

GOTTLOB FREGE

Wissenschaftlicher Briefwechsel

Herausgegeben, bearbeitet, eingeleitet
und mit Anmerkungen versehen von

GOTTFRIED GABRIEL
HANS HERMES
FRIEDRICH KAMBARTEL
CHRISTIAN THIEL
ALBERT VERAART



FELIX MEINER VERLAG HAMBURG

FELIX MEINER VERLAG

Im Digitaldruck »on demand« hergestelltes, inhaltlich mit der ursprünglichen Ausgabe identisches Exemplar. Wir bitten um Verständnis für unvermeidliche Abweichungen in der Ausstattung, die der Einzelfertigung geschuldet sind. Weitere Informationen unter: www.meiner.de/bod

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://portal.dnb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-7873-0331-1

ISBN eBook: 978-3-7873-2549-8

© Felix Meiner Verlag GmbH, Hamburg 1976. Alle Rechte vorbehalten.
Dies gilt auch für Vervielfältigungen, Übertragungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen, so weit es nicht §§ 53 und 54 URG ausdrücklich gestatten. Gesamtherstellung: BoD, Norderstedt. Gedruckt auf alterungsbeständigem Werkdruckpapier, hergestellt aus 100 % chlorfrei gebleichtem Zellstoff. Printed in Germany.
www.meiner.de

INHALTSVERZEICHNIS

Verwendete Abkürzungen	XII
Symbolverzeichnis	XIII
Einleitung der Herausgeber: Geschichte des brieflichen Nachlasses und Grundsätze für seine Edition	XIX

Gottlob Frege, Wissenschaftlicher Briefwechsel¹⁾

I. RICHARD AVENARIUS	
I/1 Avenarius an Frege 20. 4. 1882	1
II. L. EUGÈNE BALLUE	
II/1 Ballue an Frege 20. 1. 1895	2
II/2 Ballue an Frege 9. 2. 1895	3
II/3 Ballue an Frege 21. 10. 1896	4
II/4 Ballue an Frege 3. 1. 1897	6
II/5 Ballue an Frege 15. 4. 1897	7
III. BRUNO BAUCH	
III/1 Bauch an Frege 8. 9. 1918*	8
III/2 Bauch an Frege 11. 9. 1918*	9
III/3 Bauch an Frege 25. 4. 1919*	9
III/4 Bauch an Frege 31. 10. 1919*	9
III/5 Bauch an Frege 26. 1. 1925*	9
III/6 Bauch an Frege 30. 1. 1925*	9
III/7 Bauch an Frege 7. 4. 1925*	9
III/8 Bauch an Frege 29. 4. 1925*	9
IV. WALTER C. G. BRIX	
IV/1 Brix an Frege 15. 11. 1890	10
IV/2 Frege an Brix undatiert	12
IV/3 Brix an Frege 30. 5. 1891	13
IV/4 Brix an Frege 9. 5. 1892	13
V. HUGO BUCHHOLZ	
V/1 Frege an Buchholz 19. 9. 1905*	15
V/2 Frege an Buchholz Datum unbekannt*	15
V/3 Frege an Buchholz Datum unbekannt*	15
V/4 Buchholz an Frege 30. 6. 1911*	15
VI. RUDOLF CARNAP	
VI/1 Carnap an Frege 30. 11. 1921*	16

¹⁾ Ein * zeigt an, daß der Wortlaut des jeweiligen Schreibens nicht überliefert ist.

VII. LOUIS COUTURAT

VII/1	Couturat an Frege	1. 7. 1899	17
VII/2	Couturat an Frege	8. 7. 1899	19
VII/3	Couturat an Frege	6. 1. 1901	20
VII/4	Couturat an Frege	18. 6. 1901	21
VII/5	Couturat an Frege	13. 10. 1901	23
VII/6	Couturat an Frege	11. 2. 1904	25
VII/7	Couturat an Frege	21. 10. 1906	26

VIII. LUDWIG DARMSTAEDTER

VIII/1	Frege an Darmstaedter	27. 7. 1919	27
--------	-----------------------	-------------	----

IX. HUGO DINGLER

IX/1	Frege an Dingler	2. 10. 1910	29
IX/2	Frege an Dingler	31. 1. 1917	29
IX/3	Dingler an Frege	2. 2. 1917	31
IX/4	Frege an Dingler	6. 2. 1917	33
IX/5	Dingler an Frege	26. 2. 1917	37
IX/6	Dingler an Frege	27. 6. 1917	39
IX/7	Frege an Dingler	4. 7. 1917	41
IX/8	Dingler an Frege	10. 7. 1917	42
IX/9	Frege an Dingler	21. 7. 1917	43
IX/10	Frege an Dingler	1. 8. 1917	43
IX/11	Dingler an Frege	10. 12. 1917*	43
IX/12	Frege an Dingler	2. 2. 1918	44
IX/13	Frege an Dingler	3. 9. 1918	44
IX/14	Dingler an Frege	11. 11. 1918*	44
IX/15	Frege an Dingler	17. 11. 1918	44
IX/16	Frege an Dingler	29. 4. 1920	45

X. HORST ENGERT

X/1	Engert an Frege	9. 12. 1919*	46
-----	-----------------	--------------	----

XI. RUDOLF EUCKEN

XI/1	Eucken an Frege	8. 11. ?*	47
------	-----------------	-----------	----

XII. RICHARD FALCKENBERG

XII/1	Falckenberg an Frege	16. 6. 1890	48
-------	----------------------	-------------	----

XIII. GEORG GOETZ

XIII/1	Goetz an Frege	7. 11. 1918*	50
XIII/2	Goetz an Frege	22. 11. 1919*	50

XIV. ROBERT HAUSSNER

XIV/1	Haußner an Frege	27. 8. 1918*	51
XIV/2	Haußner an Frege	10. 6. 1919*	51
XIV/3	Haußner an Frege	3. 11. 1919*	51
XIV/4	Haußner an Frege	23. 12. 1919*	51
XIV/5	Haußner an Frege	22. 1. 1920*	52
XIV/6	Haußner an Frege	31. 1. 1920*	52
XIV/7	Haußner an Frege	10. 2. 1920*	52
XIV/8	Haußner an Frege	9. 8. 1920*	52

XIV/9	Haußner an Frege	25. 8. 1920*	53
XIV/10	Haußner an Frege	9. 2. 1921*	53
XIV/11	Haußner an Frege	23. 10. 1921*	53
XIV/12	Haußner an Frege	30. 12. 1921*	53
XIV/13	Haußner an Frege	7. 11. 1922*	53
XIV/14	Haußner an Frege	29. 12. 1922*	53
XIV/15	Haußner an Frege	6. 11. 1924*	54
XIV/16	Haußner an Frege	10. 5. 1925*	54

XV. DAVID HILBERT

XV/1	Frege an Hilbert	1. 10. 1895	58
XV/2	Hilbert an Frege	4. 10. 1895	59
XV/3	Frege an Hilbert	27. 12. 1899	60
XV/4	Hilbert an Frege	29. 12. 1899	65
XV/5	Frege an Hilbert	6. 1. 1900	70
XV/6	Hilbert an Frege	15. 1. 1900	76
XV/7	Frege an Hilbert	16. 9. 1900	77
XV/8	Hilbert an Frege	22. 9. 1900	79
XV/9	Hilbert an Frege	7. 11. 1903	79

XVI. ARTHUR HOFFMANN

XVI/1	Hoffmann an Frege	28. 10. 1918*	81
XVI/2	Hoffmann an Frege	12. 9. 1919*	81
XVI/3	Hoffmann an Frege	23. 1. 1920*	81
XVI/4	Hoffmann an Frege	30. 12. 1920*	82
XVI/5	Hoffmann an Frege	3. 12. 1922*	82

XVII. RICHARD HÖNIGSWALD

XVII/1	Hönigswald an Frege	5. 2. 1925*	83
XVII/2	Frege an Hönigswald	8. 2. 1925*	83
XVII/3	Hönigswald an Frege	15. 2. 1925*	84
XVII/4	Hönigswald an Frege	24. 4. 1925	84
XVII/5	Frege an Hönigswald	26. 4. – 4. 5. 1925	85
XVII/6	Hönigswald an Frege	7. 5. 1925*	87

XVIII. EDWARD V. HUNTINGTON

XVIII/1	Frege an Huntington	undatiert	88
---------	---------------------	-----------	----

XIX. EDMUND HUSSERL

XIX/1	Frege an Husserl	24. 5. 1891	94
XIX/2	Husserl an Frege	18. 7. 1891	99
XIX/3	Frege an Husserl	30. 10. – 1. 11. 1906	101
XIX/4	Husserl an Frege	10. 11. 1906*	105
XIX/5	Husserl an Frege	16. 11. 1906*	105
XIX/6	Frege an Husserl	9. 12. 1906	105
XIX/7	Husserl an Frege	21. 12. 1906 – 13. 1. 1907*	107

XX. E. E. CONSTANCE JONES

XX/1	Jones an Frege	29. 10. 1910*	108
XX/2	Frege an Jones	26. 3. 1911*	108
XX/3	Jones an Frege	1. 4. 1911*	108

VIII**Inhaltsverzeichnis****XXI. PHILIP E. B. JOURDAIN**

XXI/1	Jourdain an Frege	7. 9. 1902	110
XXI/2	Frege an Jourdain	23. 9. 1902	111
XXI/3	Frege an Jourdain	21[?]. 3. 1904	112
XXI/4	Jourdain an Frege	22. 3. 1904	112
XXI/5	Jourdain an Frege	28. 1. 1909	113
XXI/6	Jourdain an Frege	15. 2. 1909	113
XXI/7	Jourdain an Frege	16. 4. 1910	114
XXI/8	Jourdain an Frege	23. 4. 1910	114
XXI/9	Frege an Jourdain	ohne Datum	114
XXI/10	Jourdain an Frege	29. 3. 1913	124
XXI/11	Jourdain an Frege	15. 1. 1914	125
XXI/12	Frege an Jourdain	undatiert	126
XXI/13	Frege an Jourdain	28. 1. 1914	129
XXI/14	Jourdain an Frege	18. 4. 1914*	133

XXII. FELIX KLEIN

XXII/1	Klein an Frege	14. 8. 1881	134
--------	----------------	-------------	-----

XXIII. EDUARD KNOCH

XXIII/1	Knoch an Frege	28. 6. 1893	136
XXIII/2	Knoch an Frege	11. 7. 1893	137

XXIV. WILHELM KOEBNER

XXIV/1	Koebner an Frege	23. 1. 1891*	138
XXIV/2	Frege an Koebner	8. 2. 1891*	138
XXIV/3	Koebner an Frege	18. 2. 1891	138
XXIV/4	Frege an Koebner	undatiert	139

XXV. ALWIN REINHOLD KORSELT

XXV/1	Korselt an Frege	21. 6. 1903	141
XXV/2	Frege an Korselt	26. 6. 1903*	142
XXV/3	Korselt an Frege	27. 6. 1903	142
XXV/4	Korselt an Frege	30. 6. 1903	144
XXV/5	Korselt an Frege	5. 1. 1920*	144

XXVI. XAVIER LÉON

XXVI/1	Léon an Frege	4. 12. 1894	145
--------	---------------	-------------	-----

XXVII. HEINRICH LIEBMANN

XXVII/1	Frege an Liebmann	29. 7. 1900	147
XXVII/2	Frege an Liebmann	25. 8. 1900	149

XXVIII. PAUL LINKE

XXVIII/1	Linke an Frege	2. 8. 1916*	152
XXVIII/2	Frege an Linke	24. 8. 1919	153

XXIX. LEOPOLD LÖWENHEIM

XXIX/1	Löwenheim an Frege	Datum unbekannt*	159
XXIX/2	Frege an Löwenheim	16. 9. 1908*	160
XXIX/3	Frege an Löwenheim	29. 11. 1908*	160
XXIX/4	Löwenheim an Frege	6. 12. 1908*	160

