2020

Abitur

Original-Prüf
mit Lösunger

MEHR ERFAHREN

Hessen

Mathematik

+ *Übungsaufgaben*
+ *Zusätzliche Aufgaben als PD*
+ *Online-Glossar*

ActiveBook
Interaktives Training

STARK

Inhalt

Fortsetzung siehe nächste Seite

ActiveBook
Interaktives Training

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen
die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autoren:

Viola Dengler:
Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Prüfungsteil: Serie 1, Aufgabe 3; Serie 2, Aufgabe 3;
Lösungen zum Landesabitur 2016: C (WTR / GTR / CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2017: C (WTR / GTR / CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2018: A2 (CAS), C (WTR / GTR / CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2019: A (Stochastik 1), B2 (WTR / CAS), C2 (WTR / CAS);
Online: Übungsaufgaben Analysis 6; Stochastik 1, 2, 4, 6 – 9; 2017 – A2 (GTR / CAS)

Werner Neidhardt:
Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Prüfungsteil: Serie 2, Aufgabe 4;
Lösungen zum Landesabitur 2016: A1 (WTR / GTR), A2 (WTR);
Lösungen zum Landesabitur 2017: A1 (WTR), A2 (WTR);
Lösungen zum Landesabitur 2018: A1 (WTR);
Lösungen zum Landesabitur 2019: A (Analysis 1), B1 (WTR);
Online: Übungsaufgaben Analysis 1, 2, 8; Lineare Algebra

Ernst Payerl:
Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Prüfungsteil: Serie 1, Aufgaben 1, 4; Serie 2, Aufgabe 1;
Lösungen zum Landesabitur 2016: A2 (GTR / CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2017: A1 (CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2018: A1 (GTR / CAS), A2 (WTR / GTR);
Lösungen zum Landesabitur 2019: A (Analytische Geometrie 1), B1 (GTR);
Online: Übungsaufgaben Analysis 5, 7, 10; Analytische Geometrie 3, 5; Stochastik 3;
2016 – A1 (CAS)

Ullrich Rauch:
Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Prüfungsteil: Serie 1, Aufgabe 2; Serie 2, Aufgabe 2;
Lösungen zum Landesabitur 2016: B1 (WTR / GTR / CAS), B2 (WTR / GTR / CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2017: B1 (WTR / GTR / CAS), B2 (WTR / GTR / CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2018: B1 (WTR / GTR / CAS), B2 (WTR / GTR / CAS);
Lösungen zum Landesabitur 2019: A (Analytische Geometrie 2), C1 (WTR / CAS);
Online: Übungsaufgaben Analysis 3, 4, 9, Analytische Geometrie 1, 2, 6; Stochastik 5

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Übungsbuch ist die ideale Hilfe bei der Vorbereitung auf das **Landesabitur 2020 im Fach Mathematik in Hessen**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette Aufstellung der für die Prüfung 2020 relevanten Themen, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.

- Sie finden darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.

- Im Jahr 2020, also im Jahr Ihres Abiturs, wird es in Hessen zum zweiten Mal zum Einsatz eines **Pflichtteils ohne Hilfsmittel** kommen. Man darf also in diesem Teil der Prüfung keinen WTR bzw. kein CAS benutzen und auch keine Formelsammlung. Zur Vorbereitung finden Sie in diesem Band zwei Aufgabenserien, die in Format und Inhalt diesem Teil entsprechen.

- Außerdem enthält dieser Band die offiziellen, vom hessischen Kultusministerium gestellten **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2016** bis **2019**. Das Aufgabenformat aus den Jahren 2016 bis 2018 wird Ihnen in dem Teil Ihrer Abiturprüfung begegnen, in dem Hilfsmittel erlaubt sind. Die Prüfung aus dem Jahr 2019 hat bereits das Format, das Ihnen vorgelegt werden wird. Zu all diesen Aufgaben sind **vollständige und ausführlich kommentierte Lösungsvorschläge** von unseren Autoren vorhanden. Sie ermöglichen Ihnen, Ihre Lösungen eigenständig zu kontrollieren und die Rechenwege Schritt für Schritt nachzuvollziehen.

