Bruno Baron von Freytag Löringhoff

Neues System der Logik

Symbolisch-symmetrische Rekonstruktion und operative Anwendung des aristotelischen Ansatzes

FELIX MEINER VERLAG
HAMBURG

Im Digitaldruck »on demand« hergestelltes, inhaltlich mit der ursprünglichen Ausgabe identisches Exemplar. Wir bitten um Verständnis für unvermeidliche Abweichungen in der Ausstattung, die der Einzelfertigung geschuldet sind. Weitere Informationen unter: www.meiner.de/bod

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über ‹http://portal.dnb.de› abrufbar.
ISBN 978-3-7873-0636-7
ISBN eBook: 978-3-7873-2566-5

 Gesamtherstellung: BoD, Norderstedt. Gedruckt auf alterungsbeständigem Werkdruckpapier, hergestellt aus 100 % chlorfrei gebleichtem Zellstoff. Printed in Germany.
www.meiner.de

INHALT

EINLEITUNG

Wenn uns etwas erzählt wird, dann erhebt sich oft die Frage, ob die Erzählung wahr sei. Der Erzähler könnte ja sich irren oder gar lügen. In dieser Lage müssen wir irgendwie nachschauen, ob es so ist oder war, wie der Erzähler behauptet. Wir stehen vor dem *Wahrheitsproblem.* Aber dieses Nachschauen ist meist nicht leicht und oft unmöglich. Damit sind wir beim Problem der *Verifikation*, der Feststellung von Wahrheit, bzw. der *Falsifikation*, der Feststellung, daß Wahrheit nicht besteht, daß es anders ist, als der Erzähler behauptet hat.
Auf manchen Gebieten haben wir Möglichkeiten, manche Behauptungen zu falsifizieren oder zu verifizieren, auf anderen Gebieten, und wohl auf allen in speziellen Fällen, fehlt es daran. Dann bleibt uns nichts übrig, als entweder die Behauptung zurückzuweisen, oder von uns aus dem Erzähler *Kredit* zu geben, ihm vorläufig zu glauben und seine Behauptung so zu behandeln, als wüßten wir, daß sie wahr sei. Ganz ohne solchen Kredit kann kein vernünftiges Gespräch zustandekommen und in Gang bleiben, denn im Gespräch jagen sich die Behauptungen in schneller Folge, und die Nachprüfung ist ein viel zu langsames Geschäft. Aus Gewohnheit und von Natur sind wir leichtgläubig und merken, wenn jemand gewandt und lange spricht, nicht, wie viel er behauptet und wie wenig er beweist, zumal er möglichst oft so tut, als behaupte er gar nicht neu, sondern wiederhole nur in etwas anderer Weise schon Gesagtes und Akzeptiertes, als *argumentiere* er, und zwar in einer Weise, die den Zuhörer zwinge, das nun gesagte gleichfalls zu akzeptieren. Damit sind wir beim Problem der *Argumentation.* Daß viele Argumentationen sehr überzeugend klingen, aber tatsächlich fauler Zauber sind, das kann einem auf die Dauer nicht entgehen, und die Frage wird dringend, wie man brauchbare, wirklich zwingende Argumentationen von trügerischen unterscheiden kann. Damit sind wir endlich bei dem Problem, aus dem, auch historisch, die *Logik* hervorgeht.

Der Logiker will also hinter die Geheimnisse der Richtigkeit von Argumentationen kommen. Die Wahrheit des Behaupteten ist nicht seine Sache, sondern nur, wie damit in der Argumentation umgegangen wurde. Die Sache, von der die Rede war, interessiert ihn auch nicht, auch nicht die Sprache, die benutzt wurde, sondern allein eine gewisse, nämlich die *logische Form der Argumentation.*

Das klingt zunächst geheimnisvoll und so, als sei das sehr wenig. Viel ist es auch nicht, aber es hat den großen Vorzug, daß hier etwas untersucht werden soll, was wir als Rede oder als Text greifbar vor uns haben, so daß wir nachschauen können und uns Fragen der Wahrheit und der Verifikation zunächst keine Sorgen zu bereiten brauchen.

Infolgedessen kann die Lehre von den zwingenden Argumentationen von Anfang an aufgebaut werden ohne Rücksicht auf die Fülle schwieriger Probleme, vor denen wir stehen, sobald wir vom Formalen zum Inhaltlichen, Materialen unserer vielen Gespräche übergehen. Logik kann man systematisch und rein, d. h. unabhängig vom Materialen, treiben.

In der Wissenschaft wie im Leben soll man das Mögliche tun und nicht warten, bis Unmögliches möglich wird. Eine gut ausgebaute reine Logik ist nicht der Weisheit letzter Schluß, aber sie kann, richtig angewandt, auf allen Gebieten der Erkenntnis wie der praktischen Entscheidungen eine Grundlage, ein sicheres Standbein, ein zuverlässiges Hilfsmittel werden, unter der Voraussetzung freilich, daß es gelingt, manche Vorurteile gegen die Anwendung von Logik überhaupt abzubauen. Hier ist das nicht unsere Aufgabe.

Zunächst gilt es, die logische Form in unseren Argumentationen als eine vom Materialen unabhängige überhaupt zu bemerken, sie aus dem ganzen Gerede herauszuheben, sie zu isolieren, so daß Zufälligkeiten des Sachzusammenhanges, der benutzten Sprache mit ihrer historisch gewordenen Grammatik, der Lage und Psyche des Sprechenden etc. nicht mehr von unserer logischen Hauptsache ablenken. Das geht nicht ohne einen Vorbegriff dessen, was „rein logisch" heißt, und solche hat es in der Geschichte der Logik verschiedene gegeben; dieser Vorbegriff aber rechtfertigt und präzisiert sich erst, wenn das System der reinen Logik steht und funktioniert. Unser Vorbegriff ist der, den Aristoteles gehabt haben dürfte. Mehr wollen wir hier zunächst nicht darüber sagen.

Um über die mit Hilfe dieses Vorbegriffes uns sichtbar gewordenen logischen Formen sprechen zu können, brauchen wir Ausdrucksmittel. Die Umgangssprache allein reicht nicht aus, denn sie ist in normalen Gesprächen entstanden und ungeeignet für Gespräche über Gespräche, wie sie der Logiker führt. Deshalb schafft sich jede Logik eine eigene Sprache, einen eigenen Formalismus. Schon im Organon des Aristoteles findet man sofort Buchstaben als Bezeichnungen für irgendwelche Begriffe, also in einer Verwendung, die unseren Symbolen in der Algebra ähnelt. Selbst wenn in Logiken jüngerer Zeit keine solchen Symbole vorkommen, dann ist der Text dafür so voller Fachausdrücke, daß trotzdem eine eigene Sprache für diese Logik vorliegt.

In neuester Zeit schließlich beherrschen algebraähnliche Kalküle in der Logikwissenschaft das Feld. Eine Zeit lang waren ihrer Legion. Wenn man von Kalkülen für spezielle Probleme absieht, haben davon zwei eine allgemeine Verbreitung gefunden. Der eine ist die auf Boole und Schröder zurückgehende Algebra der Logik, der andere die in ihren wesentlichen Zügen auf Frege zurückgehende mathematische Logik, die neben vielen anderen Namen „Logistik" als gängigste Bezeichnung trägt. Charakteristisch daran ist, daß mit dem Kalkül der Aussagen begonnen und ein Prädikatenkalkül darauf aufgebaut wird.

An dieser Entwicklung der Logik ist nun nicht so wichtig, daß besondere Zeichensprachen und Rechenregeln für die Zeichen benutzt werden. Das liegt mehr oder weniger im Wesen der logischen Problematik. Wichtig ist vielmehr, daß, insbesondere in Kalkülen des zuletzt erwähnten Typus, das Problem der Logik an einer ganz anderen Stelle angepackt worden ist, als Aristoteles es tat und in seiner Gefolgschaft das ganze Mittelalter und die Neuzeit bis in das vorige Jahrhundert, ja die Logik in der Hand der Philosophen bis in unsere Zeit. Begriffe waren die Bausteine, Urteile und Schlüsse aus ihnen zusammengesetzte Strukturen, deren Theorie die aristotelisch arbeitende Logik interessierte. In der neuen Theorie dagegen sind Aussagen, Gebilde, die entweder wahr oder unwahr sind, die Bausteine. Jetzt interessiert, wie sie zu komplexeren Aussagen verknüpft werden, und darauf erbaut sich in einer Theorie der Aussagenfunktionen ein Kalkül, in dem auch von Begriffen die Rede sein kann, allerdings in einer Weise, die mit der aristotelischen Theorie nicht übereinstimmt und infolgedessen einige bezeichnende Schwierigkeiten mit ihr hat.

Trotzdem hat sich diese Art, Logik zu betreiben, so stark durchgesetzt, daß der aristotelische Ansatz eine Zeit lang so gut wie verschwunden war. Man tat ihn als „klassisch" ab. Er konnte mit den weit ausgebauten Logikkalkülen nicht konkurrieren. Die Kalküle wurden von routinierten Mathematikern entwickelt und gehandhabt, die aristotelische Logik blieb in den Händen von Philosophen, die oft zu mathematischen Formeln und Strukturen kein rechtes Verhältnis hatten. Dort hatte man fast nur die aristotelische Syllogistik im engsten Sinne dieses Wortes vor Augen und dachte gar nicht daran, die Tragweite des aristotelischen Ansatzes voll auszuschöpfen.