XXIX/5	Frege an Löwenheim	21. 12. 1908*	160
XXIX/6	Löwenheim an Frege	23. 12. 1908*	160
XXIX/7	Frege an Löwenheim	30. 12. 1908*	160
XXIX/8	Löwenheim an Frege	3. 1. 1909*	160
XXIX/9	Frege an Löwenheim	24. 1. 1909*	160
XXIX/10	Löwenheim an Frege	Datum unbekannt*	160
XXIX/11	Frege an Löwenheim	13. 2. 1909*	160
XXIX/12	Löwenheim an Frege	18. 2. 1909*	160
XXIX/13	Frege an Löwenheim	12. 3. 1909*	160
XXIX/14	Löwenheim an Frege	Datum unbekannt*	160
XXIX/15	Frege an Löwenheim	26. 3. 1909*	160
XXIX/16	Löwenheim an Frege	5. 4. 1909*	160
XXIX/17	Frege an Löwenheim	16. 5. 1909*	160
XXIX/18	Löwenheim an Frege	29. 5. 1909*	161
XXIX/19	Frege an Löwenheim	4. 4. 1910*	161
XXIX/20	Löwenheim an Frege	19. 5. 1910*	161
 XXX.	ANTON MARTY		
XXX/1	Frege an Marty	29. 8. 1882	163
 XXXI.	ADOLPH MAYER		
XXXI/1	Mayer an Frege	9. 6. 1896	166
XXXI/2	Mayer an Frege	6. 7. 1896	167
 XXXII.	CHARLES KAY OGDEN		
XXXII/1	Ogden an Frege	27. 11. 1921*	168
 XXXIII.	MORITZ PASCH		
XXXIII/1	Pasch an Frege	11. 2. 1894	169
XXXIII/2	Frege an Pasch	13. 10. 1896*	170
XXXIII/3	Pasch an Frege	14. 10. 1896	170
XXXIII/4	Pasch an Frege	14. 11. 1899	171
XXXIII/5	Pasch an Frege	18. 1. 1903	172
XXXIII/6	Frege an Pasch	18. 4. 1904*	172
XXXIII/7	Pasch an Frege	7. 1. 1905	173
XXXIII/8	Pasch an Frege	13. 11. 1906	174
 XXXIV.	GIUSEPPE PEANO		
XXXIV/1	Frege an Peano	undatiert	176
XXXIV/2	Peano an Frege	30. 1. 1894	177
XXXIV/3	Peano an Frege	10. 2. 1894	178
XXXIV/4	Peano an Frege	14. 8. 1895	179
XXXIV/5	Peano an Frege	24. 10. 1895	180
XXXIV/6	Peano an Frege	5. 4. 1896	180
XXXIV/7	Frege an Peano	29. 9. 1896	181
XXXIV/8	Peano an Frege	undatiert	186
XXXIV/9	Peano an Frege	3. 10. 1896	188
XXXIV/10	Peano an Frege	14. 10. 1896	188
XXXIV/11	Frege an Peano	ohne Datum	194
XXXIV/12	Peano an Frege	7. 1. 1903	198
 XXXV.	HEINRICH RICKERT		
XXXV/1	Rickert an Frege	28. 6. 1911*	199

XXXVI. BERTRAND RUSSELL

XXXVI/1	Russell an Frege	16. 6. 1902	211
XXXVI/2	Frege an Russell	22. 6. 1902	212
XXXVI/3	Russell an Frege	24. 6. 1902	215
XXXVI/4	Frege an Russell	29. 6. 1902	217
XXXVI/5	Russell an Frege	10. 7. 1902	219
XXXVI/6	Russell an Frege	24. 7. 1902	221
XXXVI/7	Frege an Russell	28. 7. 1902	222
XXXVI/8	Frege an Russell	3. 8. 1902	225
XXXVI/9	Russell an Frege	8. 8. 1902	226
XXXVI/10	Frege an Russell	23. 9. 1902	227
XXXVI/11	Russell an Frege	29. 9. 1902	230
XXXVI/12	Frege an Russell	20. 10. 1902	231
XXXVI/13	Russell an Frege	12. 12. 1902	233
XXXVI/14	Frege an Russell	28. 12. 1902	234
XXXVI/15	Russell an Frege	20. 2. 1903	237
XXXVI/16	Frege an Russell	21. 5. 1903	239
XXXVI/17	Russell an Frege	24. 5. 1903	241
XXXVI/18	Frege an Russell	13. 11. 1904	243
XXXVI/19	Russell an Frege	12. 12. 1904	248
XXXVI/20	Russell an Frege	16. 3. [1912]*	251
XXXVI/21	Frege an Russell	9. 6. 1912	252

XXXVII. SCHEFFER

XXXVII/1	Scheffer an Frege	17. 7. 1911*	253
----------	-------------------	--------------	-----

XXXVIII. OSCAR SCHLÖMILCH

XXXVIII/1	Schlömilch an Frege	22. 6. 1881	254
-----------	---------------------	-------------	-----

XXXIX. HANS SPIESER

XXXIX/1	Frege an Spieser	... 11. 1914*	255
XXXIX/2	Spieser an Frege	7. 12. 1914*	255
XXXIX/3	Spieser an Frege	29. 12. 1914*	255

XL. CARL STUMPF

XL/1	Stumpf an Frege	9. 9. 1882	256
------	-----------------	------------	-----

XLI. JOHANNES THOMAE

XLI/1	Thomae an Frege	10. 12. 1920*	258
-------	-----------------	---------------	-----

XLII. HERMANN ULRICI

XLII/1	Ulrici an Frege	18. 9. 1881	259
--------	-----------------	-------------	-----

XLIII. GIOVANNI VAILATI

XLIII/1	Vailati an Frege	17. 3. 1904	260
XLIII/2	Vailati an Frege	5. 5. 1906	262
XLIII/3	Frege an Vailati	Datum unbekannt*	262

XLIV. NORBERT WIENER

XLIV/1	Wiener an Frege	29. 5. 1914*	263
--------	-----------------	--------------	-----

XLV. LUDWIG WITTGENSTEIN

XLV/1	Wittgenstein an Frege	22. 10. 1913*	265
XLV/2	Frege an Wittgenstein	Datum unbekannt*	265
XLV/3	Wittgenstein an Frege	29. 11. 1913*	266
XLV/4	Wittgenstein an Frege	Datum unbekannt*	266
XLV/5	Frege an Wittgenstein	Datum unbekannt*	266
XLV/6	Wittgenstein an Frege	25. 8. 1915*	266
XLV/7	Frege an Wittgenstein	Datum unbekannt*	266
XLV/8	Wittgenstein an Frege	Datum unbekannt*	266
XLV/9	Wittgenstein an Frege	12. 10. 1918*	266
XLV/10	Wittgenstein an Frege	26. 10. 1918*	266
XLV/11	Wittgensteins Schwester an Frege	24. 12. 1918*	266
XLV/12	Wittgenstein an Frege	23. 2. 1919*	267
XLV/13	Wittgensteins Schwester an Frege	19. 3. 1919*	267
XLV/14	Wittgensteins Schwester an Frege	28. 3. 1919*	267
XLV/15	Wittgenstein an Frege	10. 4. 1919*	267
XLV/16	Wittgenstein an Frege	9. 6. 1919*	267
XLV/17	Wittgensteins Schwester an Frege	7. 7. 1919*	267
XLV/18	Wittgensteins Schwester an Frege	17. 7. 1919*	267
XLV/19	Wittgenstein an Frege	3. 8. 1919*	267
XLV/20	Wittgensteins Schwester an Frege	28. 8. 1919*	267
XLV/21	Wittgenstein an Frege	6. 9. 1919*	267
XLV/22	Wittgenstein an Frege	16. 9. 1919*	268
XLV/23	Wittgenstein an Frege	undatiert*	268
XLV/24	Wittgenstein an Frege	29. 12. 1919*	268

XLVI. KARL ZSIGMONDY

XLVI/1	Frege an Zsigmondy	undatiert	269
--------	--------------------	-----------	-----

Anhang

Zu XXI/10:	Kapitel <i>Gottlob Frege</i> aus Philip E. B. Jourdain: <i>The development of the theories of mathematical logic and the principles of mathematics.</i>	275
------------	---	-----

Sach- und Personenregister	303
----------------------------	-----

EINLEITUNG
DER HERAUSGEBER

GESCHICHTE DES BRIEFLICHEN NACHLASSES UND GRUNDSÄTZE FÜR SEINE EDITION*)

Am 27. Juli 1919 schrieb Gottlob Frege an den Chemiker und Wissenschaftshistoriker *Ludwig Darmstaedter*: „Was Ihnen früher geäußerten Wunsch betrifft, ich möge Ihrer Autographen-Sammlung an mich gerichtete Briefe überlassen, so erkenne ich dessen Berechtigung durchaus an. Ich habe angefangen, solche Briefe zu ordnen und zu prüfen, welche von ihnen für diesen Zweck geeignet erscheinen.“¹⁾ Frege ist jedoch zu seinen Lebzeiten dem Wunsche Darmstaedters nicht mehr nachgekommen. Als Frege am 26. Juli 1925 in Bad Kleinen starb, hinterließ er seinem Adoptivsohn *Alfred Frege* neben seinen wissenschaftlichen Manuskripten auch die Briefe seiner wichtigsten wissenschaftlichen Diskussionspartner.

Die von Frege in seinem oben erwähnten Briefe an Darmstaedter bekundete Absicht, eine geeignete Auswahl von Briefen zu treffen, ist von ihm noch durch eine testamentarische Regelung ausgeführt worden.²⁾ Eine Verfügung aus dem Jahre 1919, also dem Abfassungsjahr seines Schreibens an Darmstaedter, sah nämlich vor, daß nur der von ihm selbst ausgewählte Teil der an ihn gerichteten Briefe der Darmstaedterschen Autographensammlung zu übergeben sei. Freges Verfügung bestimmte ferner, daß diese Briefe erst dreißig Jahre nach dem Tode des jeweiligen Briefpartners veröffentlicht werden dürften. Mit dieser Bestimmung trug Frege offenbar einem Bedenken Rechnung, das er bereits gegenüber Darmstaedter geäußert hatte, ob er nämlich nicht mit einer Überlassung der Briefe an eine öffentliche Bibliothek einen „Vertrauensbruch“ gegenüber seinen Briefpartnern begehe.

Alfred Frege übergab dann am 26. 11. 1925 der im Rahmen der damaligen *Preußischen Staatsbibliothek* fortgeföhrten Autographen-Sammlung Darmstaedters nach Scholz/Bachmann „eine nicht umfangreiche Sammlung von

* Der Beitrag von *Lothar Kreiser*: *Zur Geschichte des wissenschaftlichen Nachlasses Gottlob Freges* (*XIX Konferencja Grupy Tematycznej Historii Logiki PAN, Kraków, 29 IV 1973*), in: *Ruch Filozoficzny* 33, 1974, Nr. 1, pp. 42–47 konnte für die folgende Darstellung nicht mehr berücksichtigt werden. Eine umfassende Darstellung der Geschichte des wissenschaftlichen Nachlasses, die die bisherige Nachlaßforschung auswertet und weitere Informationen zur Nachlaßgeschichte enthält, findet sich bei *Albert Veraart*: *Geschichte des wissenschaftlichen Nachlasses Gottlob Freges und seiner Edition. Mit einem Katalog des ursprünglichen Bestands der nachgelassenen Schriften Freges*, in: *Matthias Schirn* [Hg.]: *Studien zu Frege*. Bd. 1: *Logik und Philosophie der Mathematik*. Stuttgart-Bad Cannstatt (im Erscheinen).

¹ Cf. Brief Nr. VIII/1, p. 27 in diesem Band.

² Cf. dazu die Bemerkungen *L. Kreisers* über Freges Nachlaß und Biographie in der *Rezension v. NSchrWB I*, in: *Deutsche Zeitschrift für Philosophie* 21 (1973), pp. 519–524, insbes. pp. 521–524, hier p. 521.