- Bei allen Original-Abituraufgaben wurden von unseren Autoren **Hinweise und Tipps** ergänzt, die Ihnen Hilfestellungen für die Lösung der Aufgabe geben. Wenn Sie mit einer Aufgabe nicht zurechtkommen, schauen Sie deshalb nicht gleich in die Lösungen, sondern nutzen Sie schrittweise die Lösungstipps, um selbst die Lösung zu finden.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2020 vom Kultusministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell.

Die Autoren wünschen Ihnen für die Prüfungsvorbereitung und für das Abitur viel Erfolg!

Hinweise und Tipps zum Landesabitur 2020

Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

Seit dem Schuljahr 2006/2007 gibt es in Hessen im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Die Aufgaben werden im Auftrag des hessischen Kultusministeriums von einer Fachkommission erstellt. Die Beurteilung der Lösungen der Schüler/innen wird von zwei Fachlehrkräften durchgeführt. Es kann auch im Abitur 2020 möglich sein, dass die Zweitkorrektur durch Lehrkräfte anderer Schulen erfolgt. Die verbindlichen curricularen Vorgaben (Kerncurriculum Mathematik Hessen), nach denen in den drei ersten Schulhalbjahren der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe unterrichtet wird, bestimmen Inhalte und Anforderungen der Abituraufgaben. Hinzu kommt, dass die Bildungsstandards Mathematik verstärkt in den hessischen Abschlussarbeiten, also auch beim Landesabitur, in den Materialvorgaben und Fragestellungen der Aufgaben berücksichtigt werden.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Das hessische Landesabitur Mathematik in Hessen besteht seit dem Jahr 2019 aus zwei unterschiedlichen Abschnitten im Bereich der schriftlichen Prüfungen.

Prüfungsteil 1: Vorschlag A
Dies ist der „hilfsmittelfreie“ Teil der Prüfung, d. h., die Aufgaben sind ohne Formelsammlung und ohne Taschenrechner zu lösen. Es werden vier Aufgaben gestellt, die mindestens zwei Kurshalbjahre der Q-Phase abdecken. Dabei beinhaltet ein Aufgabenset drei Aufgaben mit dem Niveau I und eine Aufgabe mit dem Niveau II (Niveau I beinhaltet die Anforderungsbereiche I und II und Niveau II den Anforderungsbereich III, siehe die Seiten VII bis IX). Die Bearbeitungszeit für diesen Teil der Prüfung beträgt 45 Minuten.

Prüfungsteil 2: Vorschläge B und C
Der Prüfungsteil 2 besteht aus den Vorschlägen B1 und B2 zur Analysis sowie C1 zur Linearen Algebra/Analytischen Geometrie und C2 zur Stochastik. Für diesen Teil werden zwei Rechnertechnologien angeboten, WTR und CAS. Sie bekommen aber nur die Aufgaben für die Rechnertechnologie, welche in Ihrem Kurs vereinbart und angewendet wurde. Sie müssen aus B und C jeweils einen Vorschlag auswählen. Die Formate dieser Aufgaben entsprechen den bisher verwendeten Fragestellungen.

Bearbeitungszeiten

Die Auswahlzeit wird im Sinne der Angleichung an die Prüfungsrealität in die Bearbeitungszeit integriert. Die Gesamtbearbeitungszeit beträgt im Grundkurs 255 Minuten. Dabei entfallen auf den Vorschlag A (Prüfungsteil 1) 45 Minuten. Für den Prüfungsteil 2 stehen im Grundkurs 210 Minuten zur Verfügung.

Ablauf der Prüfung

Die Prüfung im Grundkurs beginnt mit der Ausgabe von Vorschlag A (Prüfungsteil 1), der nach spätestens 45 Minuten an die Aufsicht führende Lehrkraft abzugeben ist. Nach Beendigung von Prüfungsteil 1 werden von der Aufsicht führenden Lehrkraft die Vorschläge für den Prüfungsteil 2 (B1 und B2 sowie C1 und C2) ausgegeben. Nach 60 Minuten müssen die nicht ausgewählten Vorschläge der Aufgabengruppen B und C an die Aufsicht führende Lehrkraft zurückgegeben werden.

