizistischen Programm entgegenstellen, zu beheben. Die für Frege noch offene Frage, ob der Begriff *Reihe* zu definieren ist als arithmetischer oder als logischer, ist damit beantwortet: Es ist die »Anordnung in einer Reihe auf die *logische* Folge zurückzuführen«. Diese Aufgabenstellung erzwingt nun auch die Einbeziehung der Subalternation und damit den Aufbau der zweistufigen Prädikaten – oder Funktionenlogik: Variable für Gegenstände (erster Stufe) und Variable für Begriffe und Beziehungen (zweiter Stufe). Im III. Teil der »Begriffsschrift« (§§ 23–31) zeigt Frege, daß der Begriff einer unendlichen, nichtverzweigenden Reihe ein logischer Begriff ist. Ebenso läßt sich die Nachfolgerrelation in dieser Reihe und die vollständige Induktion unter Verwendung nur logischer Begriffe definieren. Damit ist die Entscheidung gegen Grassmann gefallen.

Was läßt sich nunmehr, da die Aussagenmenge des Endpunktes, die Begriffsschrift, erreicht ist, als Fazit festhalten? Man kann verstehen, daß der Weg des Erkennens bei Frege so gewesen sein konnte und es besteht kein Zweifel, daß dieser Weg vom Ausgangspunkt zum Endpunkt aus seiner Sicht so gegangen werden mußte. Vereinfacht gesagt: Die Lücken in Grassmanns Argumentation sind die Themen Freges.

Aus der Perspektive der Geschichte der Logik markiert die Begriffsschrift den Beginn einer neuen Epoche in der Erkenntnis des Logischen. Der wesentliche Grund für diese Auszeichnung ist, daß sich voraufgehende Bestrebungen, wie z. B. Bolzanos große »Wissenschaftslehre«, oder zeitgenössische Untersuchungen, wie vor allem die Algebra der Logik, in dem, was sie aus heutiger Sicht für die Entwicklung der logischer Erkenntnis beigetragen haben, sich erst vollständig aus der Sicht der Begriffsschrift, der Prädikatenlogik (2. Stufe mit Identität) beurteilen und einordnen lassen, und nicht umgekehrt. Die Quantorenlogik leistet eben mehr als die reine Identitätslogik. Hinzu kommt, Frege hat nicht bloß die Idee der Prädikatenlogik, sondern schafft zugleich ein System von ihr, das mit einer ausdrucksreichen Sprache auch ein widerspruchsfreies Axiomensystem (einschließlich Schlußregeln) enthält. Der Fortschritt besteht in der Vervollkommnung dieses Systems durch Weiterführung der bei Frege angelegten Unterscheidung von Syntax und Semantik in Richtung auf Kalkül und Interpretation, seiner Ergänzung durch Entscheidungsverfahren, die auf die Theorie der berechenbaren Funktionen führte, durch Formulierung und Lösung solcher metalogischer Fragen wie der von Arten der Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit des Axiomensystems. Wenn auch nicht ausgeführt, so ist bei Frege auch vieles von dem angelegt und nahtlos ergänzbar, was in der Folgezeit zur Prädikatenlogik hinzugekommen ist. Ein Beispiel sind Verfahren zur Entscheidung der Frage, ob ein bestimmter Ausdruck eine bestimmte (für Ausdrücke definierte) Eigenschaft besitzt. In der Entwicklung solcher Verfahren ging die Algebra der Logik der Prädikatenlogik voran. Andere Beispiele sind Wahrheitswertefunktionen als Bedeutungen aussagenlogischer Funktoren. Frege hat sich mit der wahrheitsfunktionalen Interpretation der Implikation (der Bedingtheit) und der Negation begnügt, da er sah, daß sich andere geläufige aussagenlogische Funktoren mit deren Hilfe definieren lassen.

Entscheidend bei alledem ist, daß sein Blick auf Logik ihr nicht als solcher galt, sondern in ihrer geforderten Leistung für den Aufbau der reinen Mathematik Freges Bearbeitung fand. Logik war nicht Ziel, sondern primär Instrument zur Lösung eines Problems: Kontrollierte Ableitung der Arithmetik (oder, wie man heute sagt: der auf Mengentheorie gründenden Mathematik) aus einer nur in Begriffen der Logik formulierten Menge von Axiomen.

In der traditionellen formalen Logik ebenfalls vorkommende Termini, wie *Begriff, Begriffsumfang, Eigenschaft, Merkmal, modus ponens* u. a. könnten darüber hinwegtäuschen, daß die von Frege geschaffene Prädikatenlogik keineswegs eine bloße Präzisierung der traditionellen formalen Logik ist. Sie ist ein neue logische Theorie, die mit der bisherigen logischen Theorie (mit der aristotelischen Syllogistik als ihrem Kernstück) bricht. Diese ist eine intensionale, jene eine extensionale Logik, wie an anderer Stelle noch ausgeführt wird.

Ganz auf das Ziel bezogen definiert Frege in der »Begriffsschrift« auf eine Folge bezogen Prädikate 2. Stufe wie »vererbt sich«, »folgt auf x«, oder Eigenschaften von Relationen, wie z. B. »nacheindeutig«, während andere, durchaus schon sichtbare Fragen, wie z. B. ob für freie Gegenstandsvariable Eigennamen von Gegenständen eingesetzt, oder ihnen Gegenstände zuzuordnen sind, nicht weiter verfolgt werden. Es hat wohl auch mit der Zielstellung zu tun, daß Frege mit dem universe of discourse verbundene Schwierigkeiten, die E. Schröder schon bemerkte, in einem anderen Licht sah und daher auch die Folgen für sein Axiomensystem übersah.

### *3.2 Pasigraphie und Begriffsschrift*

Die Spiegelung an Bänden der Grassmannschen »Formenlehre« führt bei Frege genau zu jener Hervorhebung des Abstrakt-Logischen, die er selbst als einen Nachteil für das Verständnis seiner »Begriffsschrift« angesehen hatte. Dieser Eindruck wird durch die von ihm entworfene Symbolik nicht gemindert. Im Gegenteil, angesichts ihrer Ungewöhnlichkeit hielt man sich ganz eng an das, was durch sie ausgedrückt wird. Zu zwei Drittel seines Buches ist das inhaltlich Ausgedrückte dem Logischen Zugehöriges, also verstand man