XX Geschichte des brieflichen Nachlasses und Grundsätze für seine Edition

Briefen an Frege“, wobei „das wesentlichste Stück dieser Sammlung [...] zehn Briefe von Bertrand Russell an Frege“ darstellten.¹⁾

Nach Mitteilung der Deutschen Staatsbibliothek vom 15. 11. 1960 ist im Akzessionsjournal der *Sammlung Darmstaedter* unter der Nr. 1925/104 und dem Datum 27. 11. 1925 folgende zugehörige Eintragung zu finden: „Briefe und Postkarten aus dem Nachlaß Prof. Frege 20. Jh. (121 Stücke). Von stud. Frege, Bad Kleinen.“ Leider ist das Frege-Konvolut in der *Sammlung Darmstaedter* nicht beisammengeblieben, sondern nach Mitteilung der Deutschen Staatsbibliothek vom 15. 11. 1960, „wie das bei kleineren Sammlungen immer geschah, aufgelöst und auf die Namen der einzelnen Schreiber verteilt“ worden. Eine Auskunft der Handschriftenabteilung der Staatsbibliothek Preußischer Kulturbesitz vom 20. 9. 1974 zu der Stückzahl von 121 besagt, daß nach den dort gemachten Erfahrungen „[...] Darmstaedter ‚Stücke‘ gezählt [habe], also die einzelnen Bogen, vielleicht auch Briefumschläge, sicher gedruckte Beilagen. Diese Angaben sind nicht mehr nachprüfbar.“ Nach Mitteilung der Staatsbibliothek vom 16. 10. 1974 sind die erhaltenen Bestände noch einmal unabhängig von den dort vorhandenen Aufstellungen durchgezählt worden: „Die einzelnen Blätter mit Umschlägen, Visitenkarten, Ausschnitten, Drucken ergeben zusammen 113 ‚Stücke‘. Wenn man jetzt noch die drei verlorenen Briefe [von Hilbert 29. 12. 1899, von Jourdain 18. 4. 1914, von Hönigswald 5. 2. 1925] mitrechnet, kommt man doch in die Nähe der ‚121 Stücke‘.“ Es darf daher davon ausgegangen werden, daß der seinerzeit von *A. Frege* der heute so genannten *Staatsbibliothek* übergebene briefliche Nachlaß für die Edition voll berücksichtigt werden konnte.**)

Nachdem *Heinrich Scholz* im Rahmen seiner Bemühungen um den wissenschaftlichen Nachlaß Freges 1936 die in der *Sammlung Darmstaedter* verwahrten Briefe *an Frege* gefunden hatte, ergab sich für ihn vor allem die Aufgabe, die zugehörigen Briefe *von Frege* ausfindig zu machen. Auf dem *Congrès International de Philosophie Scientifique* in Paris 1935 forderte Scholz alle auf, ihm bei seiner Suche behilflich zu sein und wiederholte diesen Aufruf in dem von ihm und *Friedrich Bachmann* verfaßten Bericht *Der wissenschaftliche Nachlaß von Gottlob Frege*.²⁾ Scholz gelang es im Rahmen seiner Bemühungen, u.a. die Originalbriefe Freges an Russell zu erhalten. Nicht immer war Scholz jedoch ein Erfolg beschieden. So lehnte es Wittgenstein ab, die Schreiben Freges an ihn zur Verfügung zu stellen, weil sie „rein persönlichen, nicht philosophischen, Inhalts“ seien.³⁾ Die Witwe Couturats teilte mit, daß sie den brieflichen Nachlaß ihres Mannes nur eine Zeitlang aufbewahrt habe. – Mit Schreiben vom 16. 1. 1937 scheint Scholz von Alfred Frege die nicht an die

¹ Heinrich Scholz u. Friedrich Bachmann: *Der wissenschaftliche Nachlass von Gottlob Frege*. In: Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique. Paris 1935. VIII: Histoire de la Logique et de la Philosophie Scientifique. (= Actualités Scientifiques et Industrielles. 395). Paris 1936, pp. 24–30.

² Cf. dazu den Nachtrag auf p. XXII.

³ L.c. Wittgenstein an Scholz vom 9. 4. 1936.

Sammlung Darmstaedter gegangenen Briefe *an* Frege erhalten zu haben: „Unter dem Ihnen mit gleicher Post zugehenden Schriftwechsel befinden sich u.a. auch eine Anzahl Briefe von Prof. Haußner/Jena.“ Die Briefe von Haußner erbittet A. Frege zurück, weil sie überwiegend politischen und familiären Charakters seien. Für die anderen mitgeschickten Briefe macht A. Frege diese Auflage nicht¹⁾.

Daher darf angenommen werden, (1) daß die übrigen Briefe auch von wissenschaftlichem Interesse waren und (2) daß Scholz sie wohl für sein Archiv behalten durfte. Zu dieser Sendung A. Freges gehörten wahrscheinlich alle diejenigen Schreiben *an* Frege, die in den von Scholz und seinen Mitarbeitern angefertigten Aufzeichnungen den Vermerk „SchArch“ haben, u.a. auch die Schreiben Wittgensteins an Frege. – Einen Teil dieser Aufzeichnungen zu dem Briefwechsel Freges bilden drei Verzeichnisse, die hier so genannten „Scholz-Listen“ (*SchL1-3*), die den Titel tragen *Der wissenschaftliche Briefwechsel Freges*. Dabei gibt *SchL1* den letzten Stand der Bemühungen von Scholz und seinen Mitarbeitern wieder.

Die von Scholz gesammelten Originalbriefe sind bei der Bombardierung der Stadt Münster am 25. 3. 1945, die auch die Universitätsbibliothek traf, verbrannt.²⁾ Leider hatte Scholz von den Originalbriefen keine Filme, die an einem zweiten Ort hätten aufbewahrt werden können, anfertigen lassen. Jedoch ließ Scholz von den meisten Briefen für die von ihm geplante Edition maschinenschriftliche Abschriften herstellen. Den Krieg überstanden haben neben diesen Abschriften, den Scholz-Listen und den in der Sammlung Darmstaedter verwahrten Originalen auch Abschriften, die die Briefpartner Freges (z.B. Dingler) selbst angefertigt hatten oder Kopien, die ihnen (z.B. Russell) Scholz auf ihren Wunsch hin zusandte.

Diese Bestände und Quellen waren es auch, auf die mit dem Beginn der Arbeiten an der laufenden Edition zurückgegriffen werden konnte. Für die Neuaufnahme der Bemühungen um den wissenschaftlichen Briefwechsel Freges war es wesentlich, daß der seinerzeit von Scholz in dieser Sache geführte „Metabriefwechsel“ erhalten geblieben war. So konnten die von Scholz ergriffenen und nicht abgeschlossenen Initiativen weitergeführt und für Verlorengegangenes zum Teil wiederholt werden. Diese Nachforschungen

¹⁾ In dem Schreiben Alfred Freges an Heinrich Scholz vom 16. 1. 1937 erwähnt Alfred Frege, daß sich in dem nicht-mathematischen Teil des Nachlasses seines Adoptivvaters u.a. auch ein „Briefwechsel mit Prof. Schäfer/Berlin“ befindet. Es erscheint nicht ausgeschlossen, daß es sich bei Schäfer um den Historiker Dietrich Schäfer (1845–1921) handelt, dem Frege wohl in seinen politischen Ansichten nahestand. Nachforschungen, die den Nachlaß Schäfers betrafen, erbrachten jedoch nur negative Ergebnisse. So teilten das „Staatsarchiv Bremen“ am 25. 2. 1975 und das „Akademie-Archiv“ der „Akademie der Wissenschaften der DDR“ am 19. 3. 1975 mit, daß sich in den dort verwahrten Teilnachlässen Schäfers keine Briefe von Gottlob Frege befänden.

²⁾ Cf. H. Hermes, F. Kambarat, F. Kaulbach: *Geschichte des Frege-Nachlasses und Grundsätze für seine Edition*. In: *NSchrWB I*, p. XXXVI.

XXII Geschichte des brieflichen Nachlasses und Grundsätze für seine Edition

waren im einzelnen oft recht langwierig, erhöhten aber das Ausgangsmaterial für die Edition wesentlich.

Im Zuge dieser Ermittlungen wurden die erhalten gebliebenen Bestände in Form von Originalen, Kopien oder Abschriften zu einem neuen *Frege-Archiv* zusammengetragen. Nach Abschluß der Editionsarbeiten wird dieses Archiv an den Besitzer der Ausgangsbestände, das *Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung* der Universität Münster/Westf., übergeben werden.

Zu der Frage, ob aus dem Besitz von Freges Adoptivsohn *Alfred Frege* noch wissenschaftliche Aufzeichnungen oder Briefe, die möglicherweise Scholz seinerzeit nicht erhalten hatte, über den Krieg gekommen sind,¹⁾ teilte Herr Dr. Ing. *Christian Frege* (Bonn) mit Schreiben vom 30. 1. 1972 mit: „Mein Vetter Alfred Frege – Vetter ist nicht ganz richtig, die Verwandtschaft war viel weitläufiger – wohnte damals in Berlin W 30, Eisenacher Str. 90/91. Dieses Haus wurde am 22. November 1943 durch Bomben vollkommen zerstört, es wurde nicht das Geringste gerettet. Alfred Frege selbst wurde zum Kriegseinsatz beim Torpedoarsenal-West bei Paris eingezogen, wo er am 15. Juni 1944 gefallen ist.“²⁾

Zum Verbleib der persönlichen Habe Gottlob Freges weiß Christian Frege noch zu berichten, daß G. Frege, der zuletzt in Bad Kleinen (Mecklenburg) wohnte, noch zu seinen Lebzeiten vermutlich ein im Bau befindliches Haus in Neu-Pastow, in der Nähe von Rostock, gekauft hatte. (Schreiben Christian Freges vom 28. 11. 1974). Dieses Haus trug die Bezeichnung „Häuslerei Nr. 13“. Aus der Tatsache, daß Bad Kleinen als Sterbeort Freges angegeben ist, schließt nun Christian Frege, daß Frege die „Fertigstellung des Hauses“ nicht mehr erlebte. Das Haus erbte Alfred Frege. Freges langjährige Haushälterin Meta Arndt erhielt testamentarisch ein Wohnrecht in dem Hause zugesprochen. Sie starb am 8. 1. 1943. Über die nachgelassene Habe führt Christian Frege aus: „Meines Wissens wurde der gesamte Nachlaß des Prof. Frege von Bad Kleinen in dieses Haus in Neu-Pastow verlegt.“ Vor Ende des Krieges war Christian Frege noch zweimal kurz in Neu-Pastow. Seine Schilderung dessen, was er dort vorfand, soll hier wörtlich wiedergegeben werden: „Das Erdgeschoß des Hauses, Nebengebäude und Länderei waren an einen Schlosser Hünerhoff verpachtet, mein Vetter hatte sich die zwei Zimmer im 1. Stock vorbehalten. Diese standen voll mit Möbeln, Büchern und anderem Haustrat, offenbar aus dem Nachlass des Professors Frege. Mir wurde berichtet [Hervorhebung durch Hrsg.], daß das Haus später beim Einmarsch der Roten Armee mehrfach geplündert wurde, zeitweilig als Soldatenquartier beschlagnahmt war und danach bis unters Dach mit Flüchtlingen – insgesamt 12 Personen – belegt wurde. Ich befürchte, daß unter diesen Umständen von dem Nachlaß kaum noch etwas vorhanden sein wird.“

¹⁾ Cf. l.c., p. XXXIX.

²⁾ Nach Auskunft des *Polizeipräsidenten in Berlin* vom 23. 9. 1968 ist Alfred Frege in Montesson bei Paris gefallen.

XXIX. FREGE - LÖWENHEIM

Einleitung des Herausgebers

An *Leopold Löwenheim* erinnert in der mathematischen Logik die Bezeichnung „Satz von Löwenheim“ für die Aussage, daß jede überhaupt erfüllbare Formel der Quantorenlogik erster Stufe ohne freie Eigennamenvariable bereits in einem abzählbaren (d.h. endlichen oder abzählbar unendlichen) Bereich erfüllbar ist. Eine auf Formeln der Quantorenlogik erster Stufe mit Identität bezogene Form dieses Satzes publizierte Löwenheim im Jahre 1915; seine Verallgemeinerung auf die gemeinsame Erfüllbarkeit abzählbar vieler Formeln der genannten Art gelang *Skolem* unter Vervollständigung und Vereinfachung des Löwenheimschen Beweises im Jahre 1920 („Satz von Löwenheim-Skolem“), eine weitere Verschärfung *Gödel* in einem heute als „Endlichkeitsatz“ bezeichneten Theorem von 1930.¹⁾ Zu den Konsequenzen des Satzes gehört die scheinbare Paradoxie, der er in der englischsprachigen Literatur den Namen „Löwenheim-Skolem paradox“ verdankt: auch ein Axiomensystem für den Bereich der reellen Zahlen oder für die *Cantorsche Mengenlehre* ist ja – die bisher nicht bewiesene Widerspruchsfreiheit einmal vorausgesetzt – nach dem Satz schon in einem abzählbaren Bereich erfüllbar, während man doch innerhalb der Analysis bzw. der Mengenlehre mit Hilfe einer Diagonalkonstruktion beweist, daß der Bereich der reellen Zahlen bzw. der Mengen nicht abzählbar ist. Eine Paradoxie ist dies jedoch nur in dem Sinne, als der Satz ein unerwartetes Ergebnis darstellt; zu einem Widerspruch führt er nicht. Es zeigt sich lediglich, daß die im Satz von Löwenheim-Skolem vorgenommene Interpretation der Mengen- und Relationsvariablen des Axiomensystems nicht mit der bei seiner Aufstellung intendierten Interpretation übereinzustimmen braucht und es in den beiden genannten Beispielen auch nicht tut. Die zum Beweis des Satzes konstruierte Abzählung des Bereichs ist innerhalb des axiomatischen Systems insofern gar nicht erfassbar, als die Aussage ihrer Existenz nicht aus dem Axiomensystem ableitbar ist. Da die Konstruktion jedoch logisch einwandfrei ist, scheint die verbreitetste „Lösung“ der Paradoxie, daß nämlich der Begriff der „Nichtabzählbarkeit“ innerhalb und außerhalb des axiomatischen Systems ein anderer sei, zwar nicht falsch, aber irreführend. Das Ergebnis des Satzes ist vielmehr schlicht so zu formulieren, daß man durch die Aufstellung eines Axiomensystems der angegebenen Art grundsätzlich weder alle konstruktiv definierbaren Mengen und Relationen (insbesondere Abzählungen) erfassen noch eine Charakterisierung des Variabilitätsbereichs seiner Eigennamenvariablen erreichen kann.

