

Gabriele Gramelsberger

Operative Epistemologie

Gabriele Gramelsberger

Operative Epistemologie

(Re-)Organisation von
Anschauung und Erfahrung durch die
Formkraft der Mathematik

Meiner

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in
der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten
sind im Internet über <http://portal.dnb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-7873-3899-3
ISBN eBook 978-3-7873-3900-6

This electronic version has been made freely available under a
Creative Commons (CC-BY-NC-ND) licence. A copy of the licence can be
viewed at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0>.



Das Buch wurde gedruckt mit freundlicher Unterstützung der
RWTH Aachen.

© Felix Meiner Verlag, Hamburg 2020. Alle Rechte vorbehalten.
Dies gilt auch für Vervielfältigungen, Übertragungen, Mikroverfilmungen
und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen,
soweit es nicht §§ 53 und 54 UrhG ausdrücklich gestatten.
Umschlaggestaltung: Andrea Pieper, Hamburg. Satz: Jens-Sören Mann.
Druck und Bindung: Beltz, Bad Langensalza. Gedruckt auf
alterungsbeständigem Werkdruckpapier.
Printed in Germany.

Inhalt

Vorwort	9
Einleitung	11
Erkenntnisfrage	12
Anwendungsfrage	14
Medialitätsfrage	16
Operative Epistemologie	17

TEIL I OPERATIONALISIERUNG DER ERFAHRUNG

Kapitel 1 · Operationalisierung der Anschauung	21
Aristoteles' Axiomatisierungsprogramm	22
Mathematische Methode	27
Descartes Operationsmodell der Analyse	31
Kunstgriff des Formalen	34
Kapitel 2 · Sicherung des Erfahrungs begriffs	44
Kants Programm der Erfahrungssicherung	45
Funktion des Schematismus	50
Fundierung des empirisch Gegebenen	55
Eigentliche Wissenschaft	57
Kapitel 3 · Erkenntniskraft der Anschauung	66
Lockes synthetische Urteilstheorie	67
Leibniz' analytische Urteilstheorie	70
Demonstrative Urteile bei Locke und Leibniz	77
Kants synthetische Urteile a priori	82

Kapitel 4 · Kritik der Anschauung	88
Freges Kritik an Kant	88
Cassirers Verteidigung	96

TEIL II
VERLUST DER ANSCHAUUNG

Kapitel 5 · Verlust der mathematischen Anschauung	105
Blickrichtungen der euklidischen Geometrie	106
Projektionen geometrischer Gebilde	110
n-dimensionale Mannigfaltigkeiten	117
Transformationsgruppen in Mannigfaltigkeiten	125
Kapitel 6 · Entgrenzung der wissenschaftlichen Anschauung	135
Invarianz als neues Objektivitätskriterium	135
Nah- statt Fernwirkung	140
Apparative statt symbolischer Anschauung	149
Was ging verloren?	159
Kapitel 7 · Orientieren im Nicht-direkt-Erfahrbaren	162
Pythagoreische Analogien	162
Objektivität symbolischer Wirklichkeit	170
Formal-apperzeptive Bedingung der Invarianz	177

TEIL III
MATHEMATISCHE SPRACHPRAGMATIK

Kapitel 8 · Medialität der Mathematik	185
Symbolische Anschauung	186
Mathematik als Sprache	193
Operationslogik des mathematischen Sprechens	197

Kapitel 9 · Sprachlogik der modernen Mathematik	206
Inkonsistenzen des mathematischen Sprechens	206
Hilberts sprachpragmatische Wende	210
Berechenbarkeit als sprachpragmatische Präzisierung	218
Kapitel 10 · Berechenbarkeit und Anschauung	228
Berechenbarkeit als neues Anschauungsparadigma	228
Anschauung, Anschauungslosigkeit, Anschaulichkeit	234
Konvergenz als neues Objektivitätskriterium	240
Was zeigt sich?	249
 TEIL IV OPERATIVE EPISTEMOLOGIE	
Kapitel 11 · Ausgangsbedingungen der operativen Epistemologie	257
Frage nach der Anwendbarkeit der Mathematik	257
Frage nach der Wirklichkeit der Mathematik	266
Anschauung, Erfahrung und Operabilität	270
Kapitel 12 · Erkenntnisfortschritt durch Operationalisierung	278
Erkenntnisleitende Funktion der Mathematik	278
Prognostizität durch numerische Extrapolation	285
Prognostizität durch algebraische Permutation	290
Operationale (Re-)Organisation von Theorie	297
Kapitel 13 · Erkenntnisfortschritt durch Präzisierung	302
Apparative Anschauung	302
Mathematische Medialisierung der Empirie	307
Operationale (Re-)Organisation von Empirie	315
Operative Logik der mathematischen Formkraft	324