Bewertungseinheiten (BE)

Prüfungsteil 1: Hier werden im Grundkurs 20 BE vergeben.
Prüfungsteil 2: Hier werden im Grundkurs 80 BE vergeben.

Zugelassene Hilfsmittel

Die für die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik (Prüfungsteil 2) zugelassenen Hilfsmittel sind **Wörterbücher der deutschen Rechtschreibung, die jeweilige Rechnertechnologie** (WTR oder CAS), die im Unterricht verwendete **Formelsammlung** (Tafelwerk) sowie die **Schreib- und Zeichengeräte**, die im Fach Mathematik Anwendung finden. Im Falle außergewöhnlicher n und p (Stochastik) werden die entsprechenden Tabellen zur Binomialverteilung zur Verfügung gestellt. Nicht zugelassen sind schulinterne Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika.
Zur Bearbeitung der Aufgaben bekommen Sie Reinschrift- und Konzeptpapier von Ihrer Schule (versehen mit dem Stempel Ihrer Schule) zur Verfügung gestellt. Sämtliche Entwürfe und Aufzeichnungen gehören zur Abiturarbeit und dürfen nur auf diesem Papier angefertigt werden, das nach Beendigung der Bearbeitungszeit wieder komplett abgegeben werden muss.

Rechnertechnologie

Zu Beginn der Jahrgangsstufe 12 geht es um die Wahl der zu verwendenden Rechnertechnologie, also

- Wissenschaftlicher Taschenrechner WTR
- Taschenrechner mit einem Computeralgebrasystem CAS

Diese Entscheidung treffen die jeweiligen Schüler/innen eines Kurses in Abstimmung mit ihrem/ihrer Kurslehrer/in. In der Abiturprüfung werden dem Kurs nur die entsprechenden Aufgabenvorschläge vorgelegt.

Taschenrechner der Kategorie WTR müssen über erweiterte Funktionalitäten zur numerischen Berechnung

- von Nullstellen ganzrationaler Funktionen bis dritten Grades,
- der (näherungsweisen) Lösung von Gleichungen,
- der Lösung eindeutig lösbarer linearer Gleichungssysteme mit bis zu drei Unbekannten,
- der Ableitung an einer Stelle,
- bestimmter Integrale,
- von Mittelwert und Standardabweichung bei statistischen Verteilungen,
- des Produktes zweier Matrizen (bis 3×3) und
- der Inversen einer Matrix (bis 3×3)

verfügen.
Darüber hinaus müssen Taschenrechner der Kategorie WTR über Funktionalitäten zur (numerischen) Berechnung von Wahrscheinlichkeiten (Binomialverteilung und Standardnormalverteilung) verfügen.

Hessen – Grundkurs Mathematik
2019 – B1: Analysis (WTR)

Das in Material 1 im Schrägbild dargestellte Werkstück hat eine rechteckige Grundfläche und dazu senkrecht verlaufende Seitenflächen. Es besteht aus zwei unterschiedlich gefärbten Kunststoffen. Der obere Teil ist heller, der untere dunkler gefärbt.
In Material 2 ist eine Querschnittsfläche des Werkstücks abgebildet.

1 Die obere Randkurve der Querschnittsfläche kann für $-2 \le x \le 10$ durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}016x^3 - 0{,}18x^2 + 0{,}2x + 5$ beschrieben werden (alle Angaben in cm).

1.1 Berechnen Sie, auch unter Berücksichtigung der Randwerte des Intervalls, an welcher Stelle das Werkstück am höchsten ist, und geben Sie seine maximale Höhe an. **(8 BE)**

1.2 Berechnen Sie den Inhalt A der gesamten Querschnittsfläche des Werkstücks. **(4 BE)**

2 Die obere Randkurve des unteren, dunkler gefärbten Teils der Querschnittsfläche kann für $-2 \le x \le 10$ durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = (1{,}5 \cdot x + 4{,}5) \cdot e^{-0{,}3x}$ beschrieben werden (alle Angaben in cm).

