Meiner Philosophische Bibliothek

Gottlob Frege

Die Grundlagen der Arithmetik

GOTTLOB FREGE

Die Grundlagen der Arithmetik

Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl

Auf der Grundlage der Centenarausgabe
herausgegeben von
CHRISTIAN THIEL

FELIX MEINER VERLAG HAMBURG

PHILOSOPHISCHE BIBLIOTHEK BAND 366

Grundlage dieses Bandes ist die Centenarausgabe, Hamburg 1986, LXIII, 187 Seiten. Für die Studienausgabe wurden der Text Freges und die Anmerkungen übernommen.

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet abrufbar über ‹http://portal.dnb.de›.
ISBN: 978-3-7873-0719-7
ISBN eBook: 978-3-7873-3222-9

www.meiner.de

INHALT

EINLEITUNG DES HERAUSGEBERS

„Meine Anstrengungen, über das ins Klare zu kommen, was man Zahl nennen will, haben zu einem Mißerfolge geführt“, notiert Frege am 23. März 1924 in sein Tagebuch. Dieser Mißerfolg, den Frege durch die Herleitung der Zermelo-Russellschen Antinomie (s. u.) in seinem ausgearbeiteten System bestätigt sah, mußte in fehlerhaften Annahmen des Fregeschen Systems seine Gründe haben. Der wohl aus Freges letztem Lebensjahr stammende, fragmentarisch gebliebene *Neue Versuch der Grundlegung der Arithmetik* befaßt sich mit solchen Gründen und enthält als vorausgeschicktes Fazit gleich zu Beginn zwei Selbstberichtigungen Freges:

> „Ich habe die Meinung aufgeben müssen, daß die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und daß demgemäß in der Arithmetik alles rein logisch bewiesen werden müsse. Zweitens habe ich die Meinung aufgeben müssen, daß die Arithmetik auch der Anschauung keinen Beweisgrund zu entnehmen brauche“ (NSchrWB I, 298).

Ganz bewußt lehnt sich die Formulierung dieser Sätze an den Anfang der Einleitung zu den *Grundgesetzen der Arithmetik* an, wo Frege geschrieben hatte:

> „In meinen *Grundlagen der Arithmetik* habe ich wahrscheinlich zu machen gesucht, dass die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und weder der Erfahrung noch der Anschauung irgendeinen Beweisgrund zu entnehmen brauche“ (GGA I, 1).

Welche Revolution in Freges Denken die Zurücknahme seines logizistischen Programms, die Arithmetik allein mit Mitteln der Logik zu begründen, bedeutete, kann man erst verstehen, wenn man sich die Hintergründe, die Ziele und die Hauptschritte dieses Programms vor Augen führt. Geschieht dies anhand der *Grundlagen,* so wird zugleich deutlich, weshalb wir heute trotz der Unerreichbarkeit des Fregeschen Ziels auf dem von ihm gewählten Wege zu den klassischen Lehrstücken philosophischer Analyse gerade Freges *Grundlagen der Arithmetik* rechnen, deren für die Centenarausgabe (1986) kritisch durchgesehener und kommentierter Text hier in einer Studienausgabe zugänglich gemacht wird.

1. Ziele der *Grundlagen der Arithmetik*

Friedrich Ludwig Gottlob Frege (* 8. 11. 1848 in Wismar, † 26. 7. 1925 in Bad Kleinen) studierte zunächst in Jena und dann in Göttingen, wo er 1873 aufgrund seiner Dissertation über ein geometrisches Thema promoviert wurde. Schon 1874 habilitierte er sich für Mathematik an der Universität Jena, deren Lehrkörper er von da an bis zu seinem Rücktritt vom Lehramt im Jahre 1918 angehörte. Seine drei Buchveröffentlichungen - die *Begriffsschrift* 1879, *Die Grundlagen der Arithmetik* 1884 und *Grundgesetze der Arithmetik* I 1893, II 1903 – markieren drei aufeinanderfolgende, jeweils das bis dahin Erreichte in der Darstellung verbessernde und inhaltlich weiterführende Schritte auf dem Weg des obengenannten logizistischen Programms. In der *Begriffsschrift* wollte Frege „versuchen, wie weit man in der Arithmetik durch Schlüsse allein gelangen könnte, nur gestützt auf die Gesetze des Denkens, die über allen Besonderheiten erhaben sind" (BS IV), wobei er „zuerst den Begriff der Anordnung in einer Reihe auf die *logische* Folge zurückzuführen suchte, um von hier aus zum Zahlbegriff fortzuschreiten. Damit sich hierbei nicht unbemerkt etwas Anschauliches eindrängen konnte, musste Alles auf die Lückenlosigkeit der Schlusskette ankommen" (ibid.). Garantieren sollte diese Lückenlosigkeit, auf der Basis eines zweidimensionalen Notationssystems für die logischen Grundbegriffe und Verknüpfungen (z. B. „nicht", „und", „wenn ...,dann ---", „alle ... sind ---", „manche ... sind ---"), ein von Frege ohne jedes historische Vorbild geschaffener Logikkalkül, die „technische" Manifestation eines axiomatischen Aufbaus der heute so genannten klassischen Aussagen- oder Junktorenlogik sowie (stufenunabhängig) der klassischen Prädikaten- oder Quantorenlogik. Technisch weiter verbessert und um die „Logik" der Begriffsumfänge oder Mengen erweitert liegt dieses begriffsschriftliche System auch Freges Hauptwerk, den *Grundgesetzen der Arithmetik* zugrunde. Frege übernimmt hier in begriffsschriftlicher Fassung die Definitionen der arithmetischen Grundbegriffe und -beziehungen, die er 1884 in *Die Grundlagen der Arithmetik* gegeben hatte – dort noch ohne symbolische Einkleidung und damit den esoterischen Charakter, der die anderen beiden Werke bis heute einem breiteren philosophischen Publikum unzugänglich erscheinen läßt.