TEIL V
THEORIE DER OPERATIVEN EPISTEMOLOGIE

Kapitel 14 · Prognostische Erkenntnisgenerierung	333
Modi der Erkenntnisgenerierung	334
Schema der prognostischen Vergegenwärtigung	340
Grenzen der prognostischen Vergegenwärtigung	345
Kapitel 15 · Symbolisch-operative Logik	357
Logik der mathematischen Gleichsetzungsleistung	357
Tautologie, Geltung, Extensionalität	362
Autologie, Erkenntnis, Operativität	374
Kapitel 16 · (Re-)Organisation von Erfahrung	379
Möglichkeiten der operativen Epistemologie	379
Grenzen der operativen Epistemologie	383
Plastizität der Mathematik	390
Literaturverzeichnis	399

Vorwort

Das vorliegende Buch wäre ohne Unterstützung nicht möglich gewesen. Daher möchte ich mich bei Petra Gehring und Christoph Hubig für ihre tatkräftige Unterstützung in einer schwierigen Situation sowie bei Sybille Krämer und Bernd Mahr für ihre langjährige Begleitung bedanken. Leider ist Bernd Mahr 2015 viel zu früh verstorben und damit unsere Diskussion zum Zahlbegriff zum Erliegen gekommen. Peter Bexte, an dessen Lehrstuhl ich in der überwiegenden Zeit des Schreibens tätig war, möchte ich für die Gespräche wie auch seine Geduld danken, ebenso Claus Pias und Martin Warnke sowie Lorenz Engell und Bernhard Siegert für die Unterstützung mit Fellowships. Schließlich danke ich Gisela Bechen und Karl-Heinz Niedermeyer für die akribische und kritische Lektüre des Textes. Nach eingehender Diskussion habe ich mich entschlossen, die männliche Schreibweise für allgemeine Personenzuweisungen zu verwenden.

Einleitung

Im ersten Buch der *Metaphysik* amüsiert sich Aristoteles über die mathematischen Spekulationen der Pythagoreer, die nicht nur die Zahl als substantielles Wesen auffassen, sondern den gesamten Kosmos unter die von ihnen postulierte vollkommenste Zahl subsumieren. Diese vollkommene Zahl der Pythagoreer war die Zehn. »Aber weil lediglich neun [Planeten] sichtbar sind«, so Aristoteles, »erdachten sie sich als zehn die ›Gegenerde‹.«¹ Zweitausend Jahre später mokiert sich Galileo Gallei in einem Brief an Johannes Kepler über seine Kollegen, »labouring before the Grand Duke with logical arguments, as if with magical incantations, to charm the new planets out of the sky«.² Denn die von Galilei durch das Teleskop entdeckten Jupitermonde und die zerfurchte Oberfläche des Mondes passten nicht in die mathematische Perfektion der scholastischen Kosmologie idealer Planetenkugeln und kreisrunder Umlaufbahnen.³ Fast ein halbes Jahrtausend später streiten sich die Physiker darüber, ob die elegante Theorie der Supersymmetrie alles erklären kann oder ob die Natur nicht eher eine »ugly combination of superpartner particles« ist.⁴

Diese eigenwillige Allianz zwischen Mathematik, Naturspekulation und Ästhetik wirft Fragen nach den Konstellationsverhältnissen von Anschauung, Erfahrung und mathematischer Formkraft auf und damit nach dem Vermögen der angewandten Mathematik respektive ihrer operativen Epistemologie. Die Fragen betreffen zum einen das prekäre Verhältnis von Mathematik, Logik und Wirklichkeit und damit den Realitätsbezug wie die Objektivitätskriterien formaler Rationalität (Erkenntnisfrage), zum anderen thematisieren sie die Gestalt (Medialitätsfrage) wie die Gestaltungsmöglichkeiten des rein Formalen in Bezug auf Wissenschaft, Technik und Lebenswelt (Anwendungsfrage). Ist die Erkenntnisfrage eine mit langer Tradition in der Philosophie, so wird die Anwendungsfrage zu Beginn des 20. Jahrhunderts zur Rätselfrage. Die Medialitätsfrage hingegen ist eine ketzerische Frage, die die Idealität der Mathematik wie ihre vermeintliche Erkenntnissicherheit herausfordert.