Seit 1938 hat der Verfasser sich diesem Trend widersetzt. Nicht nur aus Sympathie für den schwächeren Kontrahenten, sondern hauptsächlich in der Überzeugung, daß der aristotelische Ansatz der problemgerechtere ist und seine scheinbare Unterlegenheit nur darauf beruht, daß man sich mit Anfangserfolgen auf diesem Wege, sehr schönen Erfolgen, zufriedengegeben und versäumt hat, mit Hilfe einer geeigneten Symbolik, einer guten Sondersprache für diese Logik, mehr herauszuholen. Es galt, die aristotelische Logik wieder konkurrenzfähig zu machen und ihre wahre Leistungsfähigkeit auszuloten.

Dieses Unternehmen hat im Laufe der seither verflossenen Jahrzehnte den Verfasser in mehreren Etappen zu Ergebnissen geführt, die seine Erwartungen weit übertroffen haben. Nur Anfänge davon sind in zwei kleinen, in möglichst allgemeinverständlicher Sprache geschriebenen Büchern und einigen Zeitschriftenartikeln seit 1955 publiziert. Weiterführendes wurde in Vorlesungen und Seminaren vorgetragen.

Das vorliegende Buch soll den letzten erreichten Stand unserer Technik und einige theoretisch wichtige Ergebnisse wenigstens so darbieten, daß der Leser in der Lage ist, den Faden dort aufzunehmen, wo wir ihn aus der Hand legen. Zu diesem Zwecke ist es für sich allein hoffentlich lesbar. Für eine reichere Einführung in die Problematik sollten allerdings die früheren Darstellungen unseres Systems, die Urbanbücher Logik I und Logik II, herangezogen werden. Das erstere, 1955 erstmals erschienen und jetzt in fünfter Auflage auslaufend, führte noch nicht sehr weit über den Stoff der üblichen aristotelischen Lehrbücher hinaus, bot ihn aber in einer übersichtlicheren Form dar. Im letzten Teil stand eine Kurzdarstellung der üblichen Logistik und eine erste Auseinandersetzung mit ihr. Dieser Teil ist heute als überholt anzusehen. Die Symbolik in Logik I unterscheidet sich von unserer heutigen nur durch eine geringfügig andere Gestalt des Identitätsstriches. Das hat rein praktische Gründe. Kompliziertere Begriffslagen erforderten eine deutlichere Kennzeichnung der Richtung von Teilidentitäten.

Logik II ergänzte dieses System in verschiedenen Richtungen. Die Hauptlücke der aristotelischen Logik war wohl, daß sich in ihr keine voll entwickelte Theorie der Definitionen fand. Mit einem einzigen zusätzlichen Zeichen und den zugehörigen Operationsregeln wurde diese Lücke gefüllt, und dann zeigte sich, daß das, was in der Boole-Schröderschen Algebra der Logik behandelt wird, eine Definitionstheorie für die aristotelische Logik ist, und da der grundlegende Kalkül der Logistik, der Aussagenkalkül, eine speziellere Boole-Schrödersche Algebra ist, ergab sich so eine Brücke zwischen den bis dahin so weit getrennten Ansätzen. Die zweite wesentliche Einsicht dieses Buches war, daß die aus den Logikkalkülen bekannte Erscheinung der Dualität in der aristotelischen Logik ein genaues Gegenstück hat im Verhältnis von Inhalts- und Umfangsbeziehungen der Begriffe. Diese beiden Einsichten eröffneten die Aussicht, daß die in unserer Zeit so tief gespaltene Logik auf einer aristotelischen Basis wieder zu einer Einheit finden kann. In Grundzügen ist dieses neue System der Logik heute bereits sichtbar.

Klar geworden ist auch, warum es auf aristotelischer und nicht auf logistischer Basis stehen muß. J. M. v. Petzinger hat nämlich in seiner Doktorarbeit „Das Verhältnis von Begriffs- und Urteilslogik“ (Tübingen 1975) nachgewiesen, daß und wie sich der logistische Ansatz durch zusätzliche Voraussetzungen als Spezialisierung der Definitionstheorie der aristotelischen Logik gewinnen läßt. Die aristotelische Logik ist also die allgemeinste, die mit den wenigsten Voraussetzungen.

Das leuchtet ohne weiteres ein, wenn man bedenkt, was in diesen beiden Ansätzen vom jeweiligen unanalysierten Grundelement, sozusagen dem Baustein, verlangt wird. In der aristotelischen Logik ist das der Begriff, und von dem wird nur verlangt, daß er isoliert meinbar sei, und das ist so gut wie nichts, denn meinbar ist schlechthin alles. Von der Aussage aber, dem Baustein der Logistik, wird verlangt, daß sie entweder wahr oder unwahr sei. Daß sie dabei meinbar sein muß, versteht sich von selbst und wird nicht diskutiert. Dieses Gebilde ist also schon komplizierter und auf ontologische

Setzungen bezogen, wenn „wahr" einen Sinn haben soll. Es wird also mit etwas schon recht Speziellem begonnen, und hier dürfte der Grund dafür liegen, daß manches, was in der aristotelischen Logik einfach und elementar ist, in der logistischen Theorie Schwierigkeiten bereitet.

Wir haben also gute Gründe, einen Neuaufbau der gesamten Logik auf aristotelischer Basis anzustreben, und können hoffen, dabei manches klarer zu sehen, als das bisher möglich war. Beispiele dafür mögen im Folgenden für sich sprechen.

Unsere Symbolik, im wesentlichen aus verschieden gestalteten Pfeilen und Doppelpfeilen bestehend, die Freiheiten der zweidimensionalen Schreibfläche nützend, wird uns sinnfällig machen, worauf es bei logischen Zusammenhängen und bei Beweisen mit logischen Mitteln ankommt. Allerdings wird das mit dieser Symbolik nur gelingen, wenn die betreffenden Zusammenhänge nicht zu viele Begriffe enthalten. Werden es mehr als fünf oder sechs, so entstehen zwischen diesen und gar aus ihnen definierbaren so viele logische Beziehungen, daß wir bald einen nur noch schwer durchschaubaren Wirrwarr von solchen Pfeilen vor uns haben und praktisch überfordert sind. Daran hat unsere Symbolik keine Schuld, es liegt in der Natur der Sache, und algebraartige Symboliken sind da nicht besser dran, die Gleichungen werden lang, ihre Umformungen Legion, die Gefahr, sich zu verrechnen, wird immer größer. Deshalb sollte man die durch unsere Symbolik für kleine Zusammenhänge gewonnene Übersichtlichkeit und Einsichtigkeit nicht gering achten, zumal die theoretisch interessanten Zusammenhänge meist in den von unserer Technik gut beherrschbaren Bereich fallen.

Anders steht es mit der Anwendung der Logik. Sollte es mit der einmal wirklich vorangehen – bisher wird höchstentwickelte Logik erstaunlich wenig tatsächlich angewandt –, so sind bald höchst komplexe Aufgaben zu erwarten. Dann dürfen wir glücklich sein, daß wir im Zeitalter der Computer leben, und einem geeignet programmierten Computer übertragen, was unsere Aufmerksamkeit und Geduld überfordert. Dann übersetzen wir unsere Symbolik in eine einfache Zahlensprache, die der Computer versteht, und lassen ihn darin zu unseren Zeichenregeln analoge anwenden. Solche Computerprogramme, welche aristotelische Logik zur Lösung von Aufgaben hoher Komplikation sicher anwenden, haben wir entwickelt, sie laufen seit vielen Jahren am Tübinger Rechenzentrum. Am Ende dieses Buches soll davon die Rede sein. Vor einigen Monaten gelang sogar, für einen kleinen Tischcomputer und in einer einfachen, weitverbreiteten Computersprache solche Programme zu schreiben. Zwei davon und je eine Probe ihres Könnens bringt der Anhang.

Zunächst werden wir nun einen Überblick geben über die Elemente und logischen Grundlagen unserer operativen Aufbereitung der aristotelischen Logik in ihrem jetzigen Entwicklungsstand. Alles, wovon wir hier berichten werden, und mehr ist bewiesen und erprobt. Die dazu gehörenden vielen einfachen

Beweise können hier nicht explicite gebracht werden. Wir verlassen uns darauf, daß der Leser sie selbst nach Bedarf findet, wenn er an den vorgelegten Beispielen von Beweisen begriffen hat, wie man solche in dieser Technik führt. Wo das gar nicht gelingen sollte, ist der Verfasser für jede Anfrage und jeden Hinweis auf besondere Schwierigkeiten dankbar.

Charakteristisch für die aristotelische Logik und damit für das hier darzustellende System ist, daß der *Begriff* ihr nicht weiter zerlegbares Grundelement ist, alle auftretenden Strukturen letztlich aus Begriffen zusammengesetzt sind.