Über die Ziele des Buches hat sich Frege deutlich ausgesprochen: Es sollte einen *mathematischen Beitrag* liefern, indem die zeitgenössischen Bemühungen um eine strengere Begründung der Mathematik durch genauere Analyse ihrer Begriffe und Zurückführung ihrer Sätze auf wenige überschaubare Axiome um eine Analyse der Begriffe und Sätze der Arithmetik erweitert wurde, bis zu denen das sog. „Arithmetisierungsprogramm" der Analysis bereits zurückgegangen war. Es sollte aber auch einen *philosophischen Beitrag* leisten und die Frage „nach der apriorischen oder aposteriorischen, der synthetischen oder analytischen Natur der arithmetischen Wahrheiten" (GLA 3) dadurch einer Beantwortung näherbringen, daß die Frage entschieden wird, ob der Anzahlbegriff durch einfachere Begriffe definiert werden könne oder nicht. „Das soll die Aufgabe dieses Buches sein" (ibid.).

2. Hauptprobleme und Inhalt der *Grundlagen*

Frege gibt in den *Grundlagen der Arithmetik* eine Definition des Anzahlbegriffs, in deren Definiens allein Begriffe der Logik vorkommen (so wie Frege deren Bereich abgrenzt; nach heutiger Sichtweise und Terminologie definiert er die Anzahl durch Begriffe der elementaren Mengenlehre). Damit beantwortet er die Frage nach der Natur der arithmetischen Wahrheiten im Sinne ihres analytischen Charakters.

Für diese Antwort aber, die erst im letzten Drittel der *Grundlagen* erfolgt, müssen Vorbereitungen getroffen werden, und Frege rechnet zu diesen offenbar auch die umfassende, die erste Hälfte des Buches füllende Zusammenstellung und Kritik von „Meinungen von Philosophen und Mathematikern über die hier in Betracht kommenden Fragen" (GLA IV). Von Philosophen *und* Mathematikern – denn schon in der *Einleitung* weist Frege die Untersuchung des Zahlbegriffs der Mathematik und der Philosophie als gemeinsame Aufgabe zu und vermutet, daß die zur Lösung nötige Zusammenarbeit beider Wissenschaften durch das „Ueberwiegen psychologischer Betrachtungsweisen in der Philosophie, die selbst in die Logik eindringen" (GLA V), behindert werde. So erklärt sich auch der erste der drei „Grundsätze", von denen Frege sagt, daß er sie bei den Untersuchungen in den *Grundlagen* konsequent festgehalten habe (GLA X):

1. „es ist das Psychologische von dem Logischen, das Subjective von dem Objectiven scharf zu trennen“.

Natürlich ist mit der Formulierung nicht gemeint, daß alles Objektive logisch und alles Subjektive psychologisch sein müßte, gemeint ist vielmehr, daß das Psychologische als etwas das rein Subjektive Betreffendes vom Logischen als einem etwas rein Objektives Betreffenden getrennt werden sollte (vgl. auch § 93);

2. „nach der Bedeutung der Wörter muss im Satzzusammenhange, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden“ –

eine nicht unumstrittene, da oft (z. B. in der gegenwärtigen analytischen Philosophie) überinterpretierte Stelle, die wichtig wird bei der Fregeschen Analyse des Sinnes der Zahlwörter in Sätzen, in denen eine Zahlangabe erfolgt (vgl. § 60);

3. „der Unterschied zwischen Begriff und Gegenstand ist im Auge zu behalten“ –

ein Unterschied, der ebenfalls für die Analyse der Zahlangabe von Wichtigkeit ist, weil eine Zahl für Frege „eben dadurch, dass sie nur einen Theil der Aussage [sc. des Prädikats, das bei einer Zahlangabe von einem Begriff ausgesagt wird, C.T.] bildet, als selbständiger Gegenstand“ erscheint (GLA 68, vgl. auch allgemeiner §§ 57ff. und für eine weitere Anwendung des Grundsatzes § 97).

Nach den ersten vier Paragraphen, welche Motivation und Zielsetzung des Buches darlegen, erörtert Frege in Teil I „Meinungen einiger Schriftsteller über die Natur der arithmetischen Sätze“, wobei er sich sowohl von Kants Auffassung dieser Sätze als zwar apriori, aber synthetisch, als auch von J. S. Mills empiristischer Auffassung der arithmetischen Wahrheiten in detaillierter Kritik absetzt. In Teil II, „Meinungen einiger Schriftsteller über den Begriff der Anzahl“, wendet er sich zunächst gegen die (aufgrund der Verwendungsweise der Zahlwörter in der Sprache „in adjectivischer Form und in attributiver Verbindung“ (GLA 27) naheliegende Gleichstellung der Zahlwörter mit Eigenschaftswörtern wie „hart“, „schwer“ usw. Daß die Zahl nicht den einzelnen gezählten Dingen als ihre Eigenschaft zukommen könne, zeigt sich nach Frege daran, daß man doch „in einem ganz andern Sinne von 1 000 Blättern als von grünen Blättern des Baumes“ spreche – „die grüne Farbe legen wir jedem Blatte bei, nicht so die Zahl 1 000“ (GLA 28).