¹ Aristoteles: *Metaphysik* (übersetzt und hrsg. von Franz F. Schwarz), Reclam: Stuttgart 1970, I. Buch (A), 986a.

² Michael Roberts: *The Modern Mind*, London: The Macmillan Company 1937, S. 5.

³ Vgl. Alexandre Koyné: *Von der geschlossenen Welt zum unendlichen Universum* (1957), Frankfurt: Suhrkamp 1969.

⁴ Natalie Wolchover: ›Supersymmetry Fails Test, Forcing Physics to Seek New Ideas‹, in: *Scientific American*, 29.11.2012.

Dreh- und Ausgangspunkt aller drei Fragen ist dabei Immanuel Kants Feststellung in der *Kritik der reinen Vernunft*, dass die Mathematik »vermittels einer symbolischen Konstruktion [...] dahin [reicht], wohin die diskursive Erkenntnis vermittels bloßer Begriffe niemals gelangen könnte«.⁵

Erkenntnisfrage

Die mathematische Form der Erkenntnis von der diskursiven Erkenntnis der Begriffe zu unterscheiden, differenziert einerseits den Vernunftgebrauch der Mathematiker von dem der Philosophen und führt andererseits in das Zentrum der philosophischen Diskussion über Mathematik in Form von Begriffs- und Urteilstheorien.⁶ Es ist Kants genuine Leistung, mathematische Urteile als synthetische Urteile a priori zu charakterisieren und sie von den analytischen Urteilen der diskursiven Erkenntnis und den synthetischen Urteilen der empirischen Erkenntnis zu unterscheiden. Die Motivation dafür ist dem programmatischen Anspruch seiner kritischen Philosophie geschuldet, gegenwärtige Entwicklungen zu reflektieren, und dies bedeutet zu seiner Zeit, das Objektivitätsverständnis der neuzeitlichen Wissenschaft philosophisch zu erfassen suchen. Kants Mathematikverständnis ist aus zwei Gründen von Interesse: wegen dessen Hybridität wie auch Operativität. Hybridität, da Kants Urteilstheorie eine dreistellige Ontologie von logischer Möglichkeit (Widerspruchsfreiheit), mathematischer und kategorialer Wirklichkeit (Begriff plus Anschauung a priori) sowie empirischer Realität (sinnliche Gegebenheit) aufspannt, in welcher der Mathematik eine wirklichkeitskonstituierende Funktion zugewiesen wird. Diese generiert sich aus der Amalgamierung von Begriff und Anschauung a priori und konstituiert so mathematische Begriffe in Form hybrider Wirklichkeitsbegriffe. Operativ-

⁵ Immanuel Kant: *Kritik der reinen Vernunft* (1781/1787) (hrsg. von Raymund Schmidt), Meiner: Hamburg 1993, B 745.

⁶ Kant kritisiert damit, die Mathematik als Methode des Philosophierens zu verwenden, wie dies von Platon über Gottfried Wilhelm Leibniz bis zu Kants Zeiten immer wieder diskutiert wurde und mit den Logizisten ab Ende des 19. Jahrhunderts dominant wird. Beispielsweise, wenn Bertrand Russell die philosophische Logik nach der mathematischen zu entwickeln sucht, in der Hoffnung, »daß die nahe Zukunft eine ebenso große Epoche der reinen Philosophie sein werde, wie die unmittelbare Vergangenheit eine der Prinzipien der Mathematik war«. Bertrand Russell: »Die Mathematik und die Metaphysik« (1901), in: Ders.: *Mystik und Logik. Philosophische Essays*, Wien, Stuttgart: Humboldt Verlag 1952, S. 76–97, S. 97. Vgl. Brigitta-Sophie von Wolff-Metternich: *Die Überwindung des mathematischen Erkenntnisideals. Kants Grenzbestimmung von Mathematik und Philosophie*, Berlin, New York: Walter de Gruyter 1995.