2.1 Mithilfe des Formansatzes $G(x) = (a \cdot x + b) \cdot e^{-0{,}3x}$ soll eine Stammfunktion G der Funktion g ermittelt werden.
Berechnen Sie die Ableitungsfunktion G' der Funktion G.
Ermitteln Sie durch Vergleich der Funktionsterme von G' und g eine Stammfunktion G von g.
$\left[\text{zur Kontrolle: } G(x) = \left(-5x - \frac{95}{3}\right) \cdot e^{-0{,}3x}\right]$ **(6 BE)**

2.2 Bestimmen Sie das Volumen des oberen, heller gefärbten Teils des Werkstücks. **(5 BE)**

2.3 Auf der rechten Seite wird ein Teil des Werkstücks durch einen ebenen Schnitt abgetrennt. Die Schnittebene E verläuft dabei senkrecht zur Querschnittsfläche und durch die Punkte $(9|0)$ und $(10|5)$.
Erläutern Sie eine Vorgehensweise, mit der man ermitteln kann, um wie viel Kubikzentimeter das in Aufgabe 2.2 bestimmte Volumen des oberen, heller gefärbten Werkstückteils dadurch kleiner wird. **(5 BE)**

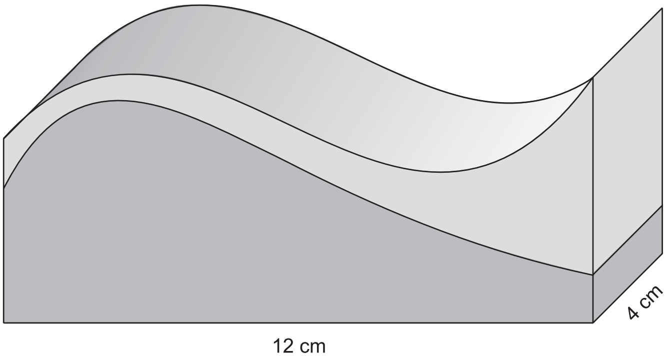
2.4 Für $x < -2$ hat der Graph von G einen relativen Extrempunkt. Berechnen Sie diesen nur anhand der notwendigen Bedingung und begründen Sie unter Verwendung der Abbildung in Material 2, dass es sich um einen relativen Tiefpunkt handeln muss. **(5 BE)**

3 Die Funktion f gehört zu der Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = k \cdot x^3 - 0{,}18x^2 + 0{,}2x + 5$ für $k > 0$.

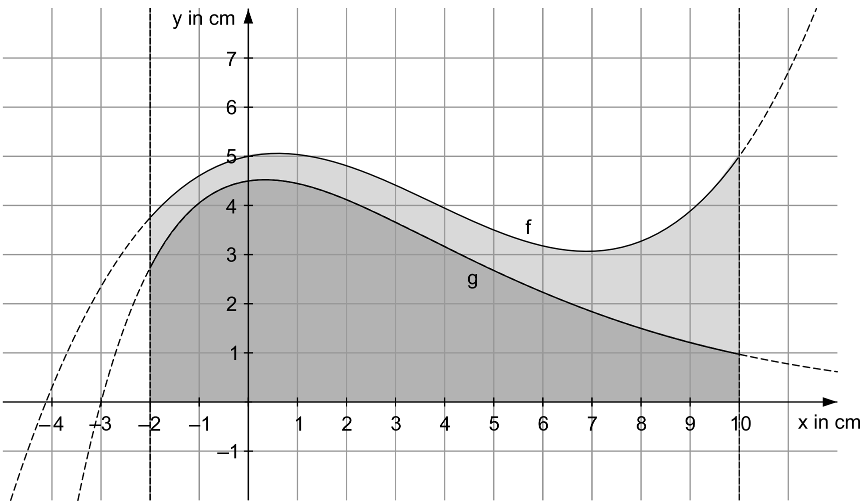
3.1 Berechnen Sie die Wendestelle x_W des Graphen von f_k in Abhängigkeit von k.
Hinweis: Die Untersuchung der notwendigen Bedingung ist ausreichend.
$\left[\text{zur Kontrolle: } x_W(k) = \frac{3}{50k}\right]$ **(5 BE)**

3.2 Untersuchen Sie, wie sich die Lage von $x_W(k)$ für $k \to \infty$ ändert. **(2 BE)**

Material 1



Material 2



Hinweise und Tipps

Teilaufgabe 1.1

- Gesucht ist ein Extremwert, genauer ein Maximum der Funktion f.
- An Randpunkten eines Intervalls können auch Extremwerte erreicht werden. Dort muss die Steigung nicht den Wert null haben.