Nicht weniger fehlerhaft wäre es jedoch, die Zahl nun als etwas Subjektives anzusehen:

> „die Zahl ist so wenig ein Gegenstand der Psychologie oder ein Ergebnis psychischer Vorgänge, wie es etwa die Nordsee ist. Der Objectivität der Nordsee thut es keinen Eintrag, dass es von unserer Willkühr abhangt, welchen Theil der allgemeinen Wasserbedeckung der Erde wir abgrenzen und mit dem Namen ‚Nordsee' belegen wollen. So ist auch die Zahl etwas Objectives" (GLA 34).

Dabei unterscheidet Frege „das Objective von dem Handgreiflichen, Räumlichen, Wirklichen" (GLA 35) und bezeichnet z. B. die Erdachse, den Äquator und den Massenmittelpunkt des Sonnensystems als objektiv, obwohl sie nicht wirkliche Gegenstände sind (wie z. B. die Erde). Objektivität ist in Freges *Grundlagen*

> „eine Unabhängigkeit von unserm Empfinden, Anschauen und Vorstellen, von dem Entwerfen innerer Bilder aus den Erinnerungen früherer Empfindungen, aber nicht eine Unabhängigkeit von der Vernunft; denn die Frage beantworten, was die Dinge unabhängig von der Vernunft sind, hiesse urtheilen, ohne zu urtheilen, den Pelz waschen, ohne ihn nass zu machen" (GLA 36).

Nachdem Frege in Teil III noch unzulängliche „Meinungen über Einheit und Eins" zurückgewiesen hat, beginnt er in Teil IV „Der Begriff der Anzahl" mit seinen eigenen Lösungsvorschlägen und fordert zunächst, „die Zahl im Zusammenhange eines Urteils zu betrachten, wo ihre ursprüngliche Anwendungsweise hervortritt" (GLA 59). Die Frage, „von wem durch eine Zahlangabe etwas ausgesagt werde" (GLA 58), hat nach Frege die Antwort, „dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte" (GLA 59). Denn sage ich z. B. „die Venus hat 0 Monde", so ist weder ein Mond noch ein Aggregat von Monden da, von denen etwas ausgesagt wurde, sondern es wird dem Begriff *Venusmond* „eine Eigenschaft beigelegt, nämlich die, nichts unter sich zu befassen" (ibid.). Auch der paradoxe Schein bei der fehlerhaften Annahme von Gegenständen als Träger der Zahlen, als könnten ein und demselben Gegenstand verschiedene Zahlen zukommen, fällt weg, wenn wir mit Frege „den wahren Träger, den Begriff, in seine Rechte einsetzen" (GLA 61).

Dieser Standpunkt findet eine Stütze im Sprachgebrauch selbst, den Frege jetzt durch (für die sprachanalytische Philosophie der Gegenwart vorbildlich gewordene) Analysen der Verwendung des bestimmten und des unbestimmten Artikels, der Existenzaussagen (mit der Einführung von „Begriffen zweiter Stufe") sowie des Unterschieds von Merkmalen und Eigenschaften von Begriffen erhellt. Auf das Fehlen der auf diese Weise kritisch gesicherten Erkenntnis, „dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthält" (GLA 67), führt Frege die Mehrzahl der von ihm kritisierten Mängel in früheren Auffassungen der Zahl und des Wesens der arithmetischen Wahrheiten zurück.

Die beiden folgenden Unterabschnitte des Teils IV der *Grundlagen* sind mit Thesen überschrieben. Die erste lautet: „Jede einzelne Zahl ist ein selbständiger Gegenstand". Hier geht es Frege um die Analyse von Aussagen wie „Jupiter hat vier Monde" als „Dem Begriff ‚Jupitermond' kommt die Zahl 4 zu", wobei der Nominator „die Zahl 4" jedoch nicht eine dem genannten Begriff zukommende *Eigenschaft,* kein bloßes Attribut bezeichnet, sondern einen selbständigen Gegenstand. Der zweite Unterabschnitt trägt als Überschrift die These: „Um den Begriff der Anzahl zu gewinnen, muss man den Sinn einer Zahlengleichung feststellen".

Eine Zahlengleichung hat logisch betrachtet immer die Form: „Die Zahl, welche dem Begriff F zukommt, ist dieselbe, welche dem Begriff G zukommt". Es gilt, den Inhalt solcher Aussagen zu erklären, ohne dabei Ausdrücke der Gestalt „die Anzahl, welche dem Begriff F zukommt" vorauszusetzen. Diese Aufgabe scheint zunächst dadurch gelöst zu werden, daß wir die Anzahlen, die zwei Begriffen F und G zukommen, genau dann *gleich* nennen, wenn unter F und G „gleichviele" Gegenstände fallen, wofür wir das Kriterium haben, daß man jedem unter F fallenden Gegenstand einen unter G fallenden Gegenstand zuordnen kann und umgekehrt – eine von Frege als „Gleichzahligkeit" von F und G bezeichnete Beziehung zwischen Begriffen (die also auf die angegebene Weise und nicht zirkelhaft durch Vorgriff auf den Zahlbegriff definiert wird, wie das Wort „Gleichzahligkeit" nahelegen könnte).