Da es sich um eine Logik handelt, die ganz allgemein, auf schlechthin alles anwendbar sein soll, muß sie mit einem Begriff des Begriffes arbeiten, der für alles gilt, kann sie sich in diesem Punkt keine Spezialisierung leisten. Alles also darf in dieser Logik als Begriff behandelt werden: Existierendes wie Nichtexistierendes, Individuelles wie Allgemeines, Widerspruchsfreies wie Widerspruchsvolles, Inhaltsreiches wie Inhaltsleeres, Bekanntes wie Unbekanntes, Wahres wie Unwahres, Erkennbares wie Unerkennbares, Scharfes und Unscharfes, Definiertes und Undefiniertes. So könnte man lange fortfahren. Nur auf eines kommt es an: Bei der Verwendung eines Begriffes gibt man vor, man wisse, was dabei gemeint ist und was nicht. Bei der Anwendung der Logik wird stillschweigend angenommen, der Verwender eines Begriffes habe das gewußt. Was genau „Wissen" hier heißen kann und in welcher Weise und welchem Maße das möglich ist, diese Frage führt sofort in die Erkenntnistheorie und soll uns hier nicht kümmern. Wir müssen diese Grundfiktion der Logik akzeptieren.

Begriff ist hier also alles Meinbare, sofern es beim Gemeintwerden als dieses und nichts anderes isoliert wird. Kürzer: Jedes isoliert Meinbare ist Begriff.

Bemerkt man, daß Meinen nicht schon Erkennen, letzteres aber, wie alles Denken, spezielles Meinen ist, so wird klar, daß wir hier einen nicht mehr erweiterbaren Begriff des Begriffes, den allgemeinsten überhaupt, zugrunde legen.

Das schließt nicht aus, daß wir im nun so weiten Felde der Begriffe später einige besondere Bereiche abgrenzen und studieren werden, z. B. wenn wir uns in einem besonderen Kapitel die Individualbegriffe vornehmen und ihre logischen Besonderheiten in gewissen Konsequenzen hinein verfolgen.

Zunächst aber interessieren uns nur die logischen Regeln, die für schlechthin alle Begriffe gelten. Wir betrachten sie im folgenden, nach steigender Komplikation geordnet, soll doch das Rüstzeug an Zeichen und Regeln, mit dem der Leser das Folgende verstehen und weiter selbständig anwenden will, sich so darstellen, daß der Aufbau dieses Instrumentes sichtbar wird und in diesen Seiten leicht nachgeschlagen werden kann, um Vergessenes schnell wiederzufinden. Dabei nehmen wir in Kauf, daß manches auf diesen Seiten in seiner Kürze nicht leicht und erst nach weiterer Lektüre ganz verstehbar wird. Wir bitten den Leser, an solchen Stellen zunächst weiterzulesen und uns nachzusehen, daß wir mit der grundsätzlichen Schwierigkeit, ein vielfach ineinander verflochtenes System in die eindimensionale Darstellung des zeitlichen Nacheinanders der geschriebenen Rede zu bringen, nicht besser fertig geworden sind.

DAS SYSTEM DER REINEN LOGIK IN VOLL SYMMETRISCHER FORM

Die Zeichen der Symbolik

Zeichen für Begriffe

Wie gesagt, betrachten wir als Begriff alles isoliert Meinbare. Der Weite dieses Feldes lassen wir eine große Freiheit für die Bezeichnung von Begriffen entsprechen. Praktisch eignen sich als Zeichen für einzelne Begriffe Buchstaben, Zahlen, Wortverbindungen, Abbildungen, sonstige handliche Symbole.

Für gewisse in der Logik häufig auftretende Begriffe aber vergeben wir hier die folgenden Symbole fest. Wie wichtig sie sind, wird erst in den Kapiteln über Urteile und Schlüsse klar werden.

( ) Eine leere Klammer soll einen Begriff bedeuten, von dem wir gar nichts wissen, außer, daß er im gerade gezeichneten Zusammenhang an der betreffenden Stelle steht. Es ist manchmal ganz praktisch, ein solches Zeichen zur Verfügung zu haben.

(')
(*) Eine Klammer mit irgendeinem kleinen Symbol darin bedeutet dagegen einen Begriff, der auch keinen Namen hat, von dem wir aber immerhin wissen und hiermit angeben, daß es ein „normaler" Begriff ist, das heißt weder ein inhaltsleerer noch ein widerspruchsvoller, vielleicht ein Begriff, dessen Name zuvor bekannt war und jetzt vergessen werden darf. „Vergessenheitszeichen" nennen wir solche Klammern. Die Tatsache, daß man jeden „normalen" Begriff jederzeit durch ein „Vergessenheitszeichen" ersetzen darf, ist das „Vergeßbarkeitsprinzip", auf dem die abschwächenden Schlüsse beruhen. Wird dieses Prinzip in einem logischen Zusammenhang mehrfach angewandt, so muß in den betreffenden Klammern das Symbol verschieden gewählt werden.

Hier war von Inhaltsleere die Rede. Wir benutzen im folgenden *Inhalt* bzw. *Umfang* in der ursprünglichen Bedeutung dieser Termini. Allgemeinbesitz aller Logiker wurden sie durch die berühmte Logik von Port-Royal.

Zum *Inhalt* eines Begriffes, so heißt es dort sehr klug, gehört alles, was man ihm nicht absprechen kann, ohne ihn zu zerstören, also alles, was von ihm mit Sicherheit positiv gesagt werden kann, von ihm gilt, alles, so werden wir uns ausdrücken, was „an" ihm ist.

Zum *Umfang* eines Begriffes gehört andrerseits alles, dem man ihn, den Begriff, nicht absprechen kann, also alles, von dem er gilt; wir werden sagen: Alles, was „in" ihm, seinem Umfang nämlich, ist.

Vor einer Verwechselung sei hier gewarnt: Hier ist nicht die *Klasse* des Begriffes gemeint. Diese besteht bekanntlich nur aus allen *Individuen*, auf die der Begriff zutrifft. Daher ist die Klasse ein zumeist echter, d. h. kleinerer Teil des Umfanges. Fahrlässige Gleichsetzung der Termini Klasse und Umfang hat in der Logikliteratur viel Unheil angerichtet. Vorerst werden wir den Begriff der Klasse nicht weiter benötigen.

Inhalt und Umfang eines Begriffes können alle, viele, wenige oder gar keine anderen Begriffe enthalten. Für die beiden Extremfälle haben wir besondere Zeichen:

M — „M" bedeutet den *inhaltsleeren Begriff*. Hier denken wir an den Begriff „meinbar", der, von einem Begriff ausgesagt, gar nichts besagt, weil alle Begriffe als solche ja meinbar sind. Entsprechend ist der Umfang dieses Begriffes unendlich.

W — „W" bedeutet entsprechend den *umfangsleeren Begriff*. Umfangsleer ist jeder *widerspruchsvolle Begriff*, denn es kann nichts geben, worauf er zuträfe, außer ihm selbst. Sein Inhalt ist dafür zu groß, unendlich. Er hat allen Inhalt.

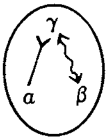
Man kann beweisen, daß es rein logisch nur einen inhaltsleeren und nur einen umfangsleeren Begriff gibt, was dadurch verdeckt wird, daß uns diese beiden Grenzbegriffe in immer wieder anderen Definitionen, in tausend Verkleidungen in der Praxis des Denkens und Sprechens begegnen. Es ist also berechtigt, beiden je ein festes Zeichen zuzuordnen, und ein freundliches Entgegenkommen des Alphabetes, daß das W ein umgekehrtes M ist und dadurch die uns wichtige Beziehung der Dualität zwischen diesen beiden Begriffen dargestellt werden kann.

$\overline{}$ — Der Strich über einem Begriffszeichen macht daraus das Zeichen für seinen *Negatbegriff*, macht aus „Hund" „Nicht-Hund".

● — Ein dicker Punkt bedeutet einen durch *Definition* erzeugten Begriff. Die definierenden Beziehungen zu anderen Begriffen werden bis in diesen Punkt hinein gezeichnet, sonstige Beziehungen, die er hat, werden durch Beziehungszeichen angegeben, die nicht in ihn hineinlaufen.

a^{I} — Das I, als Exponent rechts hoch an ein Begriffszeichen gesetzt, deklariert den betreffenden Begriff als einen *Individual*begriff. Das bedeutet: Dieser wird nun im gerade behandelten Zusammenhang als ein Individuum im Sinne der Logik bezeichnend behandelt, besonderen Regeln unterworfen.

$a^{\not{I}}$ — Das durchstrichene I in derselben Stellung deklariert den betreffenden Begriff als *nicht-Individual*begriff. Auch das hat logische Konsequenzen.



Da bei uns als Begriff alles angesehen werden kann, was man irgend meinen und worüber man irgend sprechen kann, können auch logische Zusammenhänge von Begriffen, „Begriffslagen“, und Typen von solchen isoliert gemeint und damit als Begriffe behandelt werden. Das geben wir durch das „Kreiszeichen“ wieder. Wir umgeben die betreffende Begriffslage mit einem Kreis oder einer anderen geschlossenen Kurve, und dann darf kein Beziehungszeichen diese Kurve schneiden.

Mit dieser Maßnahme schützen wir uns – für Kenner dieser Probleme sei das gesagt –, vor fehlerhaften Vermengungen von Begriffen verschiedener Typen und Stufen im Sinne der Theorie Russells und verschiedener Suppositionen im Sinne scholastischer Logik.

Eigentlich gehört dieses Zeichen in die Theorie der Definitionen. Man definiert ja hier einen Begriff, indem man eine Begriffslage hinschreibt und durch den „Kreis“ sagt „solche, oder diese meine ich“. Es ist sozusagen ein Definitionspunkt, in den man hineinschauen kann.