Von der Tragweite dieses heute noch keineswegs allgemein zur Kenntnis genommenen Tatbestandes abgesehen, ist Löwenheims Arbeit für die Geschichte der mathematischen Logik und Grundlagenforschung vor allem dadurch wichtig, daß sie die Aufmerksamkeit der Forschung auf die Allgemeingültigkeits- und Erfüllbarkeitsproble-

E¹ *Leopold Löwenheim, Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, Mathematische Annalen 76, 1915, pp. 447–470 (Satz 2, p. 450); *Thoralf Skolem, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen*, Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse, 1920, no. 4, repr. in *Th. Skolem, Selected Works in Logic*, edited by Jens Erik Fenstad, Oslo-Bergen-Tromsö 1970, pp. 103–136; *Kurt Gödel, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatshefte für Mathematik und Physik 37, 1930, pp. 349–360 (Satz X, p. 358).

matik lenkte. Deren geringe Aktualität zu einer Zeit, in der an Peano, Frege, Russell und Zermelo anknüpfende Probleme des Logizismus und der axiomatischen Mengenlehre im Mittelpunkt standen, Löwenheims Verwendung der durch die Whitehead-Russell-schen Bezeichnungen bereits verdrängten Schröderschen Notation (deren Überlegenheit er noch 1939 vertrat) sowie die Tatsache seiner (seit 1933 zudem unterbrochenen) beruflichen Wirksamkeit außerhalb eines Universitätslehramtes dürften zu den Gründen dafür gehören, daß er noch zu Lebzeiten in Vergessenheit geriet und heute selbst biographische Daten über ihn spärlich sind.

Leopold Löwenheim ist am 26. 6. 1878 in Krefeld geboren, studierte von 1896 bis 1900 in Berlin Mathematik, wurde 1903 Oberlehrer und später Studienrat am Jahn-Realgymnasium in Berlin-Lichtenberg; er wurde 1933 wegen „nichtarischer Abstammung“ zunächst beurlaubt und am 1. 4. 1934 in den Ruhestand versetzt. Von der Anerkennung des genannten Satzes und von vereinzelten persönlichen Besuchen durch bedeutende Logiker (z.B. Paul Bernays, Heinrich Scholz und Alfred Tarski) in den Zwanziger und Dreißiger Jahren abgesehen – wir wissen freilich nicht, ob Löwenheim weitere wissenschaftliche Kontakte von der Art des mit Frege geführten Briefwechsels pflegte –, hat die wissenschaftliche Welt von ihm wenig Kenntnis genommen. Seit etwa 1940 galt er als verschollen;²⁾ er ist am 5. 5. 1957 in Berlin-Wilmersdorf verstorben.

Der zwischen 1908 [?] und 1910 geführte, 1945 verlorengegangene Briefwechsel Löwenheims mit Frege umfaßte 10 Briefe Freges und 10 Briefe Löwenheims. Über seinen Inhalt besitzen wir außer der unten wiedergegebenen Notiz in *SchlI* die Mitteilung von Heinrich Scholz und Friedrich Bachmann in ihrem Bericht über den wissenschaftlichen Nachlaß Gottlob Freges:

„Löwenheim gelang es 1909, in einem ausführlichen Briefwechsel, der veröffentlicht werden sollte, ausgehend von „Grundgesetze der Arithmetik“ Bd. II § 90, Frege von der Möglichkeit, die formale Arithmetik einwandfrei aufzubauen, zu überzeugen“^{3).}

Der § 90 von *GGA II* steht im Zusammenhang einer sich von § 86 bis § 137 erstreckenden Kritik Freges an den frühen formalistischen Theorien, mit denen E. Heine und J. Thomae eine befriedigende Einführung der irrationalen Zahlen zu liefern hofften, und trägt den Titel: *Die formale Arithmetik und die Begriffsschrift als Spiele*. Hinsichtlich der Thomaeschen formalen Arithmetik ist Frege im § 93 der Meinung, die „Möglichkeit einer Theorie des Rechenspiels“ sei „zweifelhaft“. Nicht nur fehle dem Thomaeschen Rechenspiel ein vollständiges Regelsystem, sondern auch für die nachträglich versuchswise aufgestellten Regelsysteme der Nachweis ihrer Widerspruchsfreiheit, so daß der § 119 mit der Feststellung schließt: „Der Satz, dass die formale Arithmetik

²⁾ Cf. die zu berichtigende Angabe „Löwenheim, L. (1878–c. 1940)“ in A. Fraenkel/Y. Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam 1958, p. 409, die nach einer freundlichen Mitteilung Professor Fraenkels an den Herausgeber (Brief vom 1. 8. 1965) auf die Vermutung zurückgeht, Löwenheim sei bald nach Eingang seines Manuskripts *Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkül* (publiziert im Journal of Symbolic Logic 5, 1940, pp. 1–15) ein Opfer der Verfolgung durch die Nationalsozialisten geworden. Ebenso zu berichtigen ist die vermutlich auf Fraenkel/Bar-Hillel zurückgehende Angabe „(1878–1940)“ in W. Gellert–H. Küstner–M. Hellwich–H. Kästner (Hrsg.), *Kleine Enzyklopädie, Mathematik*, Frankfurt a.M./Zürich 1972, p. 785.

³⁾ Heinrich Scholz und Friedrich Bachmann, *Der wissenschaftliche Nachlaß von Gottlob Frege*, Actas du Congrès International de Philosophie Scientifique, Sorbonne, Paris 1935, VIII: Histoire de la Logique et de la Philosophie Scientifique, Paris 1936, pp. 24–30, Zitat p. 29.

eine vollkommen widerspruchsfreie Begründung zulasse, entbehrt demnach des Beweises, und seine Wahrheit unterliegt im Gegentheile grossen Zweifeln“.

Andererseits erklärt Frege im § 90, daß man in der Tat die Regeln der rechtmäßigen Bildung von Ausdrücken, die Schlußregeln, die Axiome etc. der Begriffsschrift „als willkürliche Festsetzungen“ hätte einführen können, so daß sie lediglich „als Figuren“ behandelt würden, mit denen sich in einer Art Deduktionsspiel operieren ließe. Die dabei und im folgenden angestellten Überlegungen zeigen eine weit tiefere Einsicht in das Wesen und die Möglichkeiten einer zwischen dem Spiel und einer Theorie des Spiels streng unterscheidenden Metamathematik sowie des Formalismus überhaupt, als sie die kritisierten Vertreter seiner Frühform besaßen. So enthalten die Ausführungen Freges über die formale Arithmetik, die ihm angesichts seiner eigenen inhaltlichen Begründung der Arithmetik überflüssig, ja sogar des Rückgriffs auf eine inhaltliche Arithmetik bedürftig erschien, neben der destruierenden Kritik auch klärende Ergebnisse konstruktiver Art, an die ein verständigungsbereiter Anhänger der formalen Arithmetik sehr wohl anknüpfen konnte, zumal die Frage der Widerspruchsfreiheit durch die Entdeckung der Russellschen Antinomie inzwischen auch für Freges inhaltlichen Begründungsversuch akut geworden war.

Welche Argumente in der Diskussion zwischen Frege und Löwenheim vorgebracht wurden und welcher Art die erreichte Verständigung war – eigenartigerweise finden sich weder in den später publizierten Arbeiten noch im wissenschaftlichen Nachlaß Freges einschlägige Ausführungen –, ist nicht bekannt.

SchLI vermerkt zu den 10 Briefen Freges an Löwenheim: „Diese Briefe sind ein Geschenk des Empfängers, März 1936“. Nicht bekannt ist, ob dieses Geschenk anlässlich eines persönlichen Besuches übergeben wurde. Nach einer brieflichen Mitteilung von Prof. F. Bachmann an Prof. P. Lorenzen (4. 6. 1965) und einer mündlichen Mitteilung von Prof. A. Tarski an den Hrsg. (Dezember 1966) hat Scholz, vermutlich im Zusammenhang mit dem wissenschaftlichen Nachlaß Freges, Löwenheim in Berlin besucht. Die Briefe Löwenheims an Frege befanden sich im *SchArch*. Alle Originalbriefe, eine bis auf XXIX/20 vollständige Abschrift, zwei 47 Seiten starke Schreibmaschinenabschriften des Briefwechsels bis zum Anfang von XXIX/14, fragmentarische Entwürfe Freges zu XXIX/17 u. 19, Bemerkungen zu XXIX/6, Entwürfe zum Briefwechsel aus der Zeit der Briefe XXIX/2 u. 3 sowie ein Separatdruck von Löwenheim, *Über das Auflösungsproblem im logischen Klassenkalkül* (Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 7. Jg., 5. Stück, 1908, pp. 89–94) sind 1945 verlorengegangen.⁴⁾ Nach einer Mitteilung des Adoptivsohnes von Löwenheim, Herrn Johannes Teichert (Berlin), vom 10. 12. 1973 sind im Nachlaß Löwenheims keine Originalstücke, Entwürfe, Kopien oder Abschriften aus einem Briefwechsel Löwenheims mit Frege vorhanden. Sollten solche Stücke im Besitz Löwenheims gewesen sein, so dürften sie bei der Zerstörung der Löwenheimschen Wohnung in Berlin-Lankwitz durch einen Luftangriff am 23. 8. 1943 verlorengegangen sein.

XXIX/1 LÖWENHEIM an FREGE Datum unbekannt¹⁾

⁴ Die Angaben über die einzelnen Stücke nach *SchLI*.

¹⁾ Der Brief, eine Abschrift davon und 2 Exemplare einer Schreibmaschinenabschrift befanden sich im *SchArch* und sind verlorengegangen. *SchLI* hat an der Stelle des Datums lediglich Punkte; es ist nicht bekannt, ob dies das Fehlen einer Datumsangabe auf dem Original des Briefes, ihre Unlesbarkeit oder etwas anderes bezeichnen sollte.

XXIX/2	FREGE an LÖWENHEIM	16. 9. 1908 ¹⁾
XXIX/3	FREGE an LÖWENHEIM	29. 11. 1908 ¹⁾
XXIX/4	LÖWENHEIM an FREGE	6. 12. 1908 ¹⁾
XXIX/5	FREGE an LÖWENHEIM	21. 12. 1908 ¹⁾
XXIX/6	LÖWENHEIM an FREGE	23. 12. 1908 ¹⁾
XXIX/7	FREGE an LÖWENHEIM	30. 12. 1908 ¹⁾
XXIX/8	LÖWENHEIM an FREGE	3. 1. 1909 ¹⁾
XXIX/9	FREGE an LÖWENHEIM	24. 1. 1909 ¹⁾
XXIX/10	LÖWENHEIM an FREGE	Datum unbekannt ¹⁾
XXIX/11	FREGE an LÖWENHEIM	13. 2. 1909 ¹⁾
XXIX/12	LÖWENHEIM an FREGE	18. 2. 1909 ¹⁾
XXIX/13	FREGE an LÖWENHEIM	12. 3. 1909 ¹⁾
XXIX/14	LÖWENHEIM an FREGE	Datum unbekannt ¹⁾
XXIX/15	FREGE an LÖWENHEIM	26. 3. 1909 ¹⁾
XXIX/16	LÖWENHEIM an FREGE	5. 4. 1909 ¹⁾
XXIX/17	FREGE an LÖWENHEIM	16. 5. 1909 ¹⁾

2–5¹⁾ Der Brief befand sich nebst einer Abschrift und 2 Exemplaren einer Schreibmaschinenabschrift im *SchArch* und ist mit diesen verlorengegangen.