Kürzen wir „die Anzahl, welche dem Begriff F zukommt" als „$\#F$" ab, so läßt sich der beschriebene Übergang (unter Verwendung von „ε" für die Kopula „ist" und von „$\approx$" für „gleichzahlig zu") ausdrücken als

$$\begin{aligned} \#F = \#G &\Leftrightarrow F \approx G \\ &\Leftrightarrow \text{für alle Gegenstände a: } a\,\varepsilon\,F \leftrightarrow a\,\varepsilon\,G. \end{aligned}$$

Frege erörtert die Probleme eines solchen Übergangs am anschaulicheren geometrischen Beispiel

$$\vec{g} = \vec{h} \Leftrightarrow g \| h,$$

durch das die Gleichheit der Richtungen $\vec{g}$ und $\vec{h}$ zweier Geraden g und h in der ebenen euklidischen Geometrie durch deren Parallelität erklärt wird. In beiden Fällen gehen wir von einer Äquivalenzbeziehung zweier Ausgangsgegenstände (Geraden; Begriffe) zur Gleichheitsbeziehung zwischen neuen, diesen Gegenständen zugeordneten Gegenständen (Richtungen der Geraden; den Begriffen zukommenden Anzahlen) über. Frege hat diese von Peano als „Definitionen durch Abstraktion" bezeichneten Übergänge in den *Grundlagen* analysiert und ihre Legitimität verteidigt, sofern man nur zu Gleichheitsaussagen über die neuen Gegenstände übergehen will. „Alle andern Aussagen von Richtungen müssen erst erklärt werden und für diese Definitionen können wir die Regel aufstellen, dass die Ersetzbarkeit der Richtung einer Gerade durch die einer ihr parallelen gewahrt bleiben muß" (GLA 77). Das heißt: als Aussagen über Richtungen läßt Frege nur solche zu, deren Wahrheitswert unverändert („invariant") bleibt bei Ersetzung eines in der Aussage vorkommenden Richtungsausdrucks durch irgendeinen anderen zu ihm im Sinn der Äquivalenzbeziehung Parallelität äquivalenten, also nur Aussagen $A(\vec{x})$ über Richtungen, für die gilt:

$$g \| h \rightarrow (A(\vec{g}) \rightarrow A(\vec{h})),$$

Wegen

$$g \| h \rightarrow (\vec{g} = \vec{k} \rightarrow \vec{h} = \vec{k})$$

erfüllen Aussagen über Richtungsgleichheit diese Bedingung ebenso wie, ganz analog, Aussagen über die Gleichheit der zwei Begriffen zukommenden Anzahlen:

$$F \approx G \rightarrow (\#F = \#H \rightarrow \#G = \#H).$$

Nur weil Frege dieses Fundamentalkriterium für Richtungen bzw. Begriffen zukommende Anzahlen formuliert und nicht für die jeweiligen Ausgangsgegenstände, d. h. nicht als

$$g \| h \rightarrow (A(g) \rightarrow A(h))$$

bzw. $F \approx G \rightarrow (A(F) \rightarrow A(G))$,

„verpaßt" er sozusagen die heutige Einführung abstrakter Gegenstände (wie geometrischer Richtungen oder Zahlen) durch „Abstraktionsschritte" und verwirft das ganze Verfahren als für den angestrebten Zweck noch unzureichend mit der Begründung, es erlaube nicht, den Sinn von Gleichheitsaussagen zu erklären, in denen *nur einer* der durch das Gleichheitszeichen verbundenen Ausdrücke die Gestalt „$\vec{x}$" bzw. „$\#X$" hat.

Frege ist die Umgehung dieser Schwierigkeit erst in den *Grund-*

gesetzen der Arithmetik und nur durch eine tiefgreifende Umgestaltung des methodischen Aufbaus der Grundlagen von Logik und Arithmetik gelungen. Hier in den *Grundlagen* bahnt sich Frege den Weg zu seiner logizistischen Anzahldefinition durch Heranziehung des dabei als bekannt vorausgesetzten Begriffs des Begriffsumfanges. Dem liegt die Beobachtung zugrunde, daß im Fall der Parallelität zweier Geraden g und h nicht nur die Richtungen derselben gleich sind, sondern auch der Umfang des Begriffs „Gerade parallel der Geraden g" gleich dem Umfang des Begriffs „Gerade parallel der Geraden h". Frege erklärt daher:

> die Richtung der Geraden g *ist* der Umfang des Begriffs „parallel der Geraden g",

und analog

> die Anzahl, welche dem Begriff F zukommt, *ist* der Umfang des Begriffs „gleichzahlig dem Begriff F". (GLA 79f.).

Dann wird die *Gleichheit* der zwei Begriffen F und G zukommenden Anzahlen also definiert durch die *Umfangsgleichheit* der Begriffe „zu F gleichzahliger Begriff" und „zu G gleichzahliger Begriff" (aber nicht etwa durch die Umfangsgleichheit der Begriffe F und G!). In der Tat läßt sich so, wie Frege in den §§ 70ff. zeigt, sein Programm zur Begründung der Arithmetik und prinzipiell ihr Aufbau bis zu unendlichen Anzahlen und den „höheren Zahlenarten" durchführen – um den Preis der Voraussetzung, daß man bereits verstehe, was Begriffsumfänge sind und wie die Gleichheit zweier Begriffsumfänge zu erklären ist. Es ist diese Erklärung, die Frege erst in den *Grundgesetzen* „nachgeliefert" hat.

