BERTRAND RUSSELL

Einführung in die mathematische Philosophie

Mit einer Einleitung von
MICHAEL OTTE

herausgegeben von
JOHANNES LENHARD
und MICHAEL OTTE

FELIX MEINER VERLAG
HAMBURG

PHILOSOPHISCHE BIBLIOTHEK BAND 536

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN-13: 978 3-7873-1828-5
ISBN-10: 3-7873-1828-3

2. Auflage 2006

Titel der Originalausgabe: Bertrand Russell, An Introduction to Mathematical Philosophy. Originally published: 2nd ed. London: G. Allen and Unwin; New York: Macmillan, 1919. All Rights Reserved. Authorised translation from English language edition published by Routledge, a member of Taylor and Francis Group.
© für die deutsche Übersetzung Felix Meiner Verlag GmbH, Hamburg 2002. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe und der Übersetzung, vorbehalten. Dies betrifft auch die Vervielfältigung und Übertragung einzelner Textabschnitte durch alle Verfahren wie Speicherung und Übertragung auf Papier, Transparente, Filme, Bänder, Platten und andere Medien, soweit es nicht §§ 53 und 54 URG ausdrücklich gestatten.
Satz: Kusel, Hamburg. Druck: Carstens, Schneverdingen. Buchbinderische Verarbeitung: Schaumann, Darmstadt. Einbandgestaltung: Jens Peter Mardersteig. Werkdruckpapier: alterungsbeständig nach ANSI-Norm resp. DIN-ISO 9706, hergestellt aus 100% chlorfrei gebleichtem Zellstoff. Printed in Germany.

INHALT

EINLEITUNG

Michael Otte

I.

Das Buch ist sehr anregend zu lesen, wie beinahe alles, was Bertrand Russell geschrieben hat, und es ist ein Buch von der Art, wie es nur jemand wie Russell schreiben kann, wenn er im Gefängnis sitzt und keine Hilfsmittel hat und sich daher entschließt, allen technischen Ballast abzustreifen und sich in einer mehr oder minder populären Darstellung zu ergehen. Russells »Einführung in die mathematische Philosophie« von 1919 ist in diesem Sinne zuweilen und mit Recht »eine bewundernswerte Exposition des Monumentalwerks *Principia Mathematica*« genannt worden. Das Buch ist noch mehr, insofern in seine Abfassung die Ergebnisse aller grundlegenden Arbeiten Russells seit etwa 1900 eingeflossen sind. Und es ist zugleich etwas anderes, insofern es eine relativ eigenständige Einführung in die Grundlagen der Mathematik und der Erkenntnistheorie darstellt.

Anders als die heute üblichen Texte im Bereich der Philosophie der Mathematik läßt Russell einen immer an seinem Denken teilhaben, an seinen Vermutungen und Irrtümern und an der Begeisterung, die er bei der Beschäftigung mit seinem Gegenstand empfindet. Da er einer der herausragenden Protagonisten des modernen wissenschaftlichen Empirismus und einer der Begründer der heute dominierenden Philosophie der Mathematik ist, gewinnt man auf diese Weise aus seinen Schriften einen einzigartigen Eindruck in die Wechselfälle und Ideen der erkenntnistheoretischen und logischen Diskussionen dieses Jahrhunderts. Das Programm der logischen Weltauffassung, wie es unter anderem von Frege und Russell inauguriert und von ihren Schülern – zum Beispiel Carnap und Quine

– fortgeführt worden ist, mag sehr trocken, technisch und gleichsam objektivistisch unmenschlich erscheinen, aber die dahinterstehende Intention war durch und durch in einem humanen und aufklärerischen Fortschrittsglauben verankert.

Die Forderung nach einer strikt logisch-wissenschaftlichen Arbeitsweise sollte einem dumpfen Irrationalismus und Traditionalismus entgegenwirken. Wie es einer von Russells Schülern, Rudolf Carnap, im Vorwort zu seinem 1928 erschienenen Werk »Der logische Aufbau der Welt« ausgedrückt hat, wird die logische Philosophie von dem Glauben getragen, daß einer »Gesinnung die Zukunft gehört, […] die überall auf Klarheit geht und doch dabei die nie ganz durchschaubare Verflechtung anerkennt« und die daher »logische Klarheit der Begriffe«, »Sauberkeit der Methoden« und »Verantwortlichkeit der Thesen« in den Dienst eines Erkenntnisfortschritts durch Zusammenarbeit stellt (Carnap, 1928/1998, Vorwort zur ersten Auflage).

Es erscheint nicht zuletzt angesichts der Tatsache, daß die Philosophie der Mathematik und die gegenwärtige analytische Wissenschaftstheorie von Russell zwar die »technischen Errungenschaften« übernommen haben, aber ansonsten kein Wort über die damit verbundenen philosophischen und historischen Anliegen verlieren, angebracht, auf den historischen Ursprung der modernen Mathematik und Erkenntnistheorie und auf den kulturellen und politischen Entstehungszusammenhang hinzuweisen. Mathematik und Logik entwickelten sich seit der Ausbreitung der industriellen Revolution im 19. Jahrhundert zunehmend unter dem Imperativ, vor allem der Kommunikation und der präziseren Verständigung zu dienen und weniger der Sicherung eines allgemein verbindlichen Weltbildes. Und hier gibt es so etwas wie eine Heisenbergsche Unschärferelation: Je differenzierter die Begriffsbildung im einzelnen wird, desto unbestimmter erscheinen die ontologischen Grundlagen und Gesamtzusammenhänge und umgekehrt. Logische und empirisch-anschauliche Grundlagen eines Arguments sind, so sagt Russell, etwas durchaus Verschiedenes und begrenzen sich gegenseitig in ihren Ansprüchen.