6¹⁾ Der Brief, eine Abschrift und 2 Exemplare einer Schreibmaschinenabschrift befanden sich im *SchArch* und sind verlorengegangen. Nach *SchL1* enthielt das *SchArch* noch „Bemerkungen nach 3 a“; wobei „3 a“ die Kennziffer der *SchL1* für XXIX/6 ist.

7–11¹⁾ Der Brief, eine Abschrift davon und 2 Exemplare einer Schreibmaschinenabschrift befanden sich im *SchArch* und sind verlorengegangen.

12¹⁾ Der Brief, eine Abschrift und 2 Exemplare einer Schreibmaschinenabschrift befanden sich im *SchArch* und sind verlorengegangen. *SchL2u.3* vermerken als Jahr „1910“; die obige Datierung folgt *SchL1* mit ihren gegenüber den früheren Verzeichnissen vermutlich berichtigten Angaben.

13¹⁾ Der Brief, eine Abschrift und 2 Exemplare einer Schreibmaschinenabschrift befanden sich im *SchArch* und sind verlorengegangen.

14¹⁾ Der Brief und eine Abschrift davon befanden sich im *SchArch* und sind verlorengegangen. *SchL1* hat an der Stelle des Datums Punkte; cf. Anm. 1 zu XXIX/1.

15¹⁾ Der Brief und eine Abschrift befanden sich im *SchArch* und sind verlorengegangen.

16¹⁾ Der Brief und eine Abschrift befanden sich im *SchArch* und sind verlorengegangen. *SchL2u.3* verzeichnen als Jahr „1910“; die obige Datierung folgt *SchL1*, cf. Anm. 1 zu XXIX/12.

17¹⁾ Der Brief, eine Abschrift sowie ein fragmentarischer Briefentwurf befanden sich im *SchArch* und sind verlorengegangen.

XXIX/18 LÖWENHEIM an FREGE 29. 5. 1909¹⁾

XXIX/19 FREGE an LÖWENHEIM 4. 4. 1910¹⁾

XXIX/20 LÖWENHEIM an FREGE 19. 5. 1910¹⁾

Hrsg.: *SchL1* enthält für XXIX/1–20 die Angabe: „Inhalt des Briefwechsels: Diskussion über die Berechtigung der formalen Arithmetik im Anschluß an ‚Gg. II‘ [= *GGA II*], § 90. Dieser Briefwechsel sollte veröffentlicht werden“. (Nach Auffassung des Herausgebers ist die letzte Bemerkung des Zitats so zu verstehen, daß die Absicht der beiden Briefpartner zur Veröffentlichung ihres Briefwechsels dem Inhalt der Briefe selbst zu entnehmen war. Diese Auffassung wird auch gestützt durch eine Äußerung gleichen Inhalts in Scholz/Bachmann p. 29.)

Nachtrag:

Herr Prof. Bernays übersandte dem Hrsg. am 6. Mai 1976 Kopien eines Briefwechsels mit Löwenheim, bestehend aus einem Brief von Löwenheim an Bernays vom 25. Mai 1937, der Antwort Bernays' vom 15. März 1939 sowie der Rückantwort Löwenheims vom 29. März 1939. Der erste Brief Löwenheims enthält den folgenden, hier mit freundlicher Erlaubnis von Prof. Bernays und Herrn Johannes Teichert (Berlin) wiedergegebenen Absatz über den Briefwechsel mit Frege: „Die prägnante Formulierung des strengen Formalismus röhrt nicht von mir her, sondern findet sich bereits in der Diskussion zwischen Frege u. Thomae über formale Mathematik, insbes. auch der Vergleich mit dem Schachspiel. In Freges ‚Grundgesetzen der Arithm.‘ II, § 90 findet sich das Wesentliche. Nachdem Thomae die Diskussion abgebrochen hat, habe ich 1909 noch lange brieflich mit Frege die Sache diskutiert. Der Briefwechsel ist in den Händen von Herrn Scholz.“

18¹⁾ Der Brief und eine Abschrift befanden sich im *SchArch* und sind verloren gegangen.

19¹⁾ Der Brief, eine Abschrift und ein fragmentarischer Briefentwurf befanden sich im *SchArch* und sind verlorengegangen. *SchL2* vermerkt als Jahr „1909“; die obige Datierung folgt *SchL1u.3*.

20¹⁾ Der Brief wurde nach *SchL1-3* „ungeöffnet im Nachlaß [sc. Freges] vorgefunden“, wurde im *SchArch* verwahrt und ist verlorengegangen.

XXXVI. FREGE - RUSSELL

Einleitung des Herausgebers

Der Briefwechsel umfaßt zehn Briefe von Frege an Russell, einen Entwurf zu Freges Brief an Russell vom 13. 11. 1904 und elf Briefe Russells an Frege. Bis auf ein nicht aufgefundenes Schreiben (XXXVI/20) befinden sich die Originale der Briefe Russells (cf. dazu die *Geschichte des brieflichen Nachlasses und Grundsätze für seine Edition* in diesem Band, p. XX) als Bestandteil der *SlgDarmst* unter der Signatur H 1897 (14) in der Handschriftenabteilung der *Staatsbibliothek Preußischer Kulturbesitz* in Berlin-Dahlem; der ebenfalls zu dieser Sammlung gehörende Briefentwurf Freges trägt die Signatur H 1884.

Die Briefe Freges an Russell haben eine sehr wechselvolle Überlieferungsgeschichte. Russell übersandte Heinrich Scholz am 18. 11. 1935 alle von ihm noch aufgefundenen Originalbriefe Freges als Geschenk und bat zugleich um gelegentliche Überlassung von Kopien. Mit einem Brief vom 7. 12. 1935 dankt Scholz für diese Sendung und verspricht, Kopien anzufertigen und an Russell senden zu lassen. In einem weiteren Brief vom 14. 2. 1936 bittet er Russell um Geduld wegen der Kopien, für deren Anfertigung die Mittel noch ausstünden. Er berichtet zugleich, daß er die Originalbriefe Russells an Frege in der Berliner Staatsbibliothek aufgefunden habe und ersucht Russell um die Erlaubnis zur Publikation dieses Briefwechsels. Russell gibt die erbetene Zustimmung in einem Brief vom 3. 3. 1936, aus dem sich weiterhin erschließen läßt, daß er die von Scholz angekündigten Fotokopien der Briefe Freges inzwischen erhalten hat, denn er schreibt: „Ich hatte nicht die Absicht, photographische Kopien der Frege-Briefe zu verlangen; ich dachte nur an Kopien mit der Schreibmaschine. Ich bin Ihnen aber sehr dankbar für die Mühe die Sie sich gemacht haben“. Nur diesem kleinen Mißverständnis von Scholz ist es zu verdanken, daß von den 1945 verbrannten Originalbriefen Freges außer (nicht ganz verlässlichen) Abschriften auch Fotokopien erhalten geblieben sind. Als verloren gelten müssen dagegen die Entwürfe zu Freges Briefen XXXVI/2, 4, 7, 10, 12, 14 u. 16, die sich laut *SchLI* im *SchArch* befanden.

Als in den sechziger Jahren die Scholzschen Pläne zur Publikation von Freges wissenschaftlichem Nachlaß und Briefwechsel durch Hans Hermes wieder aufgenommen wurden, bat dieser in einem Brief vom 7. 2. 1963 Russell um zeitweilige Überlassung der ihm 1936 von Scholz zugesandten Fotokopien, um die in Münster allein erhalten gebliebenen Abschriften der Fregebriefe auf ihre Zuverlässigkeit überprüfen zu können. Nach einer vorläufigen Antwort vom 16. 2. 1963 sandte Russell am 23. 2. 1963 Prof. Hermes, mit der Bitte um Rückgabe nach der Anfertigung von Zweitkopien, alle von ihm gefundenen Briefe Freges. Der Vergleich mit *SchLI* zeigt, daß darunter alle von Scholz an Russell gesandten Fotokopien waren. Bei dieser Sendung befand sich darüber hinaus, wie sich erschließen läßt, das Original des Briefes XXXVI/21, das in *SchLI* nicht aufgeführt ist und somit nicht zu dem von Russell an Scholz gesandten Konvolut von Fregebriefen gehört hatte.

Nach der Herstellung von Kopien dieser Fregebriefe schickte Prof. Hermes die Scholzschen Fotokopien und den Originalbrief XXXVI/21 am 20. 3. 1963 an Russell zurück; sie befinden sich heute im *Russell-Archiv* der *Mills Memorial Library* an der *McMaster University* in *Hamilton/Ontario*, Kanada, die von Hermes angefertigten Zweitkopien sind Bestandteil des Frege-Archivs. Eine englische Übersetzung von XXXVI/1 u. 2 durch *Beverly Woodward* erschien bereits 1967 im Druck, cf. <66>, eine Art Kom-

mentar zum gesamten Frege-Russell-Briefwechsel mit einzelnen Zitaten lieferte Hans-Dieter Sluga, *Frege und die Typentheorie* in Max Käsbaumer u. Franz von Kutschera (Hrsg.), *Logik und Logikkalkül*, Freiburg/München 1962, pp. 195–209.

Der von Russell entdeckte Widerspruch, heute nach ihm als „Russellsche Antinomie“ bezeichnet, steht im Mittelpunkt des Briefwechsels. Dieser liefert Aufschlüsse über den Problemzusammenhang, bei dessen Untersuchung Russell auf die Antinomie stieß, und über Freges Reaktion auf die Herleitbarkeit der Antinomie im System seiner *Grundgesetze der Arithmetik*. Sowohl Frege als Russell stellen verschiedene Lösungsmöglichkeiten zur Diskussion, die nicht nur auf ihre „technische“ Brauchbarkeit zur Vermeidung der Antinomie untersucht werden, sondern auch auf ihren philosophischen Hintergrund. Dabei kommen alle Kernbegriffe der Fregeschen Philosophie der Logik und Arithmetik zur Sprache (Gegenstand, Begriff, Klasse, Sinn und Bedeutung, Satz, Wahrheit usw.).

In XXXVI/1 äußert Russell Bedenken dagegen, daß Frege in der *BS* den Übergang von den Zeichen bestimmter Funktionen zu Funktionsvariablen offenbar ohne Einschränkung zulassen möchte („Es kann auch umgekehrt das Argument bestimmt, die Function aber unbestimmt sein“, *BS*, p. 17). Er begründet seine Zweifel durch den Hinweis darauf, daß sich ein Widerspruch sowohl aus der bejahenden als aus der verneinenden Antwort auf die Frage ergibt, ob das Prädikat *w*, ein von sich selbst nicht prädizierbares Prädikat zu sein, von sich selbst prädiziert werden könne. Russell symbolisiert dies in Peanoscher Notation (mit einer in Anm. 3 zu XXXVI/1 erläuterten kleinen Abweichung) durch

$$w = \text{cls} \cap x^z (x \sim \varepsilon x). \square: w \varepsilon w . = . w \sim \varepsilon w ..$$

Aufgrund dieses Widerspruchs schließt Russell, daß *w* kein Prädikat sei und es keine Klasse der sich selbst nicht als Element angehörenden Klassen gebe. Im übrigen bittet er Frege um Zusendung von Sonderdrucken, da er vor dem Abschluß eines Buches über die Prinzipien der Mathematik stehe, in dem er Freges Werk ausführlich besprechen wolle; gemeint sind die *Principles of Mathematics*, die mit einem *Appendix A. The Logical and Arithmetical Doctrines of Frege* (pp. 501–522) 1903 in Cambridge erschienen.