Ähnlich würden wir handeln, wenn es darum ginge, eine bestimmte Art Erbsen zu definieren. Statt uns mit einer begrifflichen Definition zu plagen, könnten wir eine aufs Papier kleben und sagen, „solche sind gemeint“, oder, „diese habe ich gefunden“. Im letzteren Falle wäre ein Individualbegriff definiert.

Die Operationsregeln für das „Kreiszeichen“ sind noch nicht vollständig ausgearbeitet. In den noch immer elementaren Erörterungen dieses Buches werden wir es deshalb nicht benutzen, es sei hier nur erwähnt, um eine der Richtungen anzudeuten, in die ein weiterer Ausbau der hier begonnenen Logik führen kann.

Mehr braucht über Bezeichnungen von Begriffen vorerst nicht gesagt zu werden, und wir wenden uns den Zeichen für *logische Beziehungen* zwischen Begriffen zu.

Zeichen für Beziehungen zwischen Begriffen

$a \leftrightsquigarrow b$ Wieder beginnen wir mit dem Ungewohntesten. Der geschlängelte Doppelpfeil, in unserem Hausjargon „Runzelpfeil“ genannt, bedeutet *Inhaltsfremdheit*, kurz „*Disparität*“ genannt, zwischen den Begriffen a und b. Diese symmetrische Beziehung, daß a keinen Inhalt hat, der auch an b ist, und vice versa, spielt in unserem normalen Sprechen und Denken aus begreiflichen Gründen so gut wie keine Rolle. In der Logik aber stoßen wir auf sie, und sie erweist sich als ebenso „stark“, d. h. folgenreich, wie die hier als nächste aufgeführte Diversität, zu der sie dual ist. Sie ist übrigens gleichbedeutend damit, daß Nicht-a zu Nicht-b divers ist.

$a \longleftrightarrow b$ Der Doppelpfeil bedeutet *Umfangsfremdheit, „Diversität“* genannt, nämlich daß a keinen Umfang hat, der auch in b ist, und vice versa. Genau das sagt das übliche sogenannte e-Urteil „Alle a sind nicht b“.

$a \overset{\leftrightsquigarrow}{\longleftrightarrow} b$ Stehen zwei Begriffe in diesen beiden zueinander dualen Beziehungen zugleich zueinander, so liegt zwischen ihnen das *Negatverhältnis* vor, einer ist der Negatbegriff des anderen, kann mit Hilfe des oben besprochenen Querstriches durch den anderen ausgedrückt werden. Gelegentlich nennen wir das Negatverhältnis auch *„totale Diversität“* oder *„totale Disparität“*, die wir dann mit Hilfe des folgenden Zeichens schreiben.

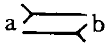
$\overset{\wedge}{\text{———}}$ Das *Totalitätszeichen* ist theoretisch entbehrlich, vereinfacht aber manche Zeichnungen. Es besteht aus einer Spitze, die von dem Zeichen für die als total zu charakterisierenden Beziehung fort weist, wie hier von dem einfachen Strich. Es besagt, daß nicht nur die da stehende Beziehung vorliegt, sondern auch die dazu duale.

Hier ist an der Zeit, mehr über *Dualität* zu sagen, eine Symmetrie, welche die gesamte Logik durchzieht. (Ausführliches darüber findet sich in Logik II, S. 50–84. S. 84 sind dort leider im Druck die Diagramme Dual und Polar vertauscht worden.) Dual zueinander sind jeweils die folgenden Beziehungen: Disparität und Diversität, „über“ und „unter“, „in“ und „an“, „=M“ und „=W“. Das mag hier genügen.

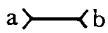
$a \overset{\wedge}{\longleftrightarrow} b$ Mit Hilfe des Totalitätszeichens läßt sich also das *Negatverhältnis* so als *„totale Diversität“* schreiben,

$a \overset{\wedge}{\leftrightsquigarrow} b$ und so als *„totale Disparität“*.

$a \succ\!\!— b$ Ein besonders wichtiges und häufiges Zeichen, mit dessen Hilfe alle unsymmetrischen logischen Beziehungen ausgedrückt werden, ist der *Identitätsstrich*, der die *Teilidentität* des Inhaltes wie des Umfanges zweier Begriffe bedeutet derart, daß der ganze Inhalt des bei den Schaftfedern stehenden Begriffes a im Inhalt von b enthalten ist und zugleich, wegen der bekannten Inhalts-Umfangs-Relation, der ganze Umfang von b im Umfang von a. „a ist *an* b, b ist *in* a“ wollen wir sagen. Diese Beziehung verbindet Inhalts- und Umfangsverhältnisse in der Logik fest miteinander. In der Umgangssprache sagt man „Alle b sind a“. Das ist das sogenannte a-Urteil. „a ist über b, b ist unter a" wird es auch manchmal gelesen.



Liegen beide Beziehungen, „unter" und „über", zugleich vor, so sprechen wir von *„totaler Identität"*. Inhalt wie Umfang von a und b sind dann gleich, und es handelt sich nur um zwei Namen für ein und denselben Begriff.

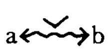


Diese *totale Identität* schreiben wir kürzer auch so.

a = b

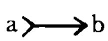
Gelegentlich auch so. Diese Schreibweise wenden wir an, wenn sich im Zuge unserer Operationen herausstellt, daß ein Begriff W oder M ist. Dann schreiben wir a = M bzw. a = W in die Zeichnung. Stattdessen könnten wir auch ein gestricheltes Totalidentitätszeichen verwenden.

Kehren wir das Totalitätszeichen um, sodaß es nun zum betreffenden Beziehungszeichen hin weist, so wird daraus das *Nicht-Totalitäts-Zeichen*, und das besagt, daß die zur gezeichneten Beziehung duale nicht besteht. Auch das ist eine logisch wichtige, folgenreiche Information.

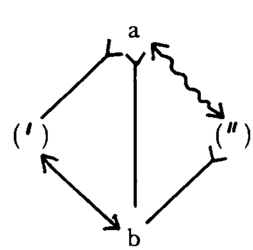


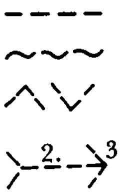
Mit diesem Zeichen kann man so die *nichttotale Disparität* schreiben, eine Disparität, bei der beide Begriffe zwar inhaltsfremd, aber nicht umgangsfremd, zueinander also nicht Negatbegriffe sind.

Oder die *nichttotale Diversität*, bei der die beiden Begriffe zwar umfangs-, aber nicht inhaltsfremd sind.



Betrachtet man die oben an zweiter Stelle gezeigte Schreibweise für die totale Identität als einen Identitätsstrich mit einem Totalitätszeichen, so ist dieser Pfeil ein Identitätsstrich mit einem umgekehrten Totalitätszeichen, soll also *„nichttotale Identität"* zwischen a und b angeben. Er besagt also, daß b über den Inhalt von a hinaus noch eigenen Inhalt hat und zugleich a über den Umfang von b hinaus noch eigenen Umfang. Ohne diesen *„Identitätspfeil"* müßten wir also diese nichttotale Identität viel umständlicher zeichnen, nämlich so:



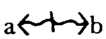


Identitäts-, Disparitäts- und Diversitätsstriche sowie Totalitäts- und Nichttotalitätszeichen werden *gestrichelt* gezeichnet, wenn hervorgehoben werden soll, daß sie nicht vorgegeben, sondern durch Anwendung logischer Regeln hergeleitet worden sind. Sollen aufeinander folgende derartige Beweisschritte unterschieden werden, so setzt man arabische Ziffern mit einem Punkt dahinter an die gestrichelten Zeichen. Gleichheitszeichen darf man gegebenenfalls so behandeln, als wären sie gestrichelt.

Eine sehr elementare Bemerkung, die sich auf das Folgende, aber auch schon auf das Nichttotalitätszeichen bezieht, sei hier erlaubt.

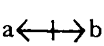
Drei Situationen müssen deutlich unterschieden werden: 1. Man weiß (oder gibt nur vor, zu wissen; darauf kommt es hier nicht an), daß zwischen zwei Begriffen eine gewisse Beziehung besteht. 2. Man weiß nicht, ob diese Beziehung besteht oder nicht. 3. Man weiß, daß diese Beziehung nicht besteht.

Im Falle 1. setzt man das betreffende Beziehungszeichen zwischen die beiden Begriffszeichen. Im Falle 2. unterläßt man das. Im Falle 3 setzt man dahin das Beziehungszeichen, aber in negierter Form. Um diese einfach schreiben zu können führen wir ein besonderes Zeichen ein, einen kurzen *Querstrich*.

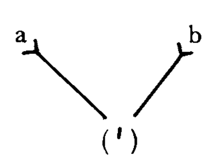


So bedeutet diese Zeichenkombination, daß a und b nicht inhaltsfremd sind, was ohne den Negatstrich umständlicher so geschrieben werden müßte:

Diese Gegenüberstellung zeigt nicht nur die kürzende Kraft eines solchen Zeichens, sondern auch, wie viel Information in einem solchen „Wissen, daß nicht“ steckt. Für manche Zwecke muß man auf die ausführlichere Fassung zurückgreifen.