3. Zur Beurteilung der *Grundlagen*

Trotz Freges Verzicht auf die technischen Mittel der Begriffsschrift war das zeitgenössische Echo auf die *Grundlagen* dürftig und vor allem inhaltlich enttäuschend; man vergleiche dazu die in der Centenarausgabe abgedruckten fünf Rezensionen des Werkes. Frege konnte sich nur noch zum Ziel setzen, nunmehr durch die Tat, durch einen lückenlosen und strengen Aufbau der Arithmetik das logizistische Programm zu verwirklichen. Dies sollte Freges Hauptwerk *Grundgesetze der Arithmetik* leisten, dessen drei auffallendste Neuerungen die folgenden sind: 1. die Auffassung des Begriffs als einstellige Funktion erster Stufe mit ausschließlich Wahrheitswerten als Werten, 2. die Zuordnung eines „Wertverlauf" genannten Gegenstands zu jeder einstelligen Funktion erster Stufe, von der Art, daß die Wertverläufe von Begriffen gerade deren Umfänge sind, und 3. die Erklärung der Gleichheit von Wertverläufen (also insbesondere von Begriffsumfängen) durch das berühmte Grundgesetz V (mit der Notation „$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" oder „$\grave{\alpha}\Phi(\alpha)$" für den Wertverlauf einer Funktion $\Phi(\xi)$):

$\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha) \Leftrightarrow$ für alle Gegenstände a: $f(a) = g(a)$.

Obwohl diese Festsetzung ganz unbedenklich erscheint, da auch in der logischen Tradition umfangsgleiche Begriffe stets als solche erklärt wurden, unter welche genau die gleichen Gegenstände fallen, zeigte 1902 Russells Entdeckung der heute nach ihm benannten Antinomie, daß das formal nahezu perfekte System der Fregeschen *Grundgesetze* widerspruchsvoll ist. Über die Gründe dieses Scheiterns sind sich die Gelehrten bis heute nicht einig; der üblicherweise vorgeschlagene Ausweg besteht in einer Einschränkung des Grundgesetzes V, meist zusammen mit der Unterscheidung verschiedener Typen oder Stufen nicht nur von Funktionen (wie sie schon Frege vornimmt), sondern auch von Gegenständen.

Frege selbst hat nach dieser Erschütterung seines Systems den Aufbau der Arithmetik mit dem zweiten Band der *Grundgesetze* abgebrochen, an dessen Ende er in einem „Nachwort" die Russellsche Antinomie mitteilt und auch einen eigenen Vorschlag zu ihrer Vermeidung macht. Obwohl nach aller unserer historischen Kenntnis die Undurchführbarkeit auch des Fregeschen Auswegs erst in den Dreißiger Jahren erkannt wurde, hat Frege – wie eingangs geschildert – seinen Versuch zu einem logizistischen Aufbau der Arithmetik gegen Ende seines Lebens als gescheitert, ja *jeden* solchen Versuch als verfehlt betrachtet. Diese späte Position Freges läßt sich kurz so beschreiben, daß er zwar zu der Fundamentaleinsicht steht, daß die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriff enthält, und er auch weiterhin die Meinung verficht, daß die Aussagen der Arithmetik apriorische Sätze seien, daß er aber im Unterschied zur früheren, insbesondere in den *Grundlagen* vertretenen Position die Definition der Anzahl als Umfang eines Begriffs fallen läßt und auch nicht mehr den rein analytischen Charakter der arithmetischen Aussagen behauptet: neben die logische habe eine geometrische Erkenntnisquelle zu treten, die man sich (nach Freges nicht sehr ausführlichen Äußerungen) wohl als eine Art reine Anschauung vorzustellen hat. Wie die geometrischen, so wären dann auch die arithmetischen Aussagen synthetische Sätze apriori. Was Frege noch zum Schluß des zweiten Bandes der *Grundgesetze* als das Urproblem der Arithmetik bezeichnet hatte, nämlich die Frage, wie wir logische Gegenstände und insbesondere die Zahlen „fassen", erscheint ihm jetzt, da er die Zahlen nicht mehr als rein logische Gegenstände ansieht, als eine verfehlte Problemstellung.

Die Fachwelt hat Freges letztes Urteil über sein logizistisches Programm nicht einhellig geteilt: Von Russell bis Quine hat eine ganze Reihe hervorragender Logiker und Grundlagenforscher auf modifizierten Wegen die Grundidee doch noch zu verwirklichen gesucht. Daß ihnen dies gelungen sei, wird heute eher bezweifelt, doch ausdiskutiert ist die Frage nicht und wird es auch nicht sein können, solange die bei Frege noch verbundenen, heute aber weitgehend getrennten und zum Teil ideologisch in Konkurrenz gesetzten Methoden der Konstruktion, der Abstraktion und der axiomatischen Eingrenzung nicht wieder zu einer fruchtbaren Synthese gebracht sind. Wie immer die Frage eines Tages beantwortet werden mag, an der historischen Bedeutung und dem systematischen Wert von Freges *Grundlagen der Arithmetik* wird es nichts ändern. Denn schon in diesem ersten ernsthaften Realisierungsversuch der logizistischen Idee hat Frege eine solche Fülle von Teil- und Nebenergebnissen erzielt, die wir heute zum festen Bestand an Erkenntnissen von Philosophie, Wissenschaftstheorie, Logik und mathematischer Grundlagenforschung rechnen, daß der seinen *Grundlagen* heute zugemessene Rang vielleicht sogar höher ist, als ihn Frege selbst seiner Schrift gegen Ende seines wissenschaftlichen Schaffens zugebilligt hatte.

Für einen ins Detail gehenden Kommentar zum Text der *Grundlagen,* für Informationen zur Textüberlieferung der *Grundlagen* und ein ausführliches Literaturverzeichnis muß hier auf die Centenarausgabe verwiesen werden.

Die

Grundlagen der Arithmetik.

Eine logisch mathematische Untersuchung

über den Begriff der Zahl

von

Dr. G. Frege,

a. o. Professor an der Universität Jena.

BRESLAU.

Verlag von Wilhelm Koebner.

1884.

EINLEITUNG.