tät, da diese Amalgamierung von Begriff und Anschauung a priori, also von ontologisch Ungleichartigem, über das als Schematismus bezeichnete Vermittlungsverfahren der transzendentalen Zeitbestimmung geregelt ist.⁷ Die Operativität ergibt sich aus der Synthesisfähigkeit der Einbildungskraft als ein bestimmtes Regelfolgen unterschiedlicher Vergegenwärtigungsmodi, das verschieden geordnete Einheit in die Mannigfaltigkeit der Anschauung bringt und damit formal die Möglichkeit von Erkenntnis garantiert. Objektivität verlagert sich als operative Bestimmung der Möglichkeit der Erfahrbarkeit von Gegenständlichkeit und damit Wirklichkeit in das transzendentale Subjekt. In diesem Sinne konstruieren mathematische Begriffe geordnete Einheit von Mannigfaltigkeiten – als Ordnung des Nacheinanders (zeitlich) oder Nebeneinanders (räumlich) – und sind daher keine inhaltlichen Begriffe, sondern formale Organisationsbegriffe von Erfahrung.

Die Operationalisierung von Erfahrung ist *das* Projekt der neuzeitlichen Philosophie – beginnend mit John Locke, David Hume und Gottfried Wilhelm Leibniz und sich vollendend mit Kants Programm der Erfahrungssicherung der neuzeitlichen Wissenschaft, die sich ontologisch nicht mehr im Sein, sondern in der Mathematik und dem empirisch Gegebenen gründet. Der Wirklichkeitsbezug der Mathematik soll den Realitätsbezug der eigentlichen Wissenschaft als mathematisierter sichern. Die Folge für die philosophische Begriffstheorie ist, dass die abbildhafte Transposition einzelner Merkmale äußerer Objekte in die begriffliche Sphäre, im Sinne einer Abstraktions- oder Abbildtheorie, durch die distributive Allgemeinheit der regelbasierten Begriffsbildung abgelöst wird. Das Urteil wird zur aktiven Instanz der Erkenntnisgenerierung, die nicht nur das Besondere unter einen allgemeinen Regelbegriff subsumiert, sondern aus dem Regelbegriff das Unbekannte und Neue extrapoliert respektive mathematisch konstruiert. Die Folge für die Wissenschaft ist, dass sich ihr Erkenntniswert nicht mehr von den konkret gegebenen Objekten als Abstraktionsgrund her, sondern einzig durch die Erkenntnisgewissheit der mathematischen Methode generiert und damit zunehmend vom Gegebenen auf das Prognostische verschiebt. Mögen die mathematischen Spekulationen der Pythagoreer jeglicher Realität entbehrt haben, so bestätigt sich Urban Le Verrier berechnete Prognose der Existenz des Planeten Neptun von 1846 wenige Tage später durch das Berliner Observatorium.⁸

⁷ Vgl. Kant, *Kritik der reinen Vernunft* (1781, 1787), 1993, B 176 ff.

⁸ Le Verrier hatte aus den Abweichungen der Planetenbahn des Uranus den Einfluss und die Position eines bis dahin unentdeckten Planeten per Hand berechnet. Vgl. Johann G. Galle: 'Account of the discovery of the planet of Le Verrier at Berlin', in: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 7, 1846, 153.

Solange der Wirklichkeitsbezug der formalen Organisationsbegriffe von Erfahrung als Regelbegriffe geordneter Einheit von Mannigfaltigkeiten durch die Anschauung a priori gesichert ist, ist der objektive Status des extrapolierten oder konstruierten Neuen und Unbekannten garantiert. Doch Mitte des 19. Jahrhunderts verändert sich die Gestalt der Mathematik und damit ihre Gestaltungsmöglichkeiten für Wissenschaft und Technik. Der gemeinhin als Verlust der Anschauung titulierte Prozess löst die Evidenz des Direkt-Erfahrbaren der empirischen Forschung und des Direkt-Konstruierbaren der euklidischen Geometrie auf. Zum einen wird Anschauung an die zunehmend präziseren Messinstrumente delegiert (apparative Anschauung), zum anderen verlagert sich die Einsichtigkeit der geometrischen Konstruktion in die algebraische Notation (symbolische Anschauung). Damit erweitert die Geometrie ihren Spielraum enorm, denn es geht nicht mehr um die Eigenschaften räumlicher Dinge, sondern um die Eigenschaften von Systemen von Mannigfaltigkeit unter Transformationsbedingungen.⁹ Raum wird zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, in der allein die unter Transformationen invarianten Eigenschaften zum Anhaltspunkt für Evidenz werden. Invarianz wird zum Objektivitätskriterium der neuen Physik der Relativitätstheorie und Quantenmechanik.¹⁰ Es liegt auf der Hand, dass der Anschauungsverlust Kants Programm der Erfahrungssicherung in arge Bedrängnis und das »Geschrei der Boeotern«, das Carl Friedrich Gauß für seine Studien zu nicht-euklidischen Geometrien noch zu fürchten hatte, zum Verstummen bringt.¹¹