Dieses Zeichen besagt: „Keine Umfangsfremdheit zwischen a und b“. Gleichbedeutend mit:



Dieses Zeichen besagt: „Keine Teilidentität zwischen a und b“. Ausführlich kann man das auf zwei Weisen schreiben:

Dabei dürfen wir übrigens die beiden hier auftretenden „vergessenen“ Begriffe als Negate voneinander behandeln. Darauf wollen wir hier nicht eingehen.

Wir arbeiten mit wenigen Zeichen, sind aber nicht daran interessiert, mit möglichst wenigen zu arbeiten. Vielmehr wollen wir die logischen Zusammenhänge möglichst deutlich machen, und so begrüßen wir, daß eine und dieselbe Begriffslage in mehreren verschiedenen Darstellungsweisen auftreten kann. Mutatis mutandis ist das in allen Kalkülen irgendwie der Fall. Gewiß könnten wir, wie sich nun zeigt, entweder auf den negierenden Querstrich oder auf das Zeichen für den unbestimmten Begriff verzichten, aber es ist praktischer, mit beiden zu arbeiten. Der Querstrich bringt Kürze, das Klammerzeichen erlaubt genauere Analyse.

Letzteres Zeichen haben wir ganz zu Beginn unserer Arbeit an der aristotelischen Logik zur Darstellung der partikulären Urteile eingeführt. Schon damals löste sich, wie in Logik I dargestellt wurde, die Urteilslehre der klassischen Logik so gut wie ganz in die Analyse von Begriffslagen auf.

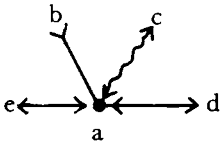
Dieser Prozeß setzt sich nun fort, und die ganze Logik wird sich als eine Lehre von den Begriffsverhältnissen darstellen. Die kleinsten und somit grundlegenden Begriffsverhältnisse werden dabei besonders durchsichtig, wenn wir die Beziehungszeichen negieren können, also den Querstrich zur Verfügung haben.

Zeichen für Definitionen

Definitionen sind einerseits Begriffslagen wie andere, und die in ihnen auftretenden Beziehungszeichen sind genau so als Urteile zu lesen wie anderswo. Andrerseits aber leistet eine Definition logisch mehr als die in ihr enthaltenen Urteile zusammen. Infolgedessen gelten zusätzliche logische Regeln für definierte Begriffe als solche. Um diese anwenden zu können, müssen wir jeweils deutlich wissen und angeben können, welcher Begriff durch welche anderen und durch welche Beziehungen zu ihnen als definiert angesehen werden soll. Hierzu dienen uns die folgenden Vereinbarungen.

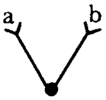
● ● a — Der definierte Begriff wird, möglicherweise zusätzlich zu seiner sonstigen Bezeichnung, durch einen dicken Punkt dargestellt.

s. S. 8 — Diejenigen Beziehungszeichen, welche Bestandteile der Definition sind, werden so gezeichnet, daß sie nicht nur auf diesen Punkt zu laufen, sondern ihn auch erreichen

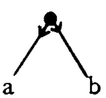


(wie b, c, d). Sonstige logische Beziehungen, in denen der definierte Begriff steht, werden gezeichnet wie bisher (e).

Auf diese Weise können auch Definitionen recht hoher Komplikation dargestellt und logisch verwertet werden (vgl. Logik II S. 49f., S. 100 ff.). Besonders häufig und grundlegend aber sind die beiden folgenden Arten, einen Begriff durch zwei andere zu definieren:



Die Definition durch *Spezifikation*. Der so erzeugte Begriff heißt das *Spezifikat* von a und b und wird „*a und b*" gelesen, wenn man keinen anderen Namen für ihn benutzen will.



Die Definition durch *Generalisation*. Hier ist der Begriff das *Generalisat* von a und b und kann „*a oder b*" gelesen werden, wobei aber zu beachten ist, daß es sich hier um das sogenannte „nichtausschließende Oder" handelt (siehe Logik II, S. 27ff.).

Mit den bis hierher beschriebenen und vorläufig erklärten Zeichen werden wir in diesem Buch auskommen. Es folgt nun eine durch Beweise, Beispiele und Diskusionsbemerkungen ergänzte Zusammenstellung der *Operationsregeln* für das Zusammenspiel dieser Zeichen, in das sich das System der logischen Schlußregeln nunmehr verwandelt.

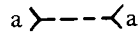
Die Operationsregeln für die Zeichen nebst Exkursen

Auch hier versuchen wir eine übersichtliche und Symmetrien hervorhebende Reihenfolge einzuhalten.

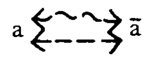
In ihrer Gesamtheit sind diese Regeln eine operationale implizite Definition unserer Zeichen. Das heißt: für den mit ihnen arbeitenden Logiker haben die Zeichen eigentlich nur die Bedeutung, daß er, wenn sie dastehen, nach diesen Regeln verfahren darf. An den Bedeutungen aber, die wir ihnen oben zugeschrieben haben, orientiert er sich, wenn ihm ein Problem in sprachlicher oder sonstiger Form vorliegt und es zunächst mit Hilfe der Zeichen hingezeichnet werden muß, bevor es mit Hilfe der Operationsregeln bearbeitet werden kann.

0 Regeln für Begriffe überhaupt

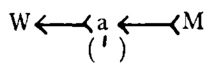
0.1 Jeder Begriff ist mit sich selbst total identisch. Steht also aus irgendeinem Grunde ein Begriffszeichen zwei mal auf dem Papier, so darf man ein Totalidentitätszeichen dazwischen setzen.



0.2 Jeder Begriff hat genau einen Negatbegriff, und der darf immer zusätzlich in die Begriffslage eingeführt werden.



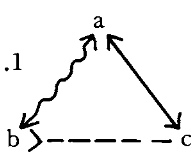
0.3 Jeder Begriff, von dem man voraussetzt oder weiß, daß er weder M noch W ist, darf durch das Vergessenheitszeichen ersetzt werden.



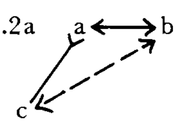
Diese Regel ist das schon genannte „Vergeßbarkeitsprinzip". Bei solcher Ersetzung geht Information verloren, zumindest der Name des betreffenden Begriffes. Deshalb sind Schlüsse mit dieser Regel sogenannte „abschwächende". Sie werden wichtig, wenn es in der betreffenden Begriffslage keine andere Schlußmöglichkeit gibt.

1 Regeln mit lauter unverneinten Beziehungen

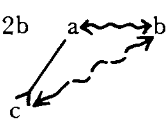
1.1



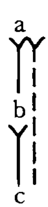
1.2a



1.2b



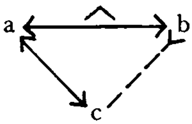
1.3



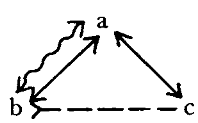
Diese vier Regeln sind grundlegend für alles Folgende. In ihrer Gesamtheit nennen wir sie „Das vollständige dictum de omni et nullo", denn Regel 1.3, besagend, daß, wenn zwei Identitätsstriche so aufeinander folgen, wie in obiger Figur, der dort gestrichelt gezeichnete Identitätsstrich hinzugefügt werden darf, ist offensichtlich das klassische „dictum de omni", im Folgenden kurz als d. d. o. zitiert, „quidquid de omnibus valet etiam valet de nonnullis et singulis", und Regel 1.2a ist das dazugehörige „dictum de nullo", d. d. n., „quidquid de omnibus non valet etiam non valet de nonnullis et singulis". Diese Regel für die Diversität wird nun durch eine dazu duale für die Disparität ergänzt, die Regel 1.2b. Die Hinzunahme der Disparität als eine logische Grundbeziehung mit einem eigenen Zeichen machte das möglich, und sie beschert uns auch die interessante Regel 1.1.

Diese Regel 1.1 stellt zwischen Inhalts- und Umfangsbeziehungen eine bisher so nicht bemerkte Brücke her. Hier entsteht die unsymmetrische Beziehung der Teilidentität aus zwei symmetrischen Beziehungen, entsteht die in unserem Denken und Sprechen stets als positiv empfundene Beziehung aus zwei als negativ angesehenen. Das hat, wie wir sehen werden, für die Lehre von den Schlüssen und insbesondere für die von den Kettenschlüssen erhebliche Konsequenzen.

Das berührt auch die in Logik I und Logik II grundlegende Regel des sogenannten „tertium non datur", t. n. d. Deren Begriffslage



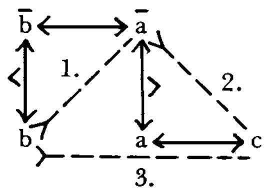
kann ausführlicher auch so gezeichnet werden,



und dann bemerkt man, daß darin die Begriffslage der Regel 1.1 enthalten ist. Das Ergebnis des t. n. d., die Identität zwischen b und c, käme auch nach Regel 1.1 zustande, wenn die Diversität zwischen a und b nicht bestünde. Das t. n. d. ist also aus 1.1 beweisbar und somit keine Grundregel mehr.