Auf die Frage, was die Zahl Eins sei, oder was das Zeichen 1 bedeute, wird man meistens die Antwort erhalten: nun, ein Ding. Und wenn man dann darauf aufmerksam macht, dass der Satz

„die Zahl Eins ist ein Ding“

keine Definition ist, weil auf der einen Seite der bestimmte Artikel, auf der andern der unbestimmte steht, dass er nur besagt, die Zahl Eins gehöre zu den Dingen, aber nicht, welches Ding sie sei, so wird man vielleicht aufgefordert, sich irgendein Ding zu wählen, das man Eins nennen wolle. Wenn aber Jeder das Recht hätte, unter diesem Namen zu verstehen, was er will, so würde derselbe Satz von der Eins für Verschiedene Verschiedenes bedeuten; es gäbe keinen gemeinsamen Inhalt solcher Sätze. Einige lehnen vielleicht die Frage mit dem Hinweise darauf ab, dass auch die Bedeutung des Buchstaben a in der Arithmetik nicht angegeben werden könne; und wenn man sage: a bedeutet eine Zahl, so könne hierin derselbe Fehler gefunden werden wie in der Definition: Eins ist ein Ding. Nun ist die Ablehnung der Frage in Bezug auf a ganz gerechtfertigt: es bedeutet keine bestimmte, angebbare Zahl, sondern dient dazu, die Allgemeinheit von Sätzen auszudrücken. Wenn man für a in $a + a - a = a$ eine beliebige aber überall dieselbe Zahl | setzt, so erhält man immer eine wahre Gleichung. In diesem Sinne wird der Buchstabe a gebraucht. Aber bei der Eins liegt die Sache doch wesentlich anders. Können wir in der Gleichung $1 + 1 = 2$ für 1 beidemal denselben Gegenstand, etwa den Mond setzen? Vielmehr scheint es, dass wir für die erste 1 etwas Anderes wie für die zweite setzen müssen. Woran liegt es, dass hier grade das geschehen muss, was in jenem Falle ein Fehler wäre? Die Arithmetik kommt mit dem Buchstaben a allein nicht aus, sondern muss noch andere b, c u. s. w. gebrauchen, um Beziehungen zwischen verschiedenen Zahlen allgemein auszudrücken. So[,] sollte man denken, könnte auch das Zeichen 1 nicht genügen, wenn es in ähnlicher Weise dazu diente, den Sätzen eine Allgemeinheit zu verleihen. Aber erscheint nicht die Zahl Eins als bestimmter Gegenstand mit angebbaren Eigenschaften, z. B. mit sich selbst multiplicirt unverändert zu bleiben? In diesem Sinne kann man von a keine Eigenschaft angeben; denn was von a ausgesagt wird, ist eine gemeinsame Eigenschaft der Zahlen, während $1^1 = 1$ weder vom Monde etwas aussagt, noch von der Sonne, noch von der Sahara, noch vom Pic von Teneriffa; denn was könnte der Sinn einer solchen Aussage sein?

Auf solche Fragen werden wohl auch die meisten Mathematiker keine genügende Antwort bereit haben. Ist es nun nicht für die Wissenschaft beschämend, so im Unklaren über ihren nächstliegenden und scheinbar so einfachen Gegenstand zu sein? Um so weniger wird man sagen können, was Zahl sei. Wenn ein Begriff, der einer grossen Wissenschaft zu Grunde liegt, Schwierigkeiten darbietet, so ist es doch wohl eine unabweisbare Aufgabe, ihn genauer zu untersuchen und diese Schwierigkeiten zu überwinden, besonders da es schwer gelingen möchte, über die negativen, gebrochenen, complexen Zahlen zu voller Klarheit zu kommen, solange noch die Einsicht in die Grundlage des ganzen Baues der Arithmetik mangelhaft ist. |

Viele werden das freilich nicht der Mühe werth achten. Dieser Begriff ist ja, wie sie meinen, in den Elementarbüchern hinreichend behandelt und damit für das ganze Leben abgethan. Wer glaubt denn über eine so einfache Sache noch etwas lernen zu können! Für so frei von jeder Schwierigkeit hält man den Begriff der positiven ganzen Zahl, dass er für Kinder wissenschaftlich erschöpfend behandelt werden könne, und dass Jeder ohne weiteres Nachdenken und ohne Bekanntschaft mit dem, was Andere gedacht haben, genau von ihm Bescheid wisse. So fehlt denn vielfach jene erste Vorbedingung des Lernens: das Wissen des Nichtwissens. Die Folge ist, dass man sich noch immer mit einer rohen Auffassung begnügt, obwohl schon Herbart*) eine richtigere gelehrt hat. Es ist betrübend und entmuthigend, dass in dieser Weise eine Erkenntnis immer wieder verloren zu gehen droht, die schon errungen war, dass so manche Arbeit vergeblich zu werden scheint, weil man im eingebildeten Reichthume nicht nöthig zu haben glaubt, sich ihre Früchte anzueignen. Auch diese Arbeit, sehe ich wohl, ist solcher Gefahr ausgesetzt. Jene Roheit der Auffassung tritt mir entgegen, wenn das Rechnen aggregatives, mechanisches Denken ge-

*) Sämmtliche Werke, herausgegeb. von Hartenstein, Bd. X, 1.Thl. Umriss pädagogischer Vorlesungen § 252, Anm. 2: „Zwei heisst nicht zwei Dinge, sondern Verdoppelung“ u. s. w.[1]

nannt wird**). Ich bezweifle, dass es ein solches Denken überhaupt giebt. Aggregatives Vorstellen könnte man schon eher gelten lassen; aber es ist für das Rechnen ohne Bedeutung. Das Denken ist im Wesentlichen überall dasselbe: es kommen nicht je nach dem Gegenstande verschiedene Arten von Denkgesetzen in Betracht. Die Unterschiede bestehen nur in der grösseren oder geringeren Reinheit und Unabhängigkeit von psychologischen Einflüssen und von äussern Hilfen des Denkens wie Sprache, Zahl-|zeichen und dgl., dann etwa noch in der Feinheit des Baues der Begriffe; aber grade in dieser Rücksicht möchte die Mathematik von keiner Wissenschaft, selbst der Philosophie nicht, übertroffen werden.