Anwendungsfrage

Vor diesem Hintergrund transformiert sich die Erkenntnisfrage zur Frage nach der Anwendbarkeit der Mathematik, die mit dem Verlust der Anschauung zum Rätsel wird. Denn das neue Objektivitätsverständnis reduziert sich

⁹ Vgl. Felix Klein: »Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen« (1872), in: *Mathematische Annalen*, 43, 1893, 63–100.

¹⁰ Vgl. Hermann Weyl: *Symmetrie*, Basel: Birkhäuser 1955. Die Quantenmechanik löst den kontinuierlichen Zusammenhang von Raum und Zeit auf und die Relativitätstheorie desavouiert die Apriorizität von Raum und Zeit, indem Raum und Zeit zu empirisch abhängigen Größen werden. Vgl. Peter Mittelstaedt: *Philosophische Probleme der modernen Physik*, Mannheim u.a.: B.I. Wissenschaftsverlag 1981.

¹¹ Carl Friedrich Gauß: Brief an Bessel vom 27. Januar 1829, in: Friedrich Engel, Paul Stäckel (Hrsg.): *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauß. Urkunden zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie*, Leipzig: Teubner 1895, S. 226. Mit den Boeotern meint Gauß die Kantianer seiner Zeit.

auf die zweistellige Ontologie von logischer Möglichkeit (Widerspruchsfreiheit) und empirischer Realität (sinnliche Gegebenheit). Mathematische Urteile werden nun wie die logischen den analytischen Urteilen zugerechnet und stehen den synthetischen Urteilen der Empirie unvermittelt gegenüber. Schon Leibniz konnte nur Dank der Forderung nach prästabilierter Harmonie seine analytische Urteilsthéorie mit der Welt in Einklang bringen. Doch solche metaphysischen Bedingungen sind der modernen Wissenschaft wie Philosophie suspekt geworden und so rätselt nicht nur Albert Einstein, »wie es möglich [ist], daß die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt des menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich paßt?«¹²

Bis heute arbeitet sich die Mathematikphilosophie an der Unvermitteltheit dieser zweistelligen Ontologie ab. Bezüglich des Status mathematischer Objekte changiert sie zwischen den altbekannten Positionen des Realismus und Nominalismus.¹³ Ersterer spricht den mathematischen Entitäten als abstrakte Objekte Existenz zu, Letzterer spricht sie ihnen wieder ab, sowohl als abstrakte wie auch ontische Objekte.¹⁴ Mathematische Objekte als ontische zu verstehen, verdankt sich einer naturalistischen Auffassung des Realismus.¹⁵ Während Realisten gezwungen sind, durch Isomorphiebehauptungen die ontologische Differenz zwischen abstrakten und empirischen Objekten zu überbrücken und so auf die Frage nach der Anwendbarkeit zu antworten, stellt sich für Nominalisten und Naturalisten die Anwendungsfrage gar nicht. Allerdings gerät dann der Erfolg der hochgradig mathematisierten Wissenschaften zum Rätsel.¹⁶ All diese Rätsel verkehren sich in Magie, wenn den mathematischen Formalismen selbst Empirie zugesprochen wird. »I say ›magical‹ because the object of study of physics became more and more the

¹² Albert Einstein: *Geometrie und Erfahrung* (Erweiterte Fassung des Festvortrages gehalten im Januar 1921 an der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin), Berlin: Julius Springer 1921, S. 3.

¹³ Vgl. Wolfgang Stegmüller: *Glauben, Wissen und Erkennen. Das Universalienproblem Einst und Jetzt*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1965.