Freges Antwort XXXVI/2 enthält den vielzitierten Satz: „Ihre Entdeckung des Widerspruchs hat mich auf's Höchste überrascht und, fast möchte ich sagen, bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik sich aufzubauen dachte, in's Wanken geräth“. Angesichts der Tatsache, daß Russells Entdeckung Freges System der *GGA* als inkonsistent erweist, verdient Freges anschließende sachliche Diskussion der Antinomie in vollem Maße die Bewunderung, die Russell in seinen schönen Zeilen an Prof. van Heijenoort vom 23. 11. 1962 geäußert hat (abgedruckt in Jean van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge, Mass., 1967, p. 127). Frege zieht aus der Herleitbarkeit der Russellschen Antinomie zwei Folgerungen. Erstens sei das Grundgesetz V der *GGA* (§ 20, p. 36) falsch, d.h. „die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Wertverlaufsgleichheit [...] nicht immer erlaubt“, weshalb auch die Berechtigung zweifelhaft sei, den Umfang eines beliebigen, durch einen Funktionsnamen „ $\Phi(\xi)$ “ gegebenen Begriffs durch den entsprechenden Wertverlaufsnamen „ $\xi\Phi(\varepsilon)$ “ zu bezeichnen. Wenig später, im *Nachwort zu GGA II* (pp. 253–265), hat Frege seine in der Sekundärliteratur als „Frege's Way Out“ erörterte (inzwischen freilich als undurchführbar erkannte) Lösung der Antinomie vorgeschlagen und dabei das Grundgesetz V insofern etwas anders eingeschätzt, als er schreibt: „Der Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in

eine Werthverlaufsgleichheit steht nichts im Wege; nur die umgekehrte Umwandlung ist als nicht immer erlaubt nachgewiesen“ (l.c., p. 257 b).

Freges zweite Folgerung aus der Herleitbarkeit der Russellschen Antinomie ist, daß die Ausführungen im § 31 der *GGA* offenbar ihren Zweck nicht erfüllen, allen nach den Regeln des Systems korrekt gebildeten Zeichenverbindungen eine Bedeutung zu sichern. Es empfiehlt sich, zur Erläuterung dieser Folgerung die von Frege im gleichen Brief für die Formulierung der Antinomie vorgeschlagene Präzisierung heranzuziehen. Da ein Prädikat in der Regel eine Funktion erster Stufe sei, könne man nicht sagen (wie Russell dies tut), „Ein Praedicat wird von sich selbst praedicirt“. Nach Freges Einführung von „ $\Delta \wedge \dot{\epsilon}\Phi(\epsilon)$ “ als gleichbedeutend mit „ $\Phi(\Delta)$ “ in *GGA I*, p. 52, läßt sich das Gemeinte für einen Begriff $\Phi(\xi)$ und seinen als Δ gewählten Umfang $\dot{\epsilon}\Phi(\epsilon)$ als „ $\Phi(\dot{\epsilon}\Phi(\epsilon))$ “ oder „ $\dot{\epsilon}\Phi(\epsilon) \wedge \dot{\epsilon}\Phi(\epsilon)$ “ formulieren. Nun ist Freges zweite Folgerung als Anwendung auf den Begriff „sich selbst nicht angehörender Begriffsumfang“ – er sei hier durch „ $N(\xi)$ “ bezeichnet – leicht nachvollziehbar. Nachdem für Frege ein Begriff eine einstellige Funktion ist, deren Werte sämtlich Wahrheitswerte sind (cf. *GGA I*, p. 8), muß der Ausdruck „ $N(\dot{\epsilon}N(\epsilon))$ “ entweder das Wahre oder das Falsche als Bedeutung haben. Da sich in beiden Fällen gemäß Russells Beweisführung ein Widerspruch ergibt, schließt Frege, daß der Ausdruck „ $N(\dot{\epsilon}N(\epsilon))$ “ keine Bedeutung habe. Daß dies Freges Auffassung ist, wird durch seine Bemerkung in XXXVI/4 bestätigt, daß „der Eigenname » $\dot{\epsilon}(\epsilon^2 = 2)$ « als bedeutungslos erkannt“ sei, falls die Frage, ob die Klasse der Quadratwurzeln aus 2 selbst eine Quadratwurzel sei, „weder bejaht noch verneint werden könnte“. Der vorliegende Sachverhalt ließe sich allerdings auch so beschreiben, daß „ $N(\dot{\epsilon}N(\epsilon))$ “ durch die Bedeutungsfestsetzungen der *GGA* zwei verschiedene Bedeutungen, nämlich einmal das Wahre und einmal das Falsche, zugeordnet erhielte und gerade darin die Inkonsistenz des Systems der *GGA* liege. Der sich hier eröffnende Fragenkreis ist in der Sekundärliteratur noch wenig untersucht (cf. Ch. Thiel, *Zur Inkonsistenz der Fregeschen Mengenlehre*, in Ch. Thiel (Hrsg.), *Frege und die moderne Grundlagenforschung*, Meisenheim 1975, pp. 134–159). Abschließend kündigt Frege das baldige Erscheinen des zweiten Bandes der *GGA* an und fügt hinzu: „Ich werde ihm wohl einen Anhang geben müssen, in dem Ihre Entdeckung gewürdigt wird“. Dieser Anhang ist das eben genannte „Nachwort“ zu *GGA II*.

Im Brief XXXVI/3 kommt Russell auf die im ersten Brief gestellte Frage der Funktionsvariablen zurück und äußert die Meinung, daß man Begriffe im allgemeinen „variieren“ könne und der Widerspruch nur auftrete, wenn das Argument selber Funktion der Funktion sei, Funktion und Argument also nicht voneinander unabhängig seien (so z.B. in „ $\varphi\{\dot{\epsilon}\varphi(\epsilon)\}$ “, wo das Argument $\dot{\epsilon}\varphi(\epsilon)$ selbst Funktion der Variablen φ sei). Russell hat diese Andeutung in Ch. X der *Principles* genauer ausgeführt. Im vorliegenden Brief vermutet er, Funktionen von der Form $\varphi\{F(\varphi)\}$ mit konstantem F und variablen φ seien „gewiss für jeden Werth von φ erlaubt, jedoch gefährlich wo der Umfang in Frage kommt“. Die hier vermutete Sonderstellung des eigenen Begriffsumfangs ist auch charakteristisch für Freges oben erwähnten Lösungsversuch im Nachwort zu *GGA II*, der durch Russells Bemerkung angeregt worden sein könnte. Nach der Erwähnung, daß die Funktion $\neg\neg\varphi(\varphi)$ zu einem ähnlichen Widerspruch führe wie $\neg\neg\varphi\{\dot{\epsilon}\varphi(\epsilon)\}$, gibt Russell einen interessanten Hinweis darauf, wie er zur Entdeckung seiner Antinomie geführt wurde. Dies geschah anscheinend ganz unabhängig von der Lektüre der *GGA* im Rahmen von Überlegungen zur Mengenlehre, nämlich bei der Analyse des Cantorschen Beweises, daß es keine größte Kardinalzahl gibt. Diese Darstellung hat Russell in den *Principles* am Anfang von § 100 mit der Feststellung bestätigt, er habe die Antinomie bei dem Versuch entdeckt, Cantors Beweis für die Nichtexistenz

cf. Anm. 3 zu XXXVI/19) aufgegebener Vorschlag zum Aufbau der klassischen Junktorenlogik mittels Subjunktion und Allquantor. Während einige Bemerkungen des Kommentars durch inzwischen erzielte Ergebnisse (z.B. die Unhaltbarkeit des Frege'schen Vermeidungsversuchs für die Russellsche Antinomie im „Nachwort“ zu *GGA II*) überholt sind, waren nicht nur die in ihm enthaltenen Hinweise auf heranzuziehende Literatur und Parallelstellen im Werk Freges überaus hilfreich, es konnten auch einzelne Anmerkungen (z.B. Anm. 4 zu XXXVI/3, Anm. 2 zu XXXVI/6 sowie Anm. 3 und 4 zu XXXVI/15) ohne wesentliche Änderungen berücksichtigt werden. Für diese durchwegs wertvollen Vorarbeiten, die den vorliegenden Kommentar vielfach in der Form von Anregungen beeinflusst, gelegentlich auch direkt in ihn Eingang gefunden haben, möchte der jetzige Herausgeber den früheren Bearbeitern wärmstens danken.

XXXVI/1 RUSSELL an FREGE 16. 6. 1902¹⁾

Friday's Hill.
Haslemere.²⁾

Den 16 Juni 1902

Sehr geehrter Herr College!

Seit anderthalb Jahren kenne ich Ihre „Grundgesetze der Arithmetik“, aber jetzt erst ist es mir möglich geworden die Zeit zu finden für das gründliche Studium das ich Ihren Schriften zu widmen beabsichtige. Ich finde mich in allen Hauptsachen mit Ihnen in vollem Einklang, besonders in der Verwerfung jedes psychologischen Moments von der Logik, und in der Schätzung einer Begriffsschrift für die Grundlagen der Mathematik und der formalen Logik, welche übrigens kaum zu unterscheiden sind. In vielen einzelnen Fragen finde ich bei Ihnen Discussionen, Unterscheidungen, und Definitionen, die man vergebens bei anderen Logikern sucht. Besonders über die Funktion (§ 9 Ihrer Begriffsschrift) bin ich bis ins Einzelne selbständig zu denselben Ansichten geführt worden. Nur in einem Punkte ist mir eine Schwierigkeit begegnet. Sie behaupten (S. 17) es könne auch die Funktion das unbestimmte Element bilden. Dies habe ich früher geglaubt, jedoch jetzt scheint mir diese Ansicht zweifelhaft, wegen des folgenden Widerspruchs: Sei w das Prädicat, ein Prädicat zu sein welches von sich selbst nicht prädicirt werden kann. Kann man w von sich selbst prädiciren? Aus jeder Antwort folgt das Gegenteil. Deshalb muss man schliessen dass w kein Prädicat ist. Ebenso giebt es keine Klasse (als Ganzes) derjenigen Klassen die als Ganze sich selber nicht angehören. Daraus schliesse ich dass unter gewissen Umständen eine definierbare Menge kein Ganzes bildet.

Ich bin im Begriff ein Buch über die Prinzipien der Mathematik zu vollenden, und ich möchte darin Ihr Werk sehr ausführlich besprechen. Ihre

¹⁾ Das Original des Briefes befindet sich in der *SigDarmst* unter der Signatur H 1897.

²⁾ Im sonst handschriftlichen Original ist der Briefkopf vorgedruckt.

Bücher habe ich schon, oder ich kaufe sie bald; aber ich wäre Ihnen sehr dankbar wenn Sie mir Sonderabdrücke Ihrer Artikel in verschiedenen Zeitschriften schicken könnten. Falls dies aber unmöglich sein sollte, so schaffe ich sie mir aus einer Bibliothek.

Die exakte Behandlung der Logik, in den Fundamentalfragen, wo die Symbole versagen, ist sehr zurückgeblieben; bei Ihnen finde ich das Beste, was ich aus unserer Zeit kenne, und deshalb habe ich mir erlaubt, Ihnen mein tiefes Respekt auszudrücken. Es ist sehr zu bedauern, dass Sie nicht dazu gelangt sind, den zweiten Band Ihrer Grundgesetze zu veröffentlichen; hoffentlich wird das doch noch geschehen.

Mit hochachtungsvollem Grusse,
Ihr ergebenster
Bertrand Russell.

Obiger Widerspruch drückt sich in Peano's Begriffsschrift wie folgt aus:

$$w = \text{cls} \cap x^3 (x \sim \varepsilon x) . \supset : w \varepsilon w . = . w \sim \varepsilon w .^3)$$

Ich habe darüber an Peano geschrieben, aber er bleibt mir eine Antwort schuldig.

XXXVI/2 FREGE an RUSSELL 22. 6. 1902¹⁾

Jena, den 22. Juni 1902.

Sehr geehrter Herr College!

Besten Dank für Ihren interessanten Brief vom 16. Juni! Ich freue mich dass Sie in Vielem mit mir einverstanden sind, und dass Sie die Absicht haben, mein Werk ausführlich zu besprechen. Auf Ihren Wunsch sende ich Ihnen die folgenden Drucksachen

1. Kritische Beleuchtung etc.
2. Ueber die Begriffsschrift des Herrn Peano etc.
3. Ueber Begriff und Gegenstand,
4. Ueber Sinn und Bedeutung,
5. Ueber formale Theorien der Arithmetik.²⁾

³ Diese Formel drückt aus, daß, wenn w die Klasse der x mit $x \notin x$ ist, $w \in w \leftrightarrow w \notin w$ gilt. Russell übernimmt die Notation im wesentlichen unverändert aus *G. Peano, Formulaire de Mathématiques*, Tome II, § 2 (Arithmétique), Turin 9. VIII. 1898, cf. Formel 450 auf p. VII:

$u \varepsilon \text{Cls} . \supset . \text{Cls } u = \text{Cls} \cap x^3 (x \supset a) = \text{„classe de } u“ \text{ Df.}$

Dabei ist das „ a “ in „ u “ zu berichtigen, cf. op. cit., § 1 (Logique Mathématique), Turin 11. VIII. 1897, p. 15, Formel 450, deren Schreibung dort von der in § 2 gewählten durch die Verwendung des Buchstabens „K“ statt „Cl“ und der Notation „ $\bar{x}\varepsilon$ “ statt „ x^3 “ abweicht.