Man wird aus dieser Schrift ersehen können, dass auch ein scheinbar eigenthümlich mathematischer Schluss wie der von n auf n + 1 auf den allgemeinen logischen Gesetzen beruht[3], dass es besondrer Gesetze des aggregativen Denkens nicht bedarf. Man kann freilich die Zahlzeichen mechanisch gebrauchen, wie man papageimässig sprechen kann; aber Denken möchte das doch kaum zu nennen sein. Es ist nur möglich, nachdem durch wirkliches Denken die mathematische Zeichensprache so ausgebildet ist, dass sie, wie man sagt, für einen denkt. Dies beweist nicht, dass die Zahlen in einer besonders mechanischen Weise, etwa wie Sandhaufen aus Quarzkörnern gebildet sind. Es liegt, denke ich, im Interesse der Mathematiker einer solchen Ansicht entgegenzutreten, welche einen hauptsächlichen Gegenstand ihrer Wissenschaft und damit diese selbst herabzusetzen geeignet ist. Aber auch bei Mathematikern findet man ganz ähnliche Aussprüche. Im Gegentheil wird man dem Zahlbegriffe einen feineren Bau zuerkennen müssen als den meisten Begriffen andrer Wissenschaften, obwohl er noch einer der einfachsten arithmetischen ist.

Um nun jenen Wahn zu widerlegen, dass in Bezug auf die positiven ganzen Zahlen eigentlich gar keine Schwierigkeiten obwalten, sondern allgemeine Uebereinstimmung herrsche, schien es mir gut, einige Meinungen von Philosophen und Mathematikern über die hier in Betracht kommenden Fragen zu besprechen. Man wird sehn, wie wenig von Einklang zu finden ist, sodass geradezu entgegengesetzte Aussprüche vorkommen. Die Einen sagen z. B.: „die Einheiten sind einander gleich", die Andern halten sie für verschie-

**) K. Fischer, System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre, 2. Aufl. § 94.[2]

den, und beide haben Gründe für ihre Behauptung, die sich nicht kurzer Hand abweisen lassen. Hierdurch suche | ich das Bedürfniss nach einer genaueren Untersuchung zu wecken. Zugleich will ich durch die vorausgeschickte Beleuchtung der von Andern ausgesprochenen Ansichten meiner eignen Auffassung den Boden ebnen, damit man sich vorweg überzeuge, dass jene andern Wege nicht zum Ziele führen, und dass meine Meinung nicht eine von vielen gleichberechtigten ist; und so hoffe ich die Frage wenigstens in der Hauptsache endgiltig zu entscheiden.

Freilich sind meine Ausführungen hierdurch wohl philosophischer geworden, als vielen Mathematikern angemessen scheinen mag; aber eine gründliche Untersuchung des Zahlbegriffes wird immer etwas philosophisch ausfallen müssen. Diese Aufgabe ist der Mathematik und Philosophie gemeinsam.

Wenn das Zusammenarbeiten dieser Wissenschaften trotz mancher Anläufe von beiden Seiten nicht ein so gedeihliches ist, wie es zu wünschen und wohl auch möglich wäre, so liegt das, wie mir scheint, an dem Ueberwiegen psychologischer Betrachtungsweisen in der Philosophie, die selbst in die Logik eindringen. Mit dieser Richtung hat die Mathematik gar keine Berührungspunkte, und daraus erklärt sich leicht die Abneigung vieler Mathematiker gegen philosophische Betrachtungen. Wenn z. B. Stricker*) die Vorstellungen der Zahlen motorisch, von Muskelgefühlen abhängig nennt, so kann der Mathematiker seine Zahlen darin nicht wiedererkennen und weiss mit einem solchen Satze nichts anzufangen. Eine Arithmetik, die auf Muskelgefühle gegründet wäre, würde gewiss recht gefühlvoll, aber auch ebenso verschwommen ausfallen wie diese Grundlage. Nein, mit Gefühlen hat die Arithmetik gar nichts zu schaffen. Ebensowenig mit innern Bildern, die aus Spuren früherer Sinneseindrücke zusammengeflossen sind. Das Schwankende und Unbestimmte, welches alle diese Gestaltungen haben, steht im starken Gegensatze zu der Bestimmtheit und | Festigkeit der mathematischen Begriffe und Gegenstände. Es mag ja von Nutzen sein, die Vorstellungen und deren Wechsel zu betrachten, die beim mathematischen Denken vorkommen; aber die Psychologie bilde sich nicht ein, zur Begründung der Arithmetik irgendetwas beitragen zu können. Dem Mathematiker als solchem sind diese innern Bilder, ihre Entstehung und Veränderung gleich-

*) Studien über Association der Vorstellungen. Wien 1883.[4]

giltig. Stricker sagt selbst, dass er sich beim Worte „Hundert" weiter nichts vorstellt als das Zeichen 100.[5] Andere mögen sich den Buchstaben C oder sonst etwas vorstellen; geht daraus nicht hervor, dass diese innern Bilder in unserm Falle für das Wesen der Sache vollkommen gleichgiltig und zufällig sind, ebenso zufällig wie eine schwarze Tafel und ein Stück Kreide, dass sie überhaupt nicht Vorstellungen der Zahl Hundert zu heissen verdienen? Man sehe doch nicht das Wesen der Sache in solchen Vorstellungen! Man nehme nicht die Beschreibung, wie eine Vorstellung entsteht, für eine Definition und nicht die Angabe der seelischen und leiblichen Bedingungen dafür, dass uns ein Satz zum Bewusstsein kommt, für einen Beweis und verwechsele das Gedachtwerden eines Satzes nicht mit seiner Wahrheit! Man muss, wie es scheint, daran erinnern, dass ein Satz ebensowenig aufhört, wahr zu sein, wenn ich nicht mehr an ihn denke, wie die Sonne vernichtet wird, wenn ich die Augen schliesse. Sonst kommen wir noch dahin, dass man beim Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes es nöthig findet, des Phosphorgehaltes unseres Gehirnes zu gedenken,[6] und dass ein Astronom sich scheut, seine Schlüsse auf längst vergangene Zeiten zu erstrecken, damit man ihm nicht einwende: „du rechnest da $2 \cdot 2 = 4$; aber die Zahlvorstellung hat ja eine Entwickelung, eine Geschichte! Man kann zweifeln, ob sie damals schon so weit war. Woher weisst du, dass in jener Vergangenheit dieser Satz schon bestand? Könnten die damals lebenden Wesen nicht den Satz $2 \cdot 2 = 5$ gehabt haben, aus dem sich erst durch natürliche Züchtung | im Kampf ums Dasein der Satz $2 \cdot 2 = 4$ entwickelt hat, der seinerseits vielleicht dazu bestimmt ist, auf demselben Wege sich zu $2 \cdot 2 = 3$ fortzubilden?" Est modus in rebus, sunt certi denique fines![7] Die geschichtliche Betrachtungsweise, die das Werden der Dinge zu belauschen und aus dem Werden ihr Wesen zu erkennen sucht, hat gewiss eine grosse Berechtigung; aber sie hat auch ihre Grenzen. Wenn in dem beständigen Flusse aller Dinge nichts Festes, Ewiges beharrte, würde die Erkennbarkeit der Welt aufhören und Alles in Verwirrung stürzen. Man denkt sich, wie es scheint, dass die Begriffe in der einzelnen Seele so entstehen, wie die Blätter an den Bäumen und meint ihr Wesen dadurch erkennen zu können, dass man ihrer Entstehung nachforscht und sie aus der Natur der menschlichen Seele psychologisch zu erklären sucht. Aber diese Auffassung zieht Alles ins Subjective und hebt, bis ans Ende verfolgt, die Wahrheit auf. Was man Geschichte der Begriffe nennt, ist wohl entweder eine Geschichte unserer Erkenntniss der Begriffe oder der Bedeutungen der Wörter. Durch grosse geistige Arbeit, die Jahrhunderte hindurch andauern kann, gelingt es oft erst, einen Begriff in seiner Reinheit zu erkennen, ihn aus den fremden Umhüllungen herauszuschälen, die ihn dem geistigen Auge verbargen. Was soll man nun dazu sagen, wenn jemand, statt diese Arbeit, wo sie noch nicht vollendet scheint, fortzusetzen, sie für nichts achtet, in die Kinderstube geht oder sich in [die] ältesten erdenkbaren Entwickelungsstufen der Menschheit zurückversetzt, um dort wie J. St. Mill etwa eine Pfefferkuchen- oder Kieselsteinarithmetik zu entdecken![8] Es fehlt nur noch, dem Wohlgeschmacke des Kuchens eine besondere Bedeutung für den Zahlbegriff zuzuschreiben. Dies ist doch das grade Gegentheil eines vernünftigen Verfahrens und jedenfalls so unmathematisch wie möglich. Kein Wunder, dass die Mathematiker nichts davon wissen wollen! Statt eine besondere Reinheit der Begriffe da zu finden, wo man ihrer Quelle nahe zu sein | glaubt, sieht man Alles verschwommen und ungesondert wie durch einen Nebel. Es ist so, als ob jemand, um Amerika kennen zu lernen, sich in die Lage des Columbus zurückversetzen wollte, als er den ersten zweifelhaften Schimmer seines vermeintlichen Indiens erblickte. Freilich beweist ein solcher Vergleich nichts; aber er verdeutlicht hoffentlich meine Meinung. Es kann ja sein, dass die Geschichte der Entdeckungen in vielen Fällen als Vorbereitung für weitere Forschungen nützlich ist; aber sie darf nicht an deren Stelle treten wollen.

Dem Mathematiker gegenüber, wäre eine Bekämpfung solcher Auffassungen wohl kaum nöthig gewesen; aber da ich auch für die Philosophen die behandelten Streitfragen möglichst zum Austrage bringen wollte, war ich genöthigt, mich auf die Psychologie ein wenig einzulassen, wenn auch nur, um ihren Einbruch in die Mathematik zurückzuweisen.

Uebrigens kommen auch in mathematischen Lehrbüchern psychologische Wendungen vor. Wenn man eine Verpflichtung fühlt, eine Definition zu geben, ohne es zu können, so will man wenigstens die Weise beschreiben, wie man zu dem betreffenden Gegenstande oder Begriffe kommt. Man erkennt diesen Fall leicht daran, dass im weitern Verlaufe nie mehr auf eine solche Erklärung zurückgegriffen wird. Für Lehrzwecke ist eine Hinführung auf die Sache auch ganz am Platze; nur sollte man sie von einer Definition immer deutlich unterscheiden. Dass auch Mathematiker Beweis-