¹⁴ Zur realistischen Position vgl. Penelope Maddy: *Realism in Mathematics*, Oxford: Clarendon 1990. Zur nominalistischen Position vgl. Hartry Field: *Science without Numbers*, Oxford: Blackwell 1980; Jody Azzouni: *Deflating Existential Consequences. A Case for Nominalism*, Oxford: Oxford University Press 2004.

¹⁵ Zur naturalistischen Deutung vgl. Willard van Orman Quine: ›On what there is‹, in: *Review of Metaphysics*, 2, 1948/49, 21–38; Michael Resnik: ›Scientific and mathematical realism: The indispensability argument‹, in: *Philosophia Mathematica*, 3, 1995, 166–174; Penelope Maddy: *Naturalism in Mathematics*, Oxford: Clarendon 1997.

¹⁶ Vgl. James R. Brown: ›The Miracle of Science‹, in: *Philosophical Quarterly*, 32, 1982, 232–244.

formalism of physics itself, as though the symbols were reality.«¹⁷ Dies macht deutlich, dass Kants dreistellige Ontologie dringend erforderlich wäre, um »the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences« besser zu verstehen.¹⁸

Medialitätsfrage

Ist die Mathematik tatsächlich ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt des menschlichen Denkens? Anders gewendet: Sind mathematische Begriffe in heutiger Gestalt keine formalen Organisationbegriffe von Erfahrung mehr, wenn die Wirklichkeitssichernde Apriorizität der Anschauungsformen verloren geht? Die Antwort lautet ja, wenn man wie Kant davon ausgeht, dass die Mathematik ihre »Gegenstände selbst durch gleichförmige Synthesis« erschafft.¹⁹ Die Idee der Gleichförmigkeit als einfachste Form der Ordnung des Neben- und Nacheinanders ist dem Linearitätsparadigma der euklidischen Geometrie und der newtonischen Mechanik zu Kants Zeiten geschuldet. Der lineare Automatismus geht mit einer intuitiven Einsichtigkeit wie anschaulichen Darstellbarkeit einher, denn eine derart geordnete Wirklichkeit garantiert charakteristische Eigenschaften wie Gleichförmigkeit, Stetigkeit, Symmetrie, Reversibilität, Kommutativität, Konvergenz, Vorhersagbarkeit und vieles mehr. Die moderne Mathematik kompliziert diese Ordnung, aber sie löst nicht das Nebeneinander und Nacheinander von Mannigfaltigkeiten als Vergegenwärtigungsmodi von Erfahrung auf. Sie ordnet es nur vielfältiger und kann daher komplexere Organisationbegriffe von Erfahrung generieren.

Diese begriffliche Komplizierung hat jedoch ihren Preis. Denn zum einen ist die komplexere Ordnung in ihrer Dynamik nicht mehr direkt an der mathematischen Begriffskonstruktion ablesbar, das heißt die komplexeren mathematischen Begriffe bedürfen notweniger Weise der Verwirklichung. Verwirklichung bedeutet in einer Mathematik, die sich als rein formale (Zeichen-)Sprache versteht, Berechenbarkeit – formal als Ableitbarkeit und Entscheidbarkeit, numerisch als tatsächliche Berechnung. Daher ist zu fragen, ob formale Berechenbarkeit – ganz im Sinne Kants als »einen [mathematischen]

¹⁷ Vgl. Mark Steiner: *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*, Cambridge: Harvard University Press 1998, S. 136.

¹⁸ Vgl. Eugene Wigner: »The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences« (1960), in: Ders.: *Symmetries and Reflections. Scientific Essays of Eugene P. Wigner*, Bloomington: Indiana University Press 1967, 222–237.

¹⁹ Kant, *Kritik der reinen Vernunft* (1781, 1787), 1993, B 751.

Begriff aber konstruieren, heißt: die ihm korrespondierende Anschauung a priori darstellen»²⁰ – nicht das neue Anschauungsparadigma der modernen Mathematik ist.²¹ Zum anderen wird dadurch die Abhängigkeit der Mathematik von ihrer medialen Verfassung offensichtlich, insofern Gestalt und Apodiktizität in einem interdependenten Verhältnis zueinander stehen. Denn es lassen sich innerhalb des Anschauungsparadigmas der Konstruierbarkeit der euklidischen (axiomatisierten) Geometrie wie auch der Berechenbarkeit der formal-axiomatisierten Mathematik als (Zeichen-)Sprache logisch mögliche, aber anschauungslose Objekte (Hendekaeder, Diagonalzahl E_0) von verwirklichbaren Objekten der Anschauung (Kreise, primitiv-rekursive Funktionen) und empirischen Objekten der Anschaulichkeit (Kegelschnitte, nicht-lineare Differentialgleichungssysteme) unterscheiden. Die Pragmatik der geometrischen Konstruierbarkeit hat sich zwar in die Sprachpragmatik der modernen Mathematik transformiert und damit die Gestalt des Anschauungsparadigmas verändert, die moderne Mathematik entbehrt aber dennoch nicht eines solchen. Freilich darf Anschauung nicht mit Anschaulichkeit verwechselt werden, sondern ist mit Kant operativ als ein bestimmtes Regelfolgen unterschiedlicher Vergegenwärtigungsmodi geordneter Einheit von Mannigfaltigkeit zu verstehen.

Operative Epistemologie

Die Leistung der operativen Epistemologie resultiert aus der aktiven Instanz formaler Urteile zur Erkenntnisgenerierung, die aus der angewandten Mathematik resultieren. Damit eröffnet sich nicht nur der Bereich der Subsumption des Besonderen unter allgemeine Regelbegriffe im Sinne formaler Organisationsbegriffe von Erfahrung, sondern das aus den Regelbegriffen extrapolierte Unbekannte und Neue. Das Terrain des Unbekannten und Neuen gewinnt mit der Transformation der konstruktiv-geometrischen Pragmatik in die Sprachpragmatik der modernen Mathematik gehörig an Umfang. Die Erfolge der modernen Mathematik – ihre Komplizierung – resultieren dabei aus dem medialen Umstand, dass sich das Konstruieren geometrischer Figuren in ein ›Operieren mit Operationen‹ wandelt und dadurch ein neues operatives Repertoire erschließt. Dieses erweitert sich um die Vergegenwärtigungsmodi der Permutation und der Rekursion und ermöglicht es, aus sich selbst auto-

²⁰ Kant, *Kritik der reinen Vernunft* (1781, 1787), 1993, B 741.

²¹ Das Anschauungsparadigma der neuzeitlichen Mathematik, Wissenschaft und Philosophie ist hingegen axiomatisierbare Konstruierbarkeit.

morph und rekursiv generierende Ordnungen des Neben- und Nacheinanders des Mannigfaltigen zu erzeugen. Die Selbstbezüglichkeit der modernen Mathematik löst dabei zwar die Bezüglichkeit der neuzeitlichen Mathematik ab und delegiert deren intuitive Einsichtigkeit an die apparative und symbolische Anschauung. Sie führt aber in ihren selbstbezüglichen Gestaltungsmöglichkeiten zu den selbstorganisierenden Konzepten der modernen Forschung – den Automorphismen der neuen Physik, der fraktalen Geometrie, der Kybernetik und der deterministischen Dynamik nicht-linearer Systeme.

Die Komplizierung der formalen Organisationsbegriffe von Erfahrung zu untersuchen, ist Thema der vorliegenden Studie. Der Lohn für die Mühe ist der Gewinn einer neuen Frage, nämlich der, ob die Mathematik als formale (Zeichen-)Sprache aktuell an ihr Ende kommt. Denn mit der Selbstreferentialität der Formalsprachlichkeit stößt die Mathematik als Sprache an ihre äußerste Grenze.²² Daher stellt sich die Frage, ob die Mathematik ihre Gestalt ein weiteres Mal ändern muss, um noch komplexere Organisationsbegriffe von Erfahrung zur Anschauung zubringen – beispielsweise den biologischer Systeme.²³

²² Solange Berechenbarkeit im Paradigma der Maschinenberechenbarkeit verharrt, erweitert der mediale Wechsel von der formalen (Zeichen-)Sprache in die elektrische Schaltung das operative Repertoire der Mathematik nicht wirklich.

²³ Vgl. Bernd Sturmfels: ›Can biology lead to new theorems?‹, in: *2005 Annual Report*, Oxford: Clay Mathematics Institute 2005,13–26; Joel E. Cohen: ›Mathematics Is Biology's Next Microscope, Only Better; Biology Is Mathematics' Next Physics, Only Better‹, in: *PLoS Biology*, 2 (12), 2017, e439.