² Das Original des Briefes befand sich nach *SchLI* im *SchArch* und ist verlorengegangen. Fotokopien befinden sich im Frege-Archiv und im Russell-Archiv in Hamilton, Ontario.

² Das sind, in der angegebenen Reihenfolge: <22>, <24>, <17>, <16> und <13>.

Ich habe einen leeren Umschlag erhalten, dessen Aufschrift von Ihrer Hand zu sein scheint. Ich vermuthe, dass Sie die Absicht gehabt haben, mir etwas zu schicken, was durch einen Zufall verloren gegangen ist. Ist dies der Fall, so danke ich Ihnen für die liebenswürdige Absicht. Die Vorderseite des Umschlags lege ich bei.

Wenn ich meine Begriffsschrift jetzt wieder lese, finde ich, dass ich in manchen Punkten anderer Ansicht geworden bin, wie Sie aus einer Vergleichung mit meinen Grundgesetzen d. A. ersehen werden. Den mit „Nicht minder erkennt man“ anfangenden Absatz auf S. 7 meiner Begriffsschrift bitte ich zu streichen, da er fehlerhaft ist, was übrigens ohne nachtheilige Folgen für den übrigen Inhalt des Büchleins geblieben ist.³⁾

Ihre Entdeckung des Widerspruchs hat mich auf's Höchste überrascht und, fast möchte ich sagen, bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik sich aufzubauen dachte, in's Wanken geräth. Es scheint danach, dass die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Werthverlaufsgleichheit (§ 9 meiner Grundgesetze) nicht immer erlaubt ist, dass mein Gesetz V (§ 20. S. 36) falsch ist und dass meine Ausführungen im § 31 nicht genügen, in allen Fällen meinen Zeichenverbindungen eine Bedeutung zu sichern. Ich muss noch weiter über die Sache nachdenken. Sie ist um so ernster, als mit dem Wegfall meines Gesetzes V nicht nur die Grundlage meiner Arithmetik, sondern die einzige mögliche Grundlage der Arithmetik überhaupt zu versinken scheint. Und doch, sollte ich denken, muss es möglich sein, solche Bedingungen für die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Werthverlaufsgleichheit aufzustellen, dass das Wesentliche meiner Beweise erhalten bleibt. Jedenfalls ist Ihre Entdeckung sehr merkwürdig und wird vielleicht einen grossen Fortschritt in der Logik zur Folge haben, so unerwünscht sie auf den ersten Blick auch scheint.

Uebrigens scheint mir der Ausdruck „Ein Praedicat wird von sich selbst praedicirt“ nicht genau zu sein. Ein Praedicat ist in der Regel eine Function erster Stufe, die als Argument einen Gegenstand verlangt und also nicht sich selbst als Argument (Subject) haben kann. Ich möchte also lieber sagen: „Ein Begriff wird von seinem eigenen Umfange praedicirt“. Wenn die Function $\Phi(\xi)$ ein Begriff ist, so bezeichne ich dessen Umfang (oder die zugehörige

³⁾ Fehlerhaft ist in dem genannten Absatz der erste Satz, in dem Frege erklärt, daß die Formel „ $\vdash \Gamma'$ “, „den Fall leugnet, wo B bejaht wird, A und Γ aber verneint

$$\begin{array}{c} A \\ \backslash \\ B \end{array}$$

werden“ (*BS*, p. 7). Der Fehler wurde bereits von *Ernst Schröder* auf p. 88 seiner Rezension von *BS* (Zeitschrift für Mathematik und Physik 25, 1880, pp. 81–94) berichtigt, mit der plausiblen Vermutung, Frege habe bei der Umformung des Begriffsschriftausdrucks, die korrekterweise zu „non(non(B et non A)) et non Γ' “ führt, das zweite Negationszeichen versehentlich übersprungen. Weniger deutlich sind *Husserls* Bemerkungen zu der Stelle, die *I. Angelelli* mitgeteilt hat, cf. Anhang II: *Husserls Anmerkungen zur „Begriffsschrift“ in Gottlob Frege, Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Zweite Auflage. Mit *E. Husserls* und *H. Scholz*’ Anmerkungen herausgegeben von *Ignacio Angelelli*, Hildesheim 1964.

Klasse) durch » $\dot{e}\Phi(\varepsilon)$ « (die Berechtigung hierzu ist mir nun freilich zweifelhaft geworden). In » $\Phi(\dot{e}\Phi(\varepsilon))$ « oder » $\dot{e}\Phi(\varepsilon)\wedge\dot{e}\Phi(\varepsilon)$ « haben wir dann die Praedicirung des Begriffes $\Phi(\xi)$ von seinem eigenen Umfange.

Der zweite Band meiner Grundgesetze soll demnächst erscheinen. Ich werde ihm wohl einen Anhang geben müssen, in dem Ihre Entdeckung gewürdigt wird. Wenn ich nur erst den richtigen Gesichtspunkt dafür hätte!

Mit hochachtungsvollem Grusse

Ihr ergebenster

G. Frege.

XXXVI/3 RUSSELL an FREGE 24. 6. 1902¹⁾

Friday's Hill, Haslemere, den 24. Juni 1902.

Sehr geehrter Herr College!

Besten Dank für Ihren Brief, und für die Sendungen Ihrer Werke. Ich schicke Ihnen nochmals die Sachen die in der Post verloren gegangen sind. Den Fehler auf S. 7 Ihrer Begriffsschrift hatte ich schon corrigirt: er ist aber, wie Sie sagen, gänzlich ohne schädliche Folgen geblieben.

Ich bin der Meinung dass man im allgemeinen Begriffe varieiren kann, und dass der Widerspruch nur entsteht wenn das Argument selber Funktion der Funktion ist, d.h. wenn Funktion und Argument nicht unabhängig varieiren können. In der Funktion $\varphi\{\dot{e}\varphi(\varepsilon)\}$ ist φ die einzige Variable, und das Argument $\dot{e}\varphi(\varepsilon)$ ist selber (nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise) Funktion von φ . Es scheint als seien Funktionen von der Form $\varphi\{F(\varphi)\}$, wo F constant und φ variabel, gewiss für jeden Werth von φ erlaubt, jedoch gefährlich wo der Umfang in Frage kommt. Ich nenne sie quadratische Formen: man könnte fast geneigt sein ein logisch Imaginäres dem algebraischen nachzubilden²⁾. Bei solchen Funktionen erlangt man sogleich eine gesättigte Funktion wenn man den Werth von φ angiebt; doch sind sie nicht Funktionen erster Stufe, noch haben sie constante Argumente. Die Funktion $\neg\neg\varphi(\varphi)$ führt zu einem ähnlichen Widerspruch wie $\neg\neg\varphi\{\dot{e}\varphi(\varepsilon)\}$.

Ich bin auf folgender Weise zum Widerspruch geführt worden. Cantor hat, wie Sie natürlich wissen, einen Beweis aufgestellt dass es keine grösste Anzahl giebt. Dieser Beweis ist folgender: $R\varepsilon 1\rightarrow 1. \varrho \supset Cls'\varrho. w=\varrho \cap xz(x \sim \varepsilon 1 \varrho x).$
 $\supset_R. w \sim \varepsilon \varrho : \supset. Nc' Cls'\varrho > Nc'\varrho^*$). (Dies ist bloss das wesentlichste des

*Die Symbole finden sich erklärt in Revue de Mathématiques, VII, 2.^{2a)}

¹ Das Original des Briefes befindet sich in der Slg Darmst unter der Signatur H 1897.

² Cf. B. Russell, *The Principles of Mathematics*, Cambridge 1903, 2. Aufl. London 1937, pp. 104, 107, 512 u. 514.

^{2a)} Dieser Hinweis bezieht sich vermutlich auf B. Russell, *Sur la logique des relations avec des applications à la théorie des séries*, Rivista di Matematica (Turin, = Revue de Mathématiques) 7 (1900–1901) pp. 115–148. Dort sind jedoch die hier verwendeten Symbole keineswegs alle erklärt. Cf. im übrigen Anm. 3 des Hrsg. Im Original des Briefes ist nicht deutlich erkennbar, ob das in „ $1\rightarrow 1$ “ zwischen den beiden Ziffern stehende Zeichen ein Pfeil sein soll; dieser ist hier entsprechend Russells Gebrauch in den *Principia* verwendet.

Beweises.) Nun gibt es aber Begriffe deren Umfang Alles umfasst; diese sollten also die grösste Anzahl haben. Ich habe probiert, eine ein-eindeutige Beziehung zwischen allen Objekten und allen Klassen aufzustellen; als ich mit meiner besonderen Beziehung den Cantor'schen Beweis angewendet habe, ist mir die Klasse $\text{Cls} \cap x \exists (x \sim \varepsilon x)$ übrig geblieben, obgleich alle Klassen schon aufgezählt waren. Schon seit ein Jahr denke ich über diesen Widerspruch nach; ich glaube das ist das einzige, dass Funktion und Argument unabhängig variieren können müssen.³⁾

Aus dem was Sie S. 37 sagen, dass ein Funktionsname niemals die Stelle eines Eigennamens einnehmen kann (ich spreche von den *Grundgesetzen*) entsteht eine philosophische Schwierigkeit. Ich weiss sehr wohl welche guten Gründe für diese Ansicht zu finden sind; doch widerspricht sie sich. Denn “ ξ kann niemals die Stelle eines Eigennamens einnehmen” ist ein falscher Satz wenn ξ ein Eigenname ist, aber sonst ist er überhaupt kein Satz. Wenn es irgendetwas geben kann, was nicht Gegenstand ist, so kann man diese Thatsache nicht ohne Widerspruch aussagen; denn in der Aussage wird das fragliche Etwas zum Gegenstande. Es scheint mir daher zweifelhaft ob man das φ in φx überhaupt als etwas betrachten kann. Bei diesem Punkte aber vertieft man sich in die philosophische Logik.

S. 49 sagen Sie dass $\Gamma = \Delta$ eine Bedeutung zukommt wenn Γ und Δ rechte Werthverlaufsnamen oder Namen von Wahrheitswerthen sind. Doch finde ich im vorhergehenden keine Erklärung von $\Gamma = \Delta$ für den Fall wo das eine ein Werthverlaufsnname ist und das andere der Name eines Wahrheitswertes,

³⁾ Russells Formel ist als Skizze des Cantorschen Beweises für sich allein nicht verständlich. Durch einen Vergleich mit der Ausführung dieses Beweises in *B. Russell, On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types*, Proc. London Math. Soc., Ser. 2, vol. 4 (1907), Part 1 (issued March 7, 1906), pp. 29–53 (*ibid.* p. 32) sowie mit Russells Beweisskizze in den *Principles* (op. cit.), § 349, lässt sich der Inhalt der Formel jedoch wie folgt rekonstruieren.

Gemäß Peanos Notation und Russells Verwendungsweise der entsprechenden Buchstaben in dem von ihm zitierten Aufsatz und den *Principles* (op. cit.) ist ϱ der Vorbereich, $\dot{\varrho}$ der Nachbereich der eineindeutigen Abbildung R , $\text{Cls}'\varrho$ die Potenzklasse von ϱ , $\text{Nr}'\varrho$ die Kardinalzahl (Mächtigkeit) von ϱ , das Zeichen „ \supset “ zwischen Klassenzeichen wird wie bei Peano als Inklusionszeichen, d. h. wie das heutige „ \subseteq “ verwendet. Die Formel besagt dann, daß die Mächtigkeit der Potenzklasse einer Klasse ϱ größer ist als die Mächtigkeit von ϱ selbst, weil bei jeder eineindeutigen Abbildung R von ϱ auf eine Klasse von Teilklassen von ϱ (insbesondere auf die Klasse aller Teilklassen von ϱ) die Klasse w aller Elemente von ϱ , die nicht Element ihres Bildes unter R sind, nicht als Bild unter R auftritt. Träte w nämlich als Bild eines Elements x von ϱ auf, so würde einerseits die Annahme $x \in w$ aufgrund der definierenden Bedingung von w zu $x \notin Rx$ und damit wegen der Annahme $w = Rx$ zu $x \notin w$ (also zu ihrem eigenen Gegenteil), andererseits aber die Annahme $x \notin w$ aufgrund von $w = Rx$ zunächst zu $x \notin Rx$ und zusammen mit dem jedenfalls gültigen $x \in \varrho$ aufgrund der definierenden Bedingung von w zu $x \in w$, also wiederum zum Gegenteil der Annahme und somit insgesamt zu einem Widerspruch.