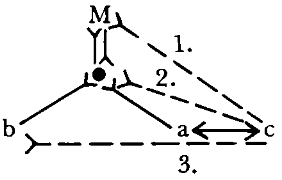
Die Regel 1.1 ist für uns so wichtig für die Theorie wie für die Anwendung der Logik, daß wir einen Namen für sie brauchen. Ein Vorschlag dafür könnte so aussehen: Sie läßt aus Umfangsleerheit und Inhaltsleerheit eines Spezifikates bzw. Generalisates, aus dem Nichtvorhandensein von Gemeinsamem „in" bzw. „an" je zwei Begriffen eine Identitätsbeziehung folgen, die in einer Richtung „alles in— — ist in— —", als Umfangsbeziehung, in der anderen „alles an— — ist an— —", als Inhaltsbeziehung, gedeutet und gelesen werden kann. Nennen wir sie für den Hausgebrauch doch „*in-an-Regel*", und nützen wir zum besseren Behalten den glücklichen Umstand, daß „inanitas" im Lateinischen Leere, Hohlheit, Nichtigkeit bedeutet! Aus zwei Nichtigkeiten folgt hier etwas durchaus Positives. An diesem Scherz sind ernste Seiten. So ist die alte Regel „e mere negativis nihil sequitur" jetzt nicht mehr aufrecht zu erhalten.

Verborgenerweise gab es die Regel 1.1 natürlich schon in Logik I, in Logik II und somit auch beim alten Aristoteles. In Logik I hätten wir ihre Begriffslage nur mit Hilfe der Negatbegriffe in der folgenden Weise schreiben können (man lese nur die nicht gestrichelten Beziehungen!),



1. t. n. d.
2. t. n. d.
3. d. d. o.

und dann hätten wir, wie rechts neben der Figur vermerkt, durch zwei Anwendungen des „tertium non datur" und eine des „dictum de omni" die entscheidende Identität gewinnen können. In Logik II hätten wir mit Hilfe des Punktzeichens die folgende Darstellung und einen auch einfachen Beweis erbringen können. Dabei werden allerdings Regeln benutzt, zu denen wir erst später kommen werden.



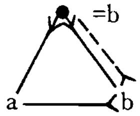
1. Def. M trivial
2. d. d. o.
3. tendal (1.5a)

Wir verdanken die Entdeckung der Regel 1.1 unserer der Logik noch angemessener gewordenen Symbolik. So ungewohnt diese Regel ist, stellen wir sie doch an den Anfang der gesamten Schlußlehre.

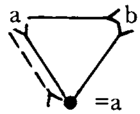
Wir kommen nun zu Regeln, in denen ein definierter Begriff mitspielt. Wir betreten damit ein letztlich unendlich großes Feld und beschränken uns auf Einfachstes und Grundlegendes. Manche in Logik II behandelte Regeln werden hier nicht auftreten. Auf die Regeltafel am Ende von Logik II sei hingewiesen.

Die beiden wichtigsten Definitionsarten, Spezifizierung und Generalisierung (siehe S. 7f.), sind mit den anderen positiven Grundzeichen durch die folgenden einfachen und sofort verstehbaren Regeln verbunden (ihre Numerierung soll darauf hinweisen, daß sie eigentlich schon in das vorige Kapitel gehören):

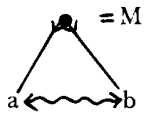
1.01a



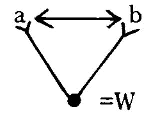
1.01b



1.02a



1.02b

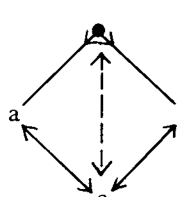


Sie besagen: Stehen zwei Begriffe im Art-Gattungs-Verhältnis, wie es der Identitätsstrich bezeichnet, so ist ihr Generalisat die Gattung selbst und ihr Spezifikat die Art. Sind sie zueinander disparat, so ist ihr Generalisat inhaltsleer, sind sie zueinander divers, so ihr Spezifikat umfangsleer, widerspruchsvoll.

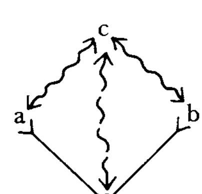
Diese Regeln bestätigen, daß die Verknüpfung zum Spezifikatbegriff dem „und", die zum Generalisat dem „oder" (im nicht-ausschließenden Sinne) operativ entspricht. Genauer gesagt handelt es sich um die Multiplikation bzw. die Addition der Booleschen Algebra, die auf diese Weise als Definitionstheorie in die aristotelische Logik eingebettet ist. In Logik II ist das weiter ausgeführt. In diesem Zusammenhang hat der Verfasser dort versehentlich statt von dieser Algebra vom Aussagenkalkül gesprochen, der ja spezieller ist. Dafür sowie für einige sehr störende Druckfehler, besonders in manchen Zeichnungen, kann hier nur um Entschuldigung gebeten werden.

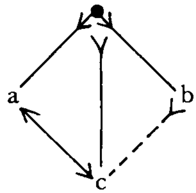
Mit einem Begriff mehr arbeiten die Regeln 1.4a bis 1.7b. Sie sind für die Anwendung der Logik unentbehrlich und bestimmen die operative Bedeutung des Punktzeichens weiter. In Logik II haben wir eine davon bewiesen, und sie sind auseinander leicht beweisbar. Leicht verstehbar werden sie, wenn man darin die Identitätsstriche sozusagen als Flußrichtung des Begriffsinhaltes oder, gegen die Pfeilrichtung, des Umfanges liest. Insgesamt können wir sie „*Herkunftsregeln*" nennen wegen solcher Überlegungen wie z. B. bei 1.5a: Wegen des senkrechten Identitätsstriches in der Mitte ist der gesamte Umfang von c in dem des Generalisates von a und b enthalten. Da c zu a divers, also umfangsfremd ist, muß sein Umfang also ganz über den von b dorthin geflossen sein, und das sagt der gestrichelte Identitätsstrich von c nach b. Oder man fragt bei 1.5b: Wie kommt der gesamte Inhalt von c in den des Spezifikates von a und b? Da c zu a disparat, also inhaltsfremd ist, kann er nur über b gekommen sein, und das sagt der gestrichelte Identitätsstrich von c nach b.

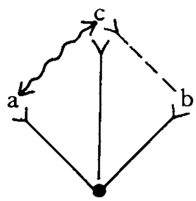
1.4a

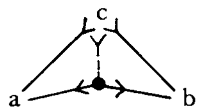


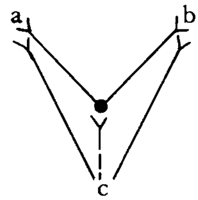
1.4b

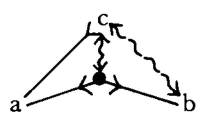


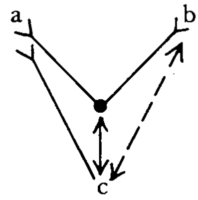
1.5a


1.5b


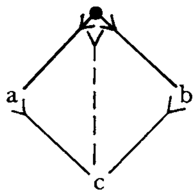
1.6a


1.6b


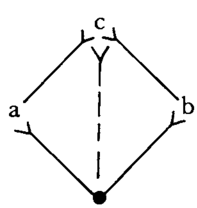
1.7a


1.7b


Bei der Aufzählung dieser Regeln haben wir leicht aus früheren beweisbare fortgelassen, z. B. sind



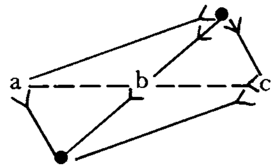
und



nichts weiter als einfache Anwendungen von 1.3 und daher nicht erwähnenswert.

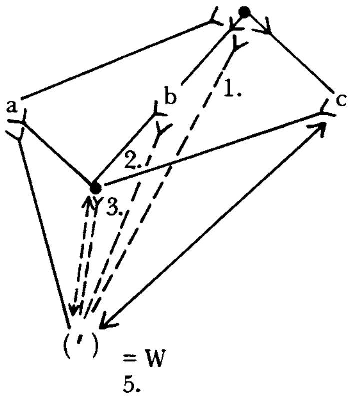
Interessant ist dagegen insbesondere die Regel 1.5a. Sie ist nämlich eine Verallgemeinerung des „tertium non datur" und zugleich der „in-an-Regel" 1.1. Wir nennen sie deshalb abgekürzt „tendal-Regel" (t. n. d.-allgemein). Zur Begründung: Der Identitätsstrich vom Generalisat zu c in dieser tendal-Regel ist in den beiden anderen genannten Regeln latent auch vorhanden, braucht aber dort nicht gezeichnet zu werden, weil das Generalisat zu disparaten Begriffen inhaltsleer, M ist, und diese Identitätsbeziehung trivialerweise gilt. Insofern sind die Begriffslagen dieser beiden Regeln Spezialfälle der Begriffslage, in der „tendal" anwendbar ist. Sie sind also aus „tendal" beweisbar.