Teilaufgabe 1.2

- Nutzen Sie den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

Teilaufgabe 2.1

- Zur Berechnung unbekannter Parameter kann das Verfahren eines Koeffizientenvergleichs benutzt werden:
  Aus $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ kann $a = c$ und $b = d$ geschlossen werden.

Teilaufgabe 2.2

- Verwenden Sie zur Berechnung der Differenzfläche den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.
- Das Volumen berechnet sich durch Grundfläche mal Breite.

Teilaufgabe 2.3

- Eine Verlagerung des Problems vom Raum in die Ebene ist möglich. Sie betrachten dann eine Gerade statt der Schnittebene.

Teilaufgabe 2.4

- Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extrempunkts ist $G'(x) = 0$.
- g ist die 1. Ableitungsfunktion von G. Der Graph von g liegt im Material 2 vor. Sein Verhalten „rund“ um die berechnete Extremstelle gibt Aufschluss über die Existenz eines Tiefpunkts.

Teilaufgabe 3.1

- Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunkts ist $f''(x) = 0$.

Teilaufgabe 3.2

- Welche Stellung nimmt der Parameter k im Lösungsterm für x_W ein?

Lösung

1.1 Es ist das Maximum der Funktion f im angegebenen Intervall zu bestimmen.
Notwendige Bedingung für die Existenz von Extrempunkten: $f'(x) = 0$

Die erste Ableitungsfunktion einer ganzrationalen Funktion ist zu bilden. Die Anwendung mehrerer Regeln (Summen-Differenzregel, konstante Faktorregel, Potenzregel und konstante Summandenregel) führt zu der Funktion:

$$f'(x) = 0{,}048x^2 - 0{,}36x + 0{,}2$$

Mit der notwendigen Bedingung ergibt sich folgende Gleichung:

$$0{,}048x^2 - 0{,}36x + 0{,}2 = 0$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung erfolgt mit der p/q-Formel.

1. Schritt: Division durch 0,048

$$x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{25}{6} = 0$$

2. Schritt: $p = -\frac{15}{2}$ und $q = \frac{25}{6}$

3. Schritt: Berechnung der beiden Ergebnisse mit der Formel

$$x_1 = \frac{15}{4} + \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 - \frac{25}{6}} \approx 6{,}896$$

$$x_2 = \frac{15}{4} - \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 - \frac{25}{6}} \approx 0{,}604$$

4. Schritt: Interpretation der beiden Resultate
Beide Werte liegen im angegebenen Intervall.

Es gilt nun, die notwendige Bedingung $f''(x_i) \neq 0$ zu überprüfen.

Mit den o. a. Regeln kann die 2. Ableitungsfunktion bestimmt werden:

$$f''(x) = 0{,}096x - 0{,}36$$

Mit der Berechnung der Funktionswerte $f''(x_1) \approx 0{,}302$ und $f''(x_2) \approx -0{,}302$ ergeben sich folgende Resultate:
- Wegen $0{,}302 > 0$ liegt an der Stelle x_1 ein Tiefpunkt vor.
- Wegen $-0{,}302 < 0$ liegt an der Stelle x_2 ein Hochpunkt vor.

Es gibt damit wegen $f(x_2) \approx 5{,}059$ den Hochpunkt $H(0{,}604\,|\,5{,}059)$.

Dieser Hochpunkt muss allerdings noch nicht die maximale Höhe beschreiben, da Randpunkte nicht durch die Methode der Differenzialrechnung untersucht werden können. Hier, an den Randpunkten, kann es durchaus die höchsten Funktionswerte geben. Jedoch hat hier nicht notwendigerweise die Steigung den Wert null.

Somit gilt es noch die Funktionswerte an den beiden Rändern des Intervalls zu berechnen:

$$f(-2) = 3{,}752 \text{ und } f(10) = 5$$

Damit liegt die maximale Höhe des Werkstücks bei $x \approx 0{,}604$ und sie beträgt $h \approx 5{,}059$.