Russell ist immer ein unabhängiger Geist gewesen, dem die Beschränkung auf ein besonderes Gebiet fremd blieb und der sich bemühte, alle Entwicklungen der Mathematik, der Philosophie, der experimentellen Naturwissenschaften, aber auch die der Politik zu verfolgen, und er schrieb in seinem Leben über eine beeindruckende Vielfalt von Gebieten, meistens mit großer Anschaulichkeit, so daß viele seiner Bücher im besten Sinne Popularwissenschaft darstellten. Es war ihm dies nicht nur aufgrund seines umfassenden Studiums möglich, sondern basierte auch auf seiner Überzeugung, daß Schreiben seine eigentliche Berufung sei.

II.

Der hauptsächliche Gegenstand des Buches ist die Zahl und alles was zur Zahl, zur Arithmetik und zur Logik der Arithmetik gehört. Die Frage nach der Bedeutung der Zahlen und der Arithmetik steht überhaupt im Zentrum von Russells Interesse an der Mathematik und der Logik. Seit Beginn des 19. Jahrhunderts war die Mathematik u. a. durch einen starken Arithmetisierungstrend gekennzeichnet. Nun sollte die Begründung derselben durch eine Logisierung der Arithmetik selbst vollendet werden. Wenn hier jedoch von Begründung die Rede ist, dann geht es für Russell nicht so sehr um eine Klärung der ontologischen Grundlagen der Arithmetik bzw. der Mathematik insgesamt, sondern um eine Differenzierung des Begriffsapparates und um eine logische Präzisierung der Ableitungsmethoden. Wir werden im folgenden noch sehen, daß sich beide möglichen Ziele sehr oft gegenseitig in die Quere kommen.

Russell ist die neue Logik zum erstenmal auf dem internationalen Philosophenkongreß von 1900 in Paris begegnet, und zwar in der Gestalt von Peano. Und sosehr er auch beeindruckt war von der logischen Präzision Peanos, sowenig seinem eigenen Naturell und seinen an der Arithmetisierung der Mathematik ausgerichteten Interessen entsprechend empfand er doch die aus dem algebraischen und axiomatischen Denken herausgewachsene Form der Logik. Er selbst beschreibt ihre Entwicklung folgendermaßen: »An sich war die mathematische Logik damals (d. h. um 1900) schon längst kein ganz neues Fach mehr. [...] Boole hatte seine *Laws of Thought* 1854 veröffentlicht; C.S. Peirce hatte eine Relationenlogik ausgearbeitet, und Schröder hatte in Deutschland ein umfängliches dreibändiges Werk veröffentlicht, in dem er alles bisher Erreichte zusammengefaßt hatte. Whitehead hatte den Booleschen Kalkül im ersten Teil seiner *Universal Algebra* behandelt [die 1898 erschienen war und in der neben den genannten Autoren auch Grassmann, De Morgan u.a. behandelt wurden, meine Einfügung M.O.]. Die meisten dieser Arbeiten waren mir bekannt, aber ich hatte bei ihnen nicht den Eindruck, daß sie die logische Grammatik der Arithmetik in einem neuen Licht erscheinen ließen« (Russell, 1973b, 67).

Und es ist wahr, daß die Logiker der algebraischen Richtung mathematisch vorgegangen sind und daß sie die mathematischen Gesetze auf den Bereich der Logik übertragen bzw. die Logik als eine universelle Algebra verstanden haben, ohne die Methoden der Mathematik revidieren zu wollen. Die moderne axiomatische Methode repräsentiert nichts anderes als den Zielpunkt des neuzeitlichen Mathematisierungsprozesses, der seit Descartes und Leibniz zunehmend alle Phänomene und alle Wirklichkeitsbereiche ergriffen hatte und der darin mündete, daß nun schließlich auch die Mathematik selbst mathematisiert werden sollte. Insbesondere markiert der Zahlbegriff seit jeher den Kernbereich mathematischen Denkens. Und man kann sich einmal die Frage stellen, wieso erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, also mehr als 2000 Jahre nach Euklids

Axiomatisierung der Geometrie, nun auch die Arithmetik axiomatisiert werden sollte. Erst als man gegen 1870 begann, sich mit den Grundlagen der Arithmetik zu beschäftigen und nach spezifischen logischen Begründungen derselben suchte, war man auch gezwungen, sich mit den überlieferten erkenntnistheoretischen Systemen auseinanderzusetzen, denn es ist unausweichlich, daß eine derartige Selbstbezüglichkeit des Mathematisierungsprozesses dazu führt, fundamentale logische, erkenntnistheoretische und auch psychologische Probleme aufzuwerfen.

Es macht einen nicht zu unterschätzenden Reiz von Russels Untersuchung aus, daß sich die Diskussion immer in einem weiten und sehr unterschiedlich bestimmten, durch Sprachanalyse, Mathematik, Logik und Erkenntnistheorie abgesteckten Raum bewegt. Dabei fällt, was Russells Unzufriedenheit mit der bisherigen Logik und Mathematik angeht, eine Eigentümlichkeit auf.

Einerseits macht Russell uns klar, daß wir in unserer Erfassung der Naturerscheinungen nicht weiter gelangen können als bis zu einer mathematischen Darstellung der Relationen und Relationsstrukturen – das Buch der Natur ist in einer mathematischen Sprache abgefaßt, hat schon Galilei gesagt – und wir daher feststellen müssen, daß wir weit mehr über »die Form der Natur wissen als über ihren Inhalt« (65)[1]. Andererseits bemüht er sich, was die Mathematik und insbesondere den Zahlbegriff angeht, hartnäckig, »was-ist«-Fragen zu beantworten und Bedeutungen oder Interpretationen absolut festzulegen. Während er »dem unmathematischen Geist«, dem der abstrakte Charakter unserer physikalischen Erkenntnis unbefriedigend erscheinen mag, antwortet: »Von einem künstlerischen Standpunkt aus oder unter dem Gesichtspunkt der Anschaulichkeit ist diese Abstraktion vielleicht bedauerlich,

[1] Die »Einführung in die mathematische Philosophie« wird mit Nennung der Seitenzahlen ohne weitere Angaben zitiert.

aber vom Standpunkt der Praxis schadet sie nichts« (Russell, 1972, 172), hält er bezüglich der Mathematik das Gegenteil für wahr.

Gegenüber der Empirie rechtfertigt er die mathematischen Abstraktionen durch ihre Fruchtbarkeit und ihren Nutzen – »die Abstraktion, so schwierig sie auch sein mag, ist die Quelle praktischer Macht. Ein Finanzmann, dessen Verhältnis zur Welt von abstrakterer Art ist als das irgendeines Praktikers, ist auch mächtiger als irgendein Praktiker. Er kann mit Weizen und Baumwolle handeln, ohne daß er je etwas von beidem gesehen hat: alles was er davon wissen muß, besteht darin, ob ihre Preise steigen oder fallen. Das ist abstraktes mathematisches Wissen, zumindest, wenn man es mit dem Wissen des Landwirts vergleicht« (Russell, 1972, 172). Dagegen möchte er diese Abstraktionen selbst durch reines Denken konstituieren, indem er ihre Anwendbarkeit vollkommen apriorisch und in einem gleichsam Kantischen Sinne sicherstellt.

Also in allen Bereichen der Wissenschaft und des Lebens sollten wir unsere Darstellungen weitestgehend auf Zahlen und Zahlensysteme zurückführen. Aber was die Zahl selbst sei und was der Zahlbegriff bedeutet, das soll unabhängig und vor aller Anwendung durch reines Denken und logische Analyse bestimmt werden. Die Sinnesempfindungen und die Zahlen bilden seit Descartes die Grundlagen unserer Erkenntnis, so meint Russell. Indem wir nun die Bedeutung des Zahlbegriffs klären, tritt die Logik an die Stelle der Arithmetik.

Und während er glaubt, daß die Beschränkung unserer Darstellungsmöglichkeiten auf eine strukturelle Übereinstimmung zwischen der Welt und unseren mathematischen Beschreibungen derselben im Bereich der Naturwissenschaften sogar ein Vorteil sei, denn »bei der mathematischen Behandlung des Naturgeschehens können wir bei weitem sicherer sein, daß unsere Formeln annähernd richtig sind, als wir es in der Frage der Richtigkeit dieser oder jener Interpretation der Formeln sein können« (Russell, 1972, 164), möchte er die Mathematik doch nicht einfach durch ihre Struktur beschrieben sehen.

Bezüglich der Naturerkenntnis vertritt er die Einsicht, »daß mit der Zunahme unserer Fähigkeit zu logischem Denken dieses immer weniger beansprucht, es könne Tatsachen beweisen« (Russell, 1972, 164). Genau dies möchte er in bezug auf die Mathematik nicht wahrhaben. Ebensowenig wie seinen Grundsatz, daß die Logik uns eher lehre, »wie man Schlüsse nicht zieht«, anstatt »wie man zu denken habe«. Auch dieser Grundsatz gilt für ihn nicht mehr, wenn es darum geht, die Grundlagen der Arithmetik zu analysieren und darzustellen.

III.

Russell beginnt sein Werk mit einem Kapitel zur »Folge der natürlichen Zahlen«, in welchem dieselben auf der Grundlage der Peano-Axiome eingeführt werden, und hier spielt überhaupt nur der Ordinalzahlbegriff eine Rolle. Von Kardinalität, also von den Mengeneigenschaften der Zahlen, ist keine Rede.

»Die fünf Grundsätze von Peano lauten:

(1) Null ist eine Zahl.
(2) Der Nachfolger irgendeiner Zahl ist eine Zahl.
(3) Es gibt nicht zwei Zahlen mit demselben Nachfolger.
(4) Null ist nicht der Nachfolger irgendeiner Zahl.
(5) Jede Eigenschaft der Null, die auch der Nachfolger jeder Zahl mit dieser Eigenschaft besitzt, kommt allen Zahlen zu« (10).

Man könnte, so meint Russell am Ende des Kapitels, »vielleicht den Vorschlag machen«, die dabei benutzten undefinierten Begriffe »sollten nicht Begriffe darstellen, deren Bedeutung wir zwar kennen, aber nicht definieren können, sondern irgendwelche Elemente, die den fünf Axiomen Peanos genügen« (14). Dies ist die übliche Interpretation der axiomatischen Vorgehensweise. Man kann sie auch so zum Ausdruck bringen, daß man sagt, die Arithmetik handele nicht von konkret existierenden Dingen, sondern von allgemeinen oder idealen Gegenständen (vgl. dazu Abschnitt VII der Einleitung).

In der axiomatischen Grundlegung der Arithmetik »wurde vorausgesetzt, daß wir nicht zu wissen brauchen, was wir unter *Null, Zahl und Nachfolger* zu verstehen haben, sofern wir nur irgend etwas darunter verstehen, was den fünf Axiomen genügt. Aber dann zeigt es sich, daß es eine unendliche Anzahl möglicher Deutungen gibt. Es möge z. B. 0 das bedeuten, was wir gewöhnlich als 1 bezeichnen, und es möge Zahl das bedeuten, was wir für gewöhnlich als natürliche Zahl außer 0 bezeichnen. Dann sind alle fünf Axiome auch richtig, und die gesamte Arithmetik kann bewiesen werden, obwohl jede Formel eine ungewöhnliche Bedeutung hat. 2 bedeutet das, was wir gewöhnlich als 3 bezeichnen. Aber 2 + 2 bedeutet nicht etwa 3 + 3, sondern 3 + 2 … Solange wir im Gebiet der arithmetischen Formen bleiben, sind alle diese Deutungen des Begriffs Zahl gleich gut. Wenn wir aber zum praktischen Gebrauch der Zahl zur Abzählung übergehen, dann finden wir einen Grund, die eine Deutung allen anderen vorzuziehen« (Russell, 1952, 236 f.).

Aus zwei Gründen, meint Russell, kann man also auf die axiomatische Weise »nicht zu angemessenen Grundlagen der Arithmetik gelangen. Zunächst weiß man nicht, ob es irgendwelche Folgen von Elementen gibt, die Peanos fünf Axiome erfüllen [...] Zweitens sollen unsere Zahlen für das Zählen der gewöhnlichen Gegenstände brauchbar sein, und dazu müssen unsere Zahlen eine *bestimmte* Bedeutung und nicht bloß gewisse formale Eigenschaften haben. Diese bestimmte Bedeutung wird in der logischen Theorie der Arithmetik definiert« (14/15). Dort wird, wie Russell meint, die Frage »Was ist eine Zahl?«, die so oft gestellt wird, gemäß einem Vorschlag von Frege aus dem Jahre 1884 »korrekt beantwortet« (16) durch die Feststellung, daß Zahlen Eigenschaften von Mengen sind.

ZUR ÜBERSETZUNG

Der Mathematiker Emil Julius Gumbel (1891–1966), der 1923 (zusammen mit W. Gordon) die vorliegende Übersetzung der englischen Originalausgabe von 1919 anfertigte, hat in der Weimarer Republik als »der Fall Gumbel« einige Prominenz erlangt. Der politisch unbeirrte »linke« Antimilitarist mußte, von der Universität Heidelberg nach langem Streit als ao. Professor für Mathematik 1932 entlassen, vor der nationalsozialistischen Verfolgung erst nach Frankreich und dann in die USA fliehen. Über Gumbels Geschichte als Statistiker, politischer Aktivist und Publizist informiert eine kleine Anzahl von Veröffentlichungen, unter ihnen C. Jansen: Porträt eines Zivilisten, Wunderhorn 1991. Gumbels erste nicht-mathematische Veröffentlichung ist diese Übersetzung von Russells »Einführung in die mathematische Philosophie«. Sie wurde in einer durchgesehenen Version ohne Nennung der Übersetzer seit den 50er Jahren verschiedentlich wiederabgedruckt. Die Übersetzung besitzt eine durchweg hohe Qualität, so daß bei der Durchsicht nur geringfügige Veränderungen erforderlich waren. Der an der Rede orientierte Hauptsatzstil Gumbels (der denjenigen Russells noch übertrifft) wurde beibehalten.

Johannes Lenhard

Bertrand Russell

Einführung in die mathematische Philosophie

EINLEITUNG

Dieses Buch soll im wesentlichen eine »Einführung« sein: Es will keine erschöpfende Darstellung der behandelten Probleme geben. Sein Ziel ist, gewisse Ergebnisse, die bisher nur den Kennern des Logik-Kalküls zugänglich waren, in einer Form wiederzugeben, die dem Anfänger möglichst wenig Schwierigkeiten bereitet. Es wurde mit der größten Sorgfalt darauf geachtet, jede dogmatische Behauptung über Gebiete, die tatsächlich noch zweifelhaft sind, zu vermeiden. Diese Absicht war zum Teil für die Auswahl des Stoffes maßgebend. Die Anfangsgründe der mathematischen Logik sind nicht so genau bekannt wie ihre späteren Teile, aber sie sind philosophisch mindestens ebenso interessant wie diese. Der Inhalt der kommenden Kapitel ist zum großen Teil keine eigentliche »Philosophie«. Die hier betrachteten Probleme wurden solange zur Philosophie gerechnet, als ihre wissenschaftliche Behandlung noch nicht befriedigte. Das Wesen des Unendlichen und der Stetigkeit z. B. gehörte früher zur Philosophie und gehört heute zur Mathematik. Wahrscheinlich kann man die hierbei erreichten exakten Resultate nicht zur mathematischen Philosophie im strengen Sinn rechnen. Von der Philosophie der Mathematik wird man natürlich erwarten, daß sie Fragen behandelt, die an der Grenze unseres Wissens liegen, bei denen also eine relative Sicherheit noch nicht erreicht ist. Eine spekulative Behandlung dieser Fragen wird kaum fruchtbringend sein, solange man die mehr wissenschaftlichen Teile der Prinzipien der Mathematik nicht kennt. Ein Buch über diese Gebiete kann daher beanspruchen, als eine Einführung in die mathematische Philosophie zu gelten. Es beschäftigt sich aber nicht mit der eigentlichen Philosophie, ausgenommen an den Stellen, bei denen es sich außerhalb seines Gebietes bewegt. Immerhin untergräbt das hier dargestellte wissenschaftliche System für seine Anhänger anscheinend viele Behauptungen der herkömmlichen Philosophie und sogar vieles von dem, was heute noch gilt. In dieser Hinsicht und wegen ihres Bezugs auf noch ungelöste Probleme ist die mathematische Logik für die Philosophie von Bedeutung. Aus diesem Grund und wegen der Wichtigkeit des Gegenstands an sich ist eine kurze Darstellung der Hauptergebnisse der mathematischen Logik, bei der weder Kenntnis noch Eignung für die mathematische Symbolik vorausgesetzt wird, für die Philosophie wertvoll. Hier wie auf anderen Gebieten ist für die weitere Forschung die Methode wichtiger als die Resultate. Die Methode kann jedoch innerhalb der Grenzen eines Buches wie des vorliegenden nicht gut dargestellt werden. Hoffentlich interessiert es manche Leser in dem Maße, daß sie sich dann dem Studium der Methode zuwenden, welche die mathematische Logik bei der Untersuchung der traditionellen Probleme der Philosophie verwendet. Aber dieses Thema soll in den folgenden Zeilen nicht behandelt werden.

1. DIE FOLGE DER NATÜRLICHEN ZAHLEN

Das Studium der Mathematik kann, ausgehend von den allgemein bekannten Teilen, nach zwei entgegengesetzten Richtungen hin verfolgt werden. Die übliche Richtung ist konstruktiv, sie führt zu einer Schritt für Schritt sich steigernden Komplexität: Von den ganzen Zahlen gelangt sie zu den Brüchen, reellen Zahlen, komplexen Zahlen, von der Addition und Multiplikation zur Differentiation und Integration und weiter zur höheren Mathematik. Die andere Richtung ist weniger bekannt. Sie schreitet analytisch zu immer größerer Abstraktion und logischer Einfachheit fort. Sie fragt nicht, was man aus den ursprünglichen Grundannahmen definieren und ableiten kann, sondern was für allgemeinere Begriffe und Prinzipien gefunden werden können, durch die unser Ausgangspunkt definiert oder abgeleitet werden kann. Die Verfolgung dieser umgekehrten Richtung charakterisiert die mathematische Philosophie im Gegensatz zur gewöhnlichen Mathematik. Der Unterschied liegt aber wohlverstanden nicht im Wesen der Sache, sondern beruht auf dem Standpunkt des Forschers. Als die alten griechischen Geometer von den empirischen Regeln der ägyptischen Landmesser zu den allgemeinen Sätzen, durch die diese Regeln gerechtfertigt wurden, und von ihnen zu Euklids Axiomen und Postulaten übergingen, trieben sie nach der obigen Erklärung mathematische Philosophie. Wenn man aber einmal bis zu den Axiomen und Postulaten gelangt ist, so gehört ihre deduktive Verwendung, wie wir sie bei Euklid finden, zur Mathematik im gewöhnlichen Sinn. Der Unterschied zwischen Mathematik und mathematischer Philosophie hängt von den Zielen ab, die sich die Forschung stellt, und von dem Stand der Forschung, nicht aber von den Sätzen, die ihren Gegenstand bilden.

Man kann den gleichen Unterschied noch anders ausdrücken. Die einfachsten und leichtesten Dinge in der Mathematik kommen, logisch genommen, nicht am Anfang. Sie gehören ihrer logischen Deduktion nach irgendwo in die Mitte. Geradeso, wie man diejenigen Gegenstände am besten wahrnimmt, die weder sehr nah noch sehr fern, weder sehr klein noch sehr groß sind, so sind auch diejenigen Begriffe am einfachsten zu verstehen, die weder sehr kompliziert noch sehr einfach sind; einfach im logischen Sinn verstanden. Zur Erweiterung unseres Gesichtsfeldes brauchen wir zwei Instrumente, das Fernrohr und das Mikroskop. So brauchen wir auch zwei Instrumente zur Erweiterung unserer logischen Kräfte, eines, das uns vorwärts zur höheren Mathematik führt, ein anderes, das uns rückwärts zur logischen Grundlage der Dinge führt, die wir in der Mathematik für gesichert halten. Wir werden sehen, daß wir durch die Analyse unserer gewöhnlichen mathematischen Begriffe eine neue Einsicht, neue Kraft und die Möglichkeit erlangen werden, ganz neue mathematische Probleme zu lösen, wenn wir nach unserer Rückkehr aufs neue vorwärts gehen. Der Zweck dieses Buches besteht darin, die mathematische Philosophie einfach und ohne den fachwissenschaftlichen Apparat darzulegen. Wir dehnen unsere Untersuchungen nicht auf solche Gebiete aus, die so zweifelhaft oder schwierig sind, daß eine elementare Behandlung kaum möglich ist. Eine vollständige Behandlung findet man in den Principia Mathematica.[1] Dieses Buch ist nur als Einführung gedacht.

Leute von Durchschnittsbildung werden als Ausgangspunkt der Mathematik natürlich die Folge der ganzen Zahlen

$$1, 2, 3, 4, \ldots \text{usw.}$$

ansehen. Wahrscheinlich würde erst jemand, der eine gewisse mathematische Bildung besitzt, auf den Gedanken

[1] Cambridge University Press, Bd. I, 1910; Bd. II, 1911; Bd. III, 1913. Von A. N. Whitehead und B. Russell.

kommen, mit der 0 statt mit der 1 anzufangen. Wir nehmen diesen Grad von Bildung an und legen unserer Behandlung die Folge

$$0, 1, 2, 3, \ldots n, n+1, \ldots$$

zugrunde. Diese Folge wollen wir im folgenden die »Folge der natürlichen Zahlen« nennen.

Nur ein hoher Grad von Kultur macht es uns möglich, diese Folge als Ausgangspunkt zu wählen. Es hat sicher viele Jahrhunderte gedauert, bevor man entdeckt hat, daß ein Pärchen Fasanen und ein Paar Tage beides Beispiele für die Zahl 2 sind. Dazu gehört ein beträchtliches Abstraktionsvermögen. Die Entdeckung, daß 1 eine Zahl ist, muß schwer gewesen sein. Was die 0 betrifft, so ist sie erst in neuester Zeit hinzugekommen. Die Griechen und Römer kannten eine solche Ziffer nicht. Hätten wir unsere Untersuchung der mathematischen Philosophie in früherer Zeit geschrieben, so hätten wir mit etwas weniger Abstraktem als der Folge der natürlichen Zahlen anfangen müssen. Wir hätten sie als eine Station auf unserer Rückreise angetroffen. Wenn einmal die logischen Grundlagen der Mathematik bekannter sind, werden wir in der Lage sein, noch weiter rückwärts anzufangen, also in einem Punkt, der in der heutigen Analyse viel später auftritt. Augenblicklich aber scheinen die natürlichen Zahlen das einfachste und bekannteste in der Mathematik darzustellen.

Obwohl sie uns vertraut sind, werden sie noch lange nicht verstanden. Nur sehr wenige Menschen besitzen eine Definition der »Zahl«, der »0« oder der »1«. Man sieht leicht, daß man ausgehend von der 0 jede andere natürliche Zahl durch fortgesetzte Addition von 1 erreichen kann. Aber wir werden eben zu definieren haben, was unter »Addition von 1« und »fortgesetzt« zu verstehen ist. Diese Fragen sind keineswegs leicht. Man glaubte bis in die neueste Zeit, daß man zum mindesten einige von diesen ersten Begriffen der Arithmetik ohne weiteres hinnehmen müsse, weil sie zu einfach und ursprünglich seien, als daß man sie definieren könnte. Da alle definierten Ausdrücke wieder durch andere Ausdrücke definiert werden, ist es klar, daß unser menschliches Wissen sich zufrieden geben muß, irgendwelche Ausdrücke als an sich ohne Definition verständlich hinzunehmen. Denn wir brauchen einen Ausgangspunkt für unsere Definitionen. Es ist nicht sicher, ob es Ausdrücke gibt, die nicht definiert werden können. Vielleicht können wir, soweit wir auch mit unserer Definition zurückgehen, immer noch weiter zurückgehen. Andererseits ist es auch möglich, daß wir einmal, wenn unsere Analyse weit genug fortgeschritten ist, zu Begriffen kommen, die wirklich einfach sind und die daher ihrer logischen Natur nach eine analytische Definition nicht zulassen. Wir brauchen diese Frage hier nicht zu entscheiden. Für uns genügt folgende Bemerkung: Da die menschlichen Kräfte endlich sind, so müssen die uns bekannten Definitionen immer von irgendwelchen Ausdrücken ausgehen, die augenblicklich, aber vielleicht nicht endgültig undefiniert sind.

Man kann die gesamte herkömmliche reine Mathematik, einschließlich der analytischen Geometrie, als eine Reihe von Sätzen über die natürlichen Zahlen auffassen, d. h. die vorkommenden Ausdrücke lassen sich mit Hilfe der natürlichen Zahlen definieren. Und ihre Sätze lassen sich aus den Eigenschaften der natürlichen Zahlen unter Hinzunahme der Begriffe und Sätze der reinen Logik ableiten.

Es ist eine ziemlich neue Entdeckung, daß die ganze übliche reine Mathematik sich aus den natürlichen Zahlen ableiten läßt; aber man hat es lange vermutet. Pythagoras glaubte, daß nicht nur die Mathematik, sondern überhaupt alles aus den Zahlen abgeleitet werden könne. Dabei entdeckte er das stärkste Hindernis auf dem Weg der sogenannten »Arithmetisierung« der Mathematik. Pythagoras stieß auf die inkommensurablen Größen, im besonderen die Inkommensurabilität der Seite des Quadrats mit der Diagonale. Wenn die Länge der Seite 1 cm beträgt, so ist die Länge der Diagonale in cm die Quadratwurzel aus 2, und das schien überhaupt keine Zahl zu sein. Das so entstandene Problem wurde erst in unseren Tagen gelöst. Vollständig gelöst wurde es nur durch die Zurückführung der Arithmetik auf die Logik, die in den folgenden Kapiteln auseinandergesetzt wird. Vorderhand wollen wir die Arithmetisierung der Mathematik hinnehmen, obwohl diese Tat von der größten Wichtigkeit war.

Nachdem die gesamte übliche reine Mathematik auf die Theorie der natürlichen Zahlen zurückgeführt worden war, war es die nächste Aufgabe der logischen Analyse, diese Theorie auf die geringste Zahl von Voraussetzungen und undefinierten Ausdrücken zurückzuführen, aus denen sie abgeleitet werden konnte. Das hat Peano geleistet. Er zeigte, daß die gesamte Theorie der natürlichen Zahlen aus drei Grundbegriffen und fünf Grundsätzen unter Hinzunahme der Sätze der reinen Logik entwickelt werden kann. Diese drei Begriffe und fünf Sätze wurden so die Garanten der ganzen üblichen reinen Mathematik. Konnte man sie definieren oder mit Hilfe anderer Sätze beweisen, so gilt dies für die ganze reine Mathematik. Ihr logisches »Gewicht«, wenn man diesen Ausdruck einführen darf, ist gleich dem der Gesamtheit der Wissenschaften, die sich auf die Theorie der natürlichen Zahlen gründen. Die Wahrheit dieses ganzen Systems ist gesichert, wenn die Wahrheit der fünf Grundsätze gewährleistet ist, vorausgesetzt natürlich, daß der dabei verwendete logische Apparat keinen Irrtum enthält. Die Arbeit, die Mathematik zu analysieren, ist durch diese Leistung Peanos außerordentlich erleichtert worden.

Die drei Grundbegriffe in Peanos Arithmetik sind:

0, Zahl, Nachfolger.

Unter »Nachfolger« versteht er die nächste Zahl in der natürlichen Ordnung, d. h. der Nachfolger von 0 ist 1, der Nachfolger von 1 ist 2 usw. Unter »Zahl« versteht er in diesem Zusammenhang die Menge der natürlichen Zahlen.[1]

[1] Wir verwenden »Zahl« hier in diesem Sinne. Später werden wir dieses Wort in einem allgemeineren Sinn verwenden.

Er nimmt nicht an, daß wir alle Elemente dieser Menge kennen, sondern nur, daß wir wissen, was unter der Behauptung, dies und das ist eine Zahl, zu verstehen ist. Geradeso, wie wir den Sinn des Satzes: »Hans ist ein Mensch« verstehen, obwohl wir nicht alle Menschen einzeln kennen.

Die fünf Grundsätze von Peano lauten:

(1) 0 ist eine Zahl.
(2) Der Nachfolger irgendeiner Zahl ist eine Zahl.
(3) Es gibt nicht zwei Zahlen mit demselben Nachfolger.
(4) 0 ist nicht der Nachfolger irgendeiner Zahl.
(5) Jede Eigenschaft der 0, die auch der Nachfolger jeder Zahl mit dieser Eigenschaft besitzt, kommt allen Zahlen zu.

Der letzte Satz ist das Prinzip der mathematischen Induktion. Wir werden darüber im folgenden sehr viel zu sagen haben. Augenblicklich kommt es für uns nur als Bestandteil der Peanoschen Analyse der Arithmetik in Betracht.

Sehen wir einmal zu, auf welche Weise die Theorie der natürlichen Zahlen aus diesen drei Begriffen und fünf Sätzen folgt. Zunächst definieren wir 1 als »den Nachfolger von 0«, 2 als »den Nachfolger von 1« usw. Natürlich können wir mit diesen Definitionen beliebig weit gehen. Denn wegen (2) wird jede Zahl, die wir erreichen, einen Nachfolger haben, und wegen (3) kann dies keine der bisher definierten Zahlen sein. Denn wäre dies der Fall, so hätten zwei verschiedene Zahlen denselben Nachfolger. Und wegen (4) kann keine der Zahlen, die wir in der Folge der Nachfolger erreichen, die 0 sein. So ergibt die Folge der Nachfolger eine endlose Reihe von immer neuen Zahlen. Wegen (5) kommen in dieser Folge, die mit 0 beginnt und von einem Nachfolger zum nächsten fortschreitet, alle Zahlen vor. Denn a) 0 gehört zu dieser Folge, und b) wenn eine Zahl n dazu gehört, so gilt dies auch vom Nachfolger, und daher gehört gemäß der mathematischen Induktion jede Zahl zur Folge.

Angenommen, wir wollen die Summe von zwei Zahlen definieren. Wir nehmen irgendeine Zahl m, dann definieren wir $m+0$ als m und $m+(n+1)$ als den Nachfolger von $m+n$. Wegen (5) erhalten wir so eine Definition der Summe von $m+n$, welches auch die Zahl n sei. Ähnlich können wir das Produkt von irgend zwei Zahlen definieren. Der Leser kann sich leicht davon überzeugen, daß jeder gewöhnliche elementare Satz der Arithmetik aus unseren fünf Annahmen bewiesen werden kann, und wenn er irgendwelche Schwierigkeiten hat, so kann er den Beweis bei Peano nachlesen. Jetzt müssen wir zu Betrachtungen übergehen, die uns notwendigerweise über Peano hinaus zu Frege führen. Peano stellt die letzte Vollendung der »Arithmetisierung« der Mathematik dar, während es Frege als erstem gelungen ist, die Mathematik zu »logisieren«, d. h. die arithmetischen Begriffe, die, wie seine Vorgänger dargetan haben, für die Mathematik ausreichen, auf die Logik zurückzuführen. Wir werden in diesem Kapitel Freges Definition der Zahl und besonderer Zahlen tatsächlich nicht bringen, sondern nur einige Gründe anführen, warum Peanos Behandlung nicht so endgültig ist, wie es scheint.

Zunächst lassen sich die drei Grundbegriffe Peanos, nämlich »0«, »Zahl« und »Nachfolger« auf unendlich viele Arten deuten, und jede von ihnen genügt den fünf Grundsätzen. Einige Beispiele:

(1) »0« soll 100 und »Zahl« soll die Zahlen von 100 aufwärts bedeuten. Dann wird unseren Grundsätzen Genüge geleistet. Selbst (4) gilt, denn obwohl 100 der Nachfolger von 99 ist, so ist 99 keine »Zahl« in dem Sinn, den wir jetzt dem Wort »Zahl« geben. Offensichtlich kann man dieses Beispiel statt mit 100 mit jeder beliebigen Zahl bilden.

(2) »0« soll die übliche Bedeutung haben, aber unter »Zahl« soll eine »gerade Zahl« in der üblichen Bezeichnungsweise und unter »Nachfolger« einer Zahl die Zahl verstanden werden, die aus ihr durch Addition von Zwei entsteht. Dann bedeutet »1« die Zahl Zwei, »2« bedeutet die Zahl Vier usw. Die Folge der Zahlen lautet dann:

$$0, 2, 4, 6, 8, \ldots$$

Wieder werden alle fünf Annahmen Peanos erfüllt.

(3) Es soll »0« die Zahl Eins bedeuten, »Zahl« soll die Menge

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}, \ldots$$

und »Nachfolger« »die Hälfte von« bedeuten. Für diese Menge treffen dann alle fünf Axiome von Peano zu.

Es ist klar, daß man diese Beispiele ins Unendliche vermehren kann. In der Tat: Hat man irgendeine unendliche Folge

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n, \ldots$$

die keine Wiederholungen aufweist, einen Anfang hat und keine Glieder besitzt, die vom Anfang an durch eine endliche Zahl von Schritten nicht erreicht werden können, so haben wir eine Folge von Elementen, für welche Peanos Axiome gelten. Dies erkennt man leicht, obwohl der formale Beweis etwas umständlich ist. »0« sei x_0, »Zahl« die ganze Folge der Elemente, und »Nachfolger« von x_n soll x_{n+1} sein. Dann gilt Folgendes:

(1) »0 ist eine Zahl«, d. h. x_0 ist ein Glied der Folge.

(2) »Der Nachfolger irgendeiner Zahl ist wieder eine Zahl«, d. h. nehmen wir irgendein Glied x_n der Folge, so gehört x_{n+1} ebenfalls zur Folge.

(3) »Nicht zwei Zahlen haben denselben Nachfolger«, d. h. wenn x_m und x_n zwei verschiedene Glieder der Folge sind, so sind x_{m+1} und x_{n+1} verschieden. Dies folgt aus der Voraussetzung, daß in der Folge keine Wiederholungen vorkommen.

(4) »0 ist nicht der Nachfolger irgendeiner Zahl«, d. h. kein Glied in der Folge kommt vor x_0.

(5) Unser Satz (5) wird zu: »Jede Eigenschaft von x_0, die dem x_{n+1} zukommt, wenn x_n sie besitzt, ist allen x'n gemeinsam«. Dies folgt aus der entsprechenden Eigenschaft der Zahlen.

Eine Folge der Form

$$x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$$

in der es ein erstes Glied gibt, jedes Glied einen Nachfolger besitzt, (so daß es kein letztes Glied gibt,) keine Wiederholungen vorkommen und wo jedes Glied vom Beginn an durch eine endliche Zahl von Schritten erreicht werden kann, heißt eine P r o g r e s s i o n. Progressionen sind für die Prinzipien der Mathematik von großer Wichtigkeit. Wie wir gerade gesehen haben, genügt jede Progression den fünf Axiomen Peanos. Man kann auch umgekehrt beweisen, daß jede Folge, die Peanos fünf Axiomen genügt, eine Progression ist. Daher kann man die fünf Axiome dazu verwenden, um die Gesamtheit der Progressionen zu definieren: »Progressionen« sind »solche Folgen, welche den fünf Axiomen genügen«. Irgendeine Progression kann zur Grundlage der reinen Mathematik gewählt werden. Ihr erstes Glied können wir »0«, die ganze Folge ihrer Glieder »Zahlen« und das nächste Glied in der Progression »Nachfolger« nennen. Die Progression braucht nicht aus Zahlen zu bestehen; an ihre Stelle können Raum- oder Zeitpunkte oder irgendwelche andere Elemente treten, wenn es nur unendlich viele gibt. Jede der verschiedenen Progressionen erlaubt eine verschiedene Auslegung aller Sätze der üblichen reinen Mathematik. Alle diese Auslegungen sind gleichberechtigt.

Wir haben in Peanos System keine Möglichkeit, zwischen den verschiedenen Interpretationen seiner Grundbegriffe zu unterscheiden. Es wird vorausgesetzt, daß wir die Bedeutung der »0« kennen und nicht annehmen, daß mit diesem Symbol 100 oder Kleopatras Nadel oder irgend etwas anderes gemeint sei.

Diese Tatsache, daß »0«, »Zahl« und »Nachfolger« durch die fünf Axiome Peanos nicht definiert werden können, sondern unabhängig davon verstanden werden müssen, ist sehr wichtig. Unsere Zahlen brauchen wir nicht bloß zur Verifikation mathematischer Formeln, sie sollen auch auf alltägliche Dinge richtig anwendbar sein. Wir müssen zehn Finger, zwei Augen und eine Nase haben. Ein System, in dem »1« 100 und »2« 101 usw. bedeutet, kann für die reine Mathematik ganz gut brauchbar sein, jedoch nicht für die

Bedürfnisse unseres täglichen Lebens. »0«, »Zahl« und »Nachfolger« müssen eine solche Bedeutung haben, daß wir sie auf Finger, Augen und Nase richtig anwenden können. Wir haben schon eine gewisse Kenntnis, was wir unter »1«, »2« usw. verstehen, obwohl sie nicht hinreichend zergliedert oder analytisch ist. Unsere Verwertung der Zahlen in der Arithmetik muß diesem Wissen entsprechen. Wir sind dessen nicht sicher, daß dies bei Peanos Methode zutrifft. Stellen wir uns auf seinen Standpunkt, so können wir bloß behaupten: »Wir wissen, was »0«, »Zahl« und »Nachfolger« ist, aber wir sind nicht imstande, es mit Hilfe anderer einfacherer Begriffe zu erklären.« Diese Stellungnahme ist ganz berechtigt, wenn wir dazu genötigt sind, und irgendeinmal tritt für jeden diese Notwendigkeit ein. Aber die Aufgabe der mathematischen Philosophie besteht darin, diesen Punkt möglichst weit hinauszuschieben. Die logische Theorie der Arithmetik erlaubt uns dies für lange Zeit.

Man könnte vielleicht den Vorschlag machen: »0«, »Zahl« und »Nachfolger« sollen nicht Begriffe darstellen, deren Bedeutung wir zwar kennen, aber nicht definieren können, sondern irgendwelche Elemente, die den fünf Axiomen Peanos genügen. Sie sind dann nicht mehr Elemente, die eine bestimmte, wenn auch undefinierte Bedeutung haben: Es sind veränderliche Elemente geworden, über die wir gewisse Hypothesen machen, nämlich die in den fünf Axiomen aufgestellten. In anderer Hinsicht aber sind sie unbestimmt. Wenn wir diesen Vorschlag annehmen, so sind unsere Sätze nicht für eine bestimmte Folge von Elementen, genannt die natürlichen Zahlen, bewiesen, vielmehr für alle Folgen von Elementen mit gewissen Eigenschaften. Dieses Vorgehen ist keineswegs fehlerhaft. In der Tat stellt es eine für gewisse Zwecke vollkommen berechtigte Verallgemeinerung dar. Aber aus zwei Gründen kann man auf diese Weise nicht zu angemessenen Grundlagen der Arithmetik gelangen. Zunächst weiß man nicht, ob es irgendwelche Folgen von Elementen gibt, die Peanos fünf Axiome erfüllen. Man hat nicht den geringsten Anhaltspunkt, der uns zur Auffindung derartiger Folgen führen könnte. Zweitens, wie schon oben bemerkt, sollen unsere Zahlen für das Zählen der gewöhnlichen Gegenstände brauchbar sein, und dazu müssen unsere Zahlen eine b e s t i m m t e Bedeutung und nicht bloß gewisse formale Eigenschaften haben. Diese bestimmte Bedeutung wird in der logischen Theorie der Arithmetik definiert.