Selbstverständlich gibt es auch Operationsregeln, in denen nicht nur ein definierter Begriff mitspielt, sondern deren mehrere. Von zweien handelt z. B. die meist auf Peirce zurückgeführte „*Schnittregel*". An ihr wollen wir nebenher etwas über direkte und indirekte Beweise in unserer Symbolik lernen. Wenn wir das algebraische „mal" als die Bildung eines Spezifikates und das algebraische „plus" als die eines Generalisates lesen, geht die algebraische Regel „aus ab–c = 0 und a–b–c = 0 folgt a–c = 0" nach Umformungen, die wir hier nicht darlegen wollen, bei uns in die folgende Operationsregel über:

1.8 

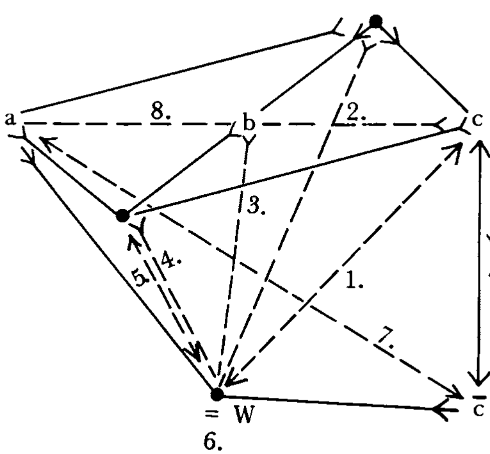
Wie in einem Syllogismus der Mittelbegriff eliminiert und eine direkte Beziehung zwischen den beiden Außenbegriffen hergestellt wird, so wird hier ein Begriff (b), dessen Spezifikat mit einem Begriff (a) unter einem anderen (c) und dessen Generalisat mit diesem anderen (c) über dem ersten (a) liegt, „herausgeschnitten", a direkt unter c gestellt. In der alten Algebra der Logik spielte sie deshalb eine gewisse Rolle.

Wir wollen zunächst sie selbst beweisen. Dazu zeichnen wir ihre Begriffslage ohne die durch sie garantierte Identität zwischen a und c. Jetzt haben wir die Wahl, ob wir den Beweis direkt oder indirekt führen wollen. Wenn man weiß, was herauskommen sollte, und wenn das eine universelle Beziehung ist, kommt man indirekt am schnellsten zum Ziel. Wir setzen also an, die fragliche Identität bestehe nicht, zeichnen stat des a-Urteils zwischen a und c ein o-Urteil ein. Indem wir nun uns bekannte Regeln anwenden, finden wir nun, wie neben der Zeichnung vermerkt, in 4 Schritten, daß der „vergessene" Begriff dieses o-Urteils = W, widerspruchsvoll ist. Das darf ein „vergessener" Begriff aber bekanntlich nicht sein, und wir haben damit einen Widerspruch zum Ansatz abgeleitet. Das o-Urteil gilt also nicht, und wir müssen sein Negat, das gesuchte a-Urteil ansetzen.



1. Regel 1.3
2. Regel 1.5a
3. Regel 1.6b
4. Regel 1.2a
5. Regel 4.1

Aus diesem indirekten Beweis kann man leicht einen direkten machen. Wir führen dann keine Beziehung zwischen a und c ein, sondern geben nur einen zusätzlichen Begriff vor, nämlich den, der dadurch definiert ist, daß er unter a liegt und zu c divers ist, wie jener vergessene Begriff. Da wir beim definieren bisher nur mit Spezifikat und Generalisat gearbeitet haben, stellen wir ihn als Spezifikat von a und $\overline{c}$ dar. Dann erweist sich in etwa denselben Schritten wie oben dieser Begriff als = W. Weil er ein definierter ist, gewinnen wir daraus die Diversität zwischen a und $\overline{c}$ und daraus die gesuchte Identität. Das alles zeigt die folgende Zeichnung:



1. Regel 1.2a
2. Regel 1.3
3. Regel 1.5a
4. Regel 1.6b
5. Regel 1.2a
6. Regel 4.1
7. Regel 4.6
8. Regel 1.1

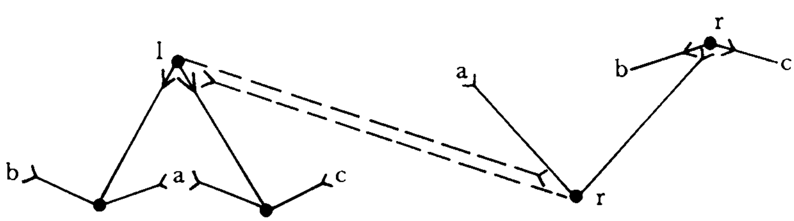
Offensichtlich stimmen die Schritte 2. bis 6. mit 1. bis 5. des vorigen Beweises überein. Daß es dann aber weiter gehen und der Beweis zu einem direkten werden kann, der das Ergebnis direkt hinzuschreiben erlaubt, das verdanken wir der Tatsache, daß eine Definition etwas logisch sehr starkes ist. Diese Tatsache wird besonders oft in der Praxis der Debatte übersehen!

Als deutlicheres Beispiel dafür, wie Gleichungen der Boole-Schröderschen Algebra zu Operationsregeln unserer Logik umgeschrieben werden können, wählen wir die beiden assoziativen Gesetze dieser Algebra. Sie lauten

I.	ab + ac	=	a(b + c)
II.	(a + b) (a + c)	=	a + bc

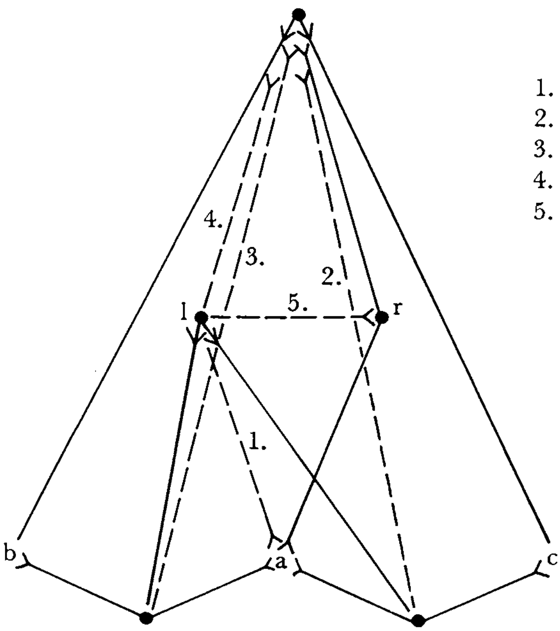
Wenn man hier für a, b, c, irgendwelche Zahlen, z. B. 3, 5, 7, einsetzt, sieht man, daß in der gewöhnlichen Arithmetik die erste Gleichung gilt. Die zweite aber führt da auf ihrer linken bzw. rechten Seite zu verschiedenen Ergebnissen. Sie gilt nicht. Vielmehr ist dieses zweite Distributivgesetz eine Besonderheit jener Algebra der Logik und hat dort und für den Umgang mit dieser Algebra erhebliche Konsequenzen. Wegen der die ganze Algebra der Logik durchziehenden Dualität hinsichtlich „mal" und „plus" sind beide Gesetze zueinander dual. Da auch für unsere Definitionstheorie die entsprechende Dualität zwischen Spezifikation und Generalisation gilt, brauchen wir eigentlich nur eines dieser Gesetze zu beweisen, wie das v. Petzinger (Logik im Abriß S. 22 ff.) publiziert hat. Dort finden sich die Beweise für das II. Gesetz. Deshalb wollen wir uns hier mit dem I. Gesetz beschäftigen.

Schreiben wir zunächst die Ausdrücke der linken und der rechten Seite jeweils in unserer Symbolik hin. Es sind die folgenden beiden Begriffsdefinitionen:



Das Gleichheitszeichen der Formel I besagt, daß die beiden hier letztlich definierten Begriffe total identisch sind, daß man in beiden Richtungen nach Belieben den einen durch den anderen ersetzen darf. Es werden hier also zwei gegenläufige Identitäten behauptet, wie wir sie hier gestrichelt eingezeichnet haben. Der Übergang vom linken Definitionsausdruck zum rechten bzw. der vom rechten zum linken, das sind zwei verschiedene Operationen, die Erlaubnis, die eine bzw. die andere Identität dazuzuzeichnen, sind zwei verschiedene Operationsregeln, die wir einzeln werden beweisen müssen. Jede Gleichung der Algebra der Logik liefert uns auf solche Weise zwei Operationsregeln. Handelt es sich um eine in der Algebra allgemein bewiesene Gleichung, so genügt die korrekte Umschreibung schon als Beweis. Wir hätten es nicht nötig, noch von der Begriffslage aus in unserer Technik nach Beweisen zu suchen. Ein gewisser Ehrgeiz treibt uns doch dazu, und die Absicht, alles an logischen Einsichten mitzunehmen, was uns unsere Technik geben kann.

Zunächst bringen wir die beiden Definitionen der linken und der rechten Seite, der Begriffe l und r, in eine einzige Begriffslage, schreiben also a, b, c nur einmal hin und zeichnen die Verknüpfungen und Beziehungen beider Seiten ein. Gestrichelt ist in der folgenden Figur dann gleich der Beweis für die eine Identitätsrichtung l(inke Seite) unter r(echte) eingezeichnet. Daneben ist als Sehhilfe angegeben, nach welcher Operationsregel die neuen Beziehungen jeweils eingezeichnet werden durften.