Trifft diese Rekonstruktion zu, so ist in Russells Formel zwischen den beiden Subjunktionszeichen statt „ $w \sim \varepsilon \varrho$ “ allerdings „ $w \sim \varepsilon \dot{\varrho}$ “ zu lesen. Cf. im übrigen die Erläuterungen des Hrsg. in der Einleitung zu diesem Briefwechsel.

ausser für den Fall wo der fragliche Werthverlauf Alles oder Nichts umfasst. Ich glaube Sie aber in diesem Punkte nicht richtig verstanden zu haben^{4).}

Bis jetzt habe ich nur Ihre Begriffsschrift und Ihre Grundgesetze gelesen: die anderen Werke werde ich sogleich studiren.

Mit hochachtungsvollem Grusse
Ihr ergebenster
Bertrand Russell.

XXXVI/4 FREGE an RUSSELL 29. 6. 1902¹⁾

Jena, den 29. Juni 1902.

Sehr geehrter Herr College!

Ich habe Ihren Brief vom 24. und Ihre Drucksachen erhalten und danke bestens dafür.

Was den von Ihnen aufgefundenen Widerspruch betrifft, so verstehe ich vielleicht nicht ganz, was Sie darüber sagen. Sie wollen, wie es scheint, Formeln wie » $\varphi(\hat{e}\varphi(\varepsilon))$ « verbieten, um den Widerspruch zu vermeiden. Aber wenn Sie ein Zeichen für den Umfang eines Begriffes (eine Klasse) überhaupt als bedeutungsvollen Eigennamen zulassen, also die Klasse als Gegenstand anerkennen, so muss diese Klasse selbst entweder unter den Begriff fallen oder nicht; tertium non datur. Erkennen Sie die Klasse der Quadratwurzeln aus 2 an, so ist die Frage nicht zu umgehen, ob diese Klasse eine Quadratwurzel aus 2 sei. Sollte sich zeigen, dass diese Frage weder bejaht noch verneint werden könnte, so wäre damit der Eigennname » $\hat{e}(\varepsilon^2 = 2)$ « als bedeutungslos erkannt. Oder sollte man die Werthverläufe (Begriffsumfänge, Zahlen) als eine besondere Art von Gegenständen hinstellen, denen gewisse Praedicate weder zu- noch abgesprochen werden können? Das würde doch auch wohl auf grosse Schwierigkeiten stossen.

Was Ihr Bedenken betrifft hinsichtlich meines Satzes, dass ein Functionsname nie die Stelle eines Eigennamens einnehmen könne, so müssen wir scharf unterscheiden zwischen dem Namen oder Zeichen und seiner Bedeutung. Wenn ich einen Eigennamen in einem Satze gebrauche, so spreche ich nicht von diesem Eigennamen, sondern von dem Gegenstande, den er bezeichnet. Es kann aber vorkommen, dass ich von dem Namen selber sprechen will; dann schliesse ich ihn in Anführungszeichen ein. Ich will einmal, um die

⁴ In der Tat scheint Russell hier Freges Festsetzung im § 10 von *GGA I* (p. 17), daß der Wertverlauf $\hat{e}(\neg\varepsilon)$ das Wahre und der Wertverlauf $\hat{e}(\varepsilon = \neg\top \wedge \alpha = \alpha)$ das Falsche sein solle, dahingehend mißverstanden zu haben, daß diese Wertverläufe „Alles oder Nichts“ umfassen sollten, nämlich der erste Alles, der zweite Nichts. Frege berichtigt dieses Mißverständnis in seinem Antwortbrief XXXVI/4.

^{4¹} Das Original des Briefes befand sich nach *SchL1* im *SchArch* und ist verlorengegangen. Fotokopien befinden sich im Frege-Archiv und im Russell-Archiv in Hamilton, Ontario.

SACH- UND PERSONENREGISTER

Dieses Stichwortregister erfaßt Freges und seiner Briefpartner Schreiben sowie die Herausgeberkommentare; nicht erfaßt sind die *Einleitung der Herausgeber* und der *Anhang*. Kursive Ziffern zeigen an, daß das Stichwort nur in den Herausgeberkommentaren erscheint. Die Rechtschreibung wurde der heutigen angeglichen.

Nicht im Text vorkommende erläuternde Zusätze stehen in eckigen Klammern. Komma in Verweisen trennen Oberstichwörter von Unterstichwörtern, Semikola in Verweisen trennen selbständige Stichwörter.

- Abbe, E. 52
Abbildung
- eindeutig-umkehrbare 143
- Prinzip der logischen A. verschiedener Wissenschaften aufeinander 38
Acervus 183
Additionszeichen 194
affirmation 20, 22
Aggregat 111, 223, 225sq. cf. Ganzes; Haufe; System
algebraisches Urteil 256
Allaussage (Form mit ‚Alle‘) 93, 106 cf. universal
alle 150
allgemein (Gedanke, proposition, Urteil) 20, 22, 34sq., 257
- Übergang vom A.en zum Besonderen 35sq.
Allgemeinheit 35, 90, 103sq., 116sq., 176sq., 227
Allgemeinheitsbezeichnung 176
alternative 20, 22
Analyse [logische etc.] 102, 105, 181, 185sq.
Analysis 3, 172
analytisches Urteil 25, 163, 257
andeutend (Bestandteil, Buchstabe, Zeichen; Funktionsandeutung) 34sq., 90, 103, 117, 177 cf. Buchstabe; Variable
anerkennen cf. wahr, einen Gedanken als w. anerkennen
Anführungszeichen 133, 197, 217
Angelelli, I. 91, 213
Anscombe, G. E. M. 264sq.
Anzahl 89, 140, 163, 215sq., 223, 238, 239 cf. Kardinalzahl; Mächtigkeit
Äquipollenz (äquipollente Sätze, Äquivalenz) 102sqq., 105
Archimedisches Axiom 65, 68, 88
Aristoteles 261
Arithmetik 4, 70, 89, 100, 111, 121sq., 159, 163sq., 170, 213, 223, 225, 239
- formale 100, 142, 158sq., 161
arithmetisch (Satz, Urteil) 25, 164, 256
Artikel
- bestimmter 89, 154sq.
- unbestimmter 150, 155
ausdrücken 33sq., 41, 119sq., 232, 239sq., 246 cf. Gedankenausdruck
Avenarius 151
Axiom 36sqq., 39, 61–75, 77, 79, 84, 119, 144, 148, 149, 159, 261 cf. wahr, Wahrheit der Axiome; Unabhängigkeit; Widerspruchslösigkeit
Bachmann, F. 158sq., 161, 210
Bachmann, P. 53
Baldwin 19
Ballue, E. 145
Bar-Hillel, Y. 158
Barth, P. 8sq.
Bauch, B. 81, 83, 84, 268
Bauch, M. 8
bedeuten 41, 90
Bedeutung 38, 93, 96, 117, 156, 183, 196, 224, 231, 233–236, 239sq., 242, 245sqq., 250sq.
- eines Begriffswortes 96
- bestimmte u. nicht bestimmte 129–132
- eines Funktionsnamens 219
- eines Klassennamens 222
- eines Namens (Eigennamens) 96, 126sqq., 196sq.
- eines Satzes 96, 231–235, 240sqq., 245, 246, 247, 251

- ungerade 236, 240
- Bedingungssatz** 34sqq.
- Begriff 12, 22, 24, 77, 79sq., 85sq., 96, 98, 102, 111, 121sq., 137, 141–144, 150sq., 154sq., 164sq., 177, 182sq., 213, 215, 221, 224sq., 229, 233, 238, 239sq. cf. Funktion; notion; Unterordnung, U. eines Begriffes unter einen andern
- Fallen eines Gegenstandes unter einen B. cf. Subsumtion
- Klarheit u. Deutlichkeit eines B.es 144
- populäre B.e 37
- erster, zweiter, *n*ter Stufe 73sq., 102, 142, 148, 150sq., 165, 218
- Verwandlung eines B.es in einen Gegenstand (Übergang von B.en zu Begriffs-umfängen resp. Klassen) 85, 87, 121sq.
- Begriffskalkül** 22, 24, 31, 122
- Begriffsschrift (*système de notations logiques, sistemi di notazioni*) 4sq., 7, 41, 58, 98–101, 111, 124, 163sq., 178, 181, 183, 186, 211, 255
- Begriffsumfang 22, 74, 86, 111, 121, 141sq., 144, 213, 215, 217, 221, 223, 225, 229, 233, 238, 239 cf. Extension; Klasse; Menge; Wertverlauf
- Begriffswort (Begriffsname, Gemeinname, nomen appellativum) 86, 96, 98, 150, 154sq., 164, 219 cf. Funktionsbuchstabe; Funktionsname
- Verwandlung eines B.es in einen Eigen-namen 86, 89
- behauptende Kraft 34, 102, 122sq., 127
- Behauptung (behaupten) 33sq., 119, 126sq., 185sq., 250sq.
- Bernays, P. 158
- Bernstein 140, 143
- besagen 120, 122
- bezeichnen 34sq., 119sq., 232, 239sq., 246
- bezeichnendes Zeichen 35, 90, 117sq.
- Beziehung 77, 79, 121, 181, 186, 191, 226–230, 232, 261
- Blumenthal, O. 55, 80
- Boehme 45
- Bolzano 105
- Boole, G. 5, 59, 95, 99, 124, 164, 176, 259
- Borel, E. 143
- Brentano, F. 152, 162, 256, 257, 260
- Brix, P. W. 10
- Buchstabe 103sq., 117sq., 130sqq., 177 cf. andeutend; Funktionsbuchstabe; Variable
- deutscher 120, 123, 176, 186, 249
- griechischer 120, 176, 186
- lateinischer 116sq., 120, 176, 186
- Bücker 49
- Burali-Forti, C. 110, 187
- Burali-Forti's contradiction 112

- calculus ratiocinator** 100, 124
- Camilla 175
- Cantoni 19
- Cantor, G. 66, 80, 110, 113, 143, 157, 202sq., 207, 215sq., 230, 237
- Cantor, M. 19
- Carnap, R. 210
- Carus, P. 109, 125
- Church, A. 95, 141
- Couturat, Mme 17
- Croce, B. 260

- Dante 24
- Dedekind, R. 10, 12, 80, 110, 177, 238
- Deduktion 250
- Definition (definieren) 61–66, 68sq., 72sq., 77, 79, 93, 95, 144, 148, 172, 173, 184–187, 192, 195, 197sq., 251, 261sq. cf. Kontextdefinition
- durch Abstraktion 173, 192, 224
- bedingte 182sq., 187, 192, 194
- eigentliche 63, 150, 224
- Einfachheit der D.en 95
- schöpferische 95, 153, 198
- Vielfachheit der D.en 182, 185, 194
- vollständige 66, 68, 95, 182, 184
- Dehn, M. 65, 169
- Demonstrativ(pronomen) 154, 164
- denken 33, 102
- denotation 120
- denote 122
- Deussen 19
- Dichtung (dichterisch) 96, 128, 235, 247
- Dingler, M. 29, 31, 33, 37, 39, 41–45
- Disjunktion 250
- Domenico, N. De 260, 262
- Dualitätsprinzip 67

- Eigenname (Gegenstandsname, Einzel-name) 86, 89sq., 96, 98, 150, 154sq., 164, 217, 238, 243, 271 cf. Bedeutung, B. eines Namens; Sinn, S. eines Namens
- Eigenschaft 150, 154sqq., 271
- Einaudi, L. 260
- einige 150
- Eins
- [arithmetisch] 140, 234
- [Allklasse bei Schröder] 94sq., 122