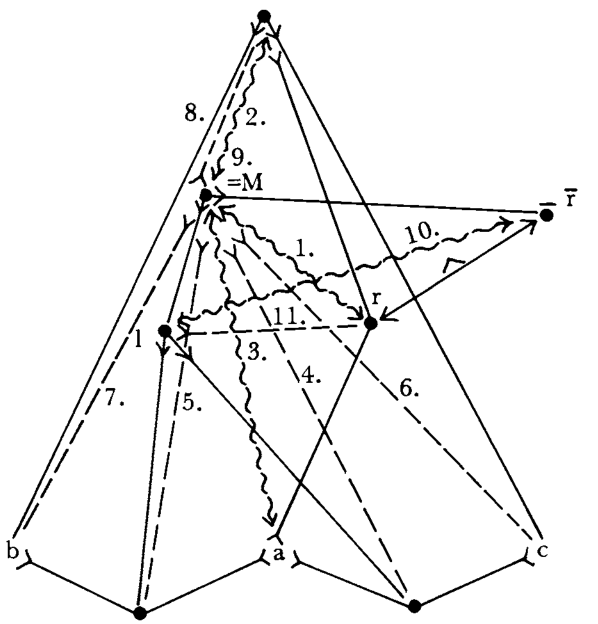


1. Regel 1.6a
2. Regel 1.3
3. Regel 1.3
4. Regel 1.6a
5. Regel 1.6b

Wie liest man einen solchen Beweis? Man schlägt die angegebene Regel auf, hier für die Erzeugung der Identität 1. die Regel 1.6a, und prüft, ob und wie deren Begriffslage in der vorliegenden auftritt, und tatsächlich, der Begriff a liegt über den beiden Begriffen, deren Generalisat l ist, und liegt daher nach eben dieser Regel selbst über l. So kontrolliert man Zeile für Zeile weiter und übt dabei, die Begriffslagenstrukturen von Operationsregeln in komplexeren Begriffslagen wiederzuerkennen.

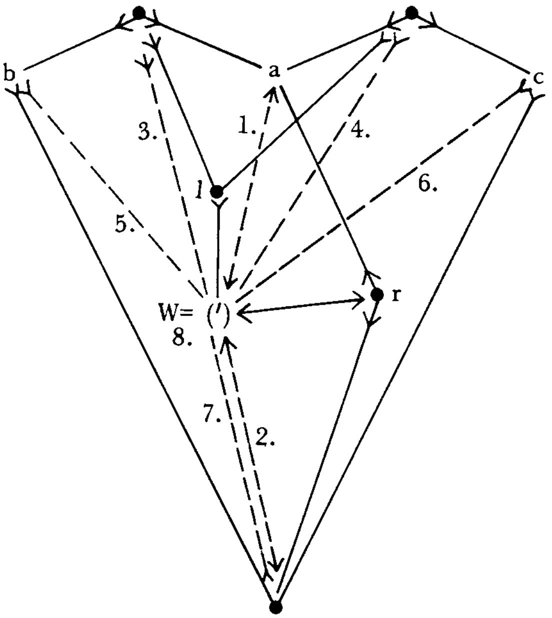
In fünf Operationsschritten haben wir also die Identität, nach der l unter r liegt, von l also zu r übergegangen werden darf, hergeleitet.

Der Beweis der anderen Identitätsrichtung gestaltet sich erheblich schwieriger. Wir führen ihn in derselben Begriffslage, müssen aber einen zusätzlichen definierten Begriff vorgeben, wenn wir uns nicht mit einem indirekten Beweis begnügen wollen. Beim Versuch, einen solchen anzusetzen, finden wir als den geeignetsten zusätzlichen Begriff den, der dadurch definiert ist, daß er unter r und zu l divers ist. Da wir bisher nur mit Definitionen durch Bildung des Spezifikates oder des Generalisates arbeiten, würden wir ihn als das Spezifikat aus r und dem Negat von l darstellen. Mit ihm zugleich wäre aber sein Negat, das Generalisat aus l und dem Negat von r, gegeben. Wir verkürzen den so gefundenen Beweis, wenn wir gleich diesen letzteren Begriff vorgeben. Wir zeichnen also $\bar{r}$ und sein Negatverhältnis zu r in die Begriffslage und bilden dessen Generalisat mit l. Damit sind die Begriffe und Beziehungen der folgenden Beweisfigur erklärt. Zunächst mit Regeln für die Disparität arbeitend, an die man meist zuletzt denkt, gewinnen wir in 11 Schritten, daß r unter l liegt, und sind damit mit dem Beweis des ersten Distributivgesetzes als Operationsregelpaar, oder als Operationsregel, die die Einsetzung einer totalen Identität erlaubt, fertig.

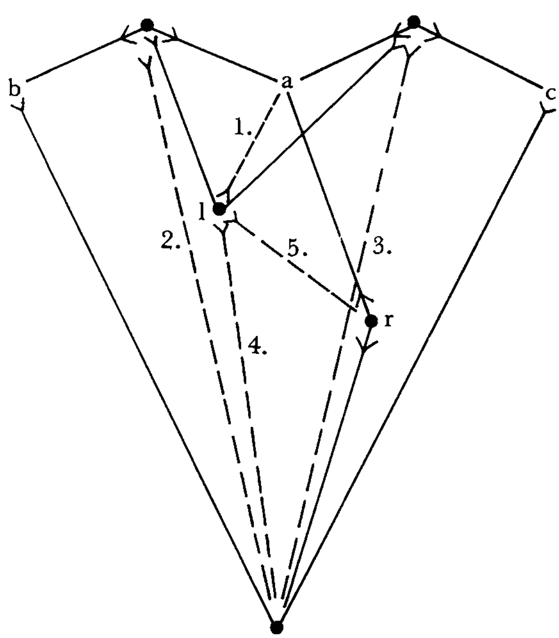


1. Regel 1.2b
2. Regel 1.2b
3. Regel 1.2b
4. Regel 1.3
5. Regel 1.3
6. Regel 1.5b
7. Regel 1.5b
8. Regel 1.6a
9. Regel 4.1
10. Regel 4.6
11. Regel 1.1

Das zum somit in beiden Richtungen bewiesenen ersten Distributivgesetz duale zweite (siehe oben) läßt sich mit zu den obigen Schritt für Schritt und Zeichen für Zeichen dualen beweisen. Wir bringen dazu die folgenden Beweiszeichnungen ohne weiteren Kommentar. Für die zweite Richtung der Identität begnügen wir uns mit einem indirekten Beweis. Ihn zu einem direkten zu machen wird nach obigem dem Leser nicht schwer fallen.



1. Regel 1.2a
2. Regel 1.2a
3. Regel 1.3
4. Regel 1.3
5. Regel 1.5a
6. Regel 1.5a
7. Regel 1.6b
8. Regel 4.1



1. Regel 1.6b
2. Regel 1.3
3. Regel 1.3
4. Regel 1.6b
5. Regel 1.6a

Als Beispiel dafür, daß schon mit so einfachen Operationsregeln, wie wir sie bisher entwickelt haben, in der Anwendung der Logik einiges getan werden kann, bringen wir einen historisch nicht unwichtigen Punkt.

Bernhard Bolzano hat in seiner „Wissenschaftslehre" bestritten, daß die sogenannte „Inhalts-Umfangs-Relation" allgemein gilt, der Satz nämlich, daß man den Umfang eines Begriffes verkleinere, wenn man seinen Inhalt vergrößere und vice versa. Nun ist nie ganz klar geworden, was Bolzano eigentlich unter dem Inhalt eines Begriffes versteht, und sein Begriff des Umfanges ist gefährlich nahe an dem, was man heute als Klasse eines Begriffes bezeichnet. Schließlich ist klar, daß er sich bei seinen Betrachtungen stärker vom sprachlichen Ausdruck leiten läßt, als wir das logisch für zuläßig halten können. Aber wie dem auch sei, er hat seinen Einwand gegen die für uns unerläßliche Relation zwischen Inhalt und Umfang eines Begriffes durch Gegenbeispiele gestützt. Eines davon ist sofort zuzugeben, besagt aber nichts zum Streitpunkt, weil es sich um abundante Definitionen handelt, bei denen die Inhaltsvergrößerung nur sprachlich vorgetäuscht ist und der Umfang sich infolgedessen nicht ändern kann. Aufsehenerregend aber war ein heute noch oft zitiertes Beispiel, bei dem, wie Bolzano meinte, der Inhalt eines Begriffes vergrößert und dabei auch der Umfang größer wurde. Erstaunlicherweise hat man dieses Beispiel bis in unsere Tage niemals unter die logische Lupe genommen. Wir wollen das kurz tun.

Bolzano schreibt: „So entsteht aus der Vorstellung „eines Menschen, der alle europäischen Sprachen versteht", durch den Zusatz „lebende" die neue Vorstellung „eines Menschen, der alle lebenden europäischen Sprachen versteht", die gewiß mehr Inhalt und auch einen größeren Umfang als die vorige hat".

Es ist nicht zu leugnen, daß der zweite Begriff eine um das Wort „lebenden" längere sprachliche Bezeichnung hat. Hat er deswegen aber „gewiß mehr Inhalt"? Schreiben wir beide Begriffe mit unserem Definitionszeichen, so wird Bolzanos Irrtum sofort sichtbar, nämlich so: Es bedeute

a	alle lebenden europäischen Sprachen verstehend
b	alle nicht lebenden europäischen Sprachen verstehend
c	alle europäischen Sprachen verstehend
d	Mensch
e	Mensch, der alle europäischen Sprachen versteht
f	Mensch, der alle lebenden europäischen Sprachen versteht

Offensichtlich dürfen wir c als Spezifikat von a und b definieren, e als Spezifikat von d mit c und f als Spezifikat von d mit a. Das ergibt die folgende Begriffslage: