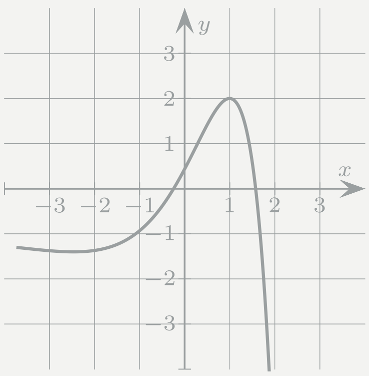
Abitur

Intensivkurs Mathematik

Analysis

Berufliches Gymnasium -
Die optimale Vorbereitung
auf das Abitur



$f'(x) = x^2 - 4$

$\mathrm{W}\left(3 \mid \frac{1}{2}\right)$

$\int e^x \, dx$

$\cos(2x) = 0$

+ Erklärung des gesamten Stoffes
+ Aufgaben auf allen Niveaustufen
+ mit allen Lösungswegen

Florian Timmermann
www.intensivkurs-mathematik.de

www.intensivkurs-mathematik.de

1. Auflage, 1. Druck 2015

Druck: WIRmachenDRUCK GmbH, Backnang

ISBN: 978-3-00-050266-8

Inhaltsverzeichnis

Arbeiten mit dem Buch

Liebe Schüler/innen,

Dieses Buch soll Ihnen die Vorbereitung auf die anstehenden Abiturprüfungen erleichtern, egal aus welchem Bundesland Sie kommen. Es setzt sich aus den folgenden Abschnitten zusammen:

- **Bezeichnungen und Grundlagen**: Hier werden die wichtigsten Grundlagen und Symbole zusammengefasst. Die Gleichungen müssen Sie alle bis zum Abitur beherrschen.

- **Aufgaben**: Nach einem Theorieteil werden jeweils Aufgaben zu dem entsprechenden Thema gestellt. Die Aufgaben unterscheiden sich - wie im Abitur auch - sowohl in den Kompetenzen (bloßes Rechnen, erklären, darstellen, ...) als auch im Schwierigkeitsgrad (• leicht, •• mittel, ••• schwer). Alle Aufgaben, die per Hand gerechnet werden müssen, haben **einfache Lösungen**.

- **Lösungen**: Hier stelle ich Ihnen alle Lösungen inklusive der Lösungswege zur Verfügung. Gelegentlich kann es auch alternative Lösungswege geben. Versuchen Sie bitte stets, die Aufgaben zu lösen, ohne einen Blick auf die Lösungen zu werfen. Erst wenn Sie nach zwei Versuchen nicht auf die Lösung kommen, sollten Sie sich diese ansehen.

Einige graphische Elemente sollen Ihnen die Arbeit im Buch zusätzlich erleichtern.

- Die wichtigsten Aufgaben sind rot markiert (z.B. **115.**). Sie bilden den Schwerpunkt der Abiturvorbereitung.

- Bei den mit markierten Aufgaben dürfen Sie einen wissenschaftlichen Taschenrechner einsetzen.

- Die mit ★ markierten Aufgaben haben einen Schwierigkeitsgrad über dem Schulniveau und müssen im Abitur nicht beherrscht werden. Mit ihnen können Sie aber einen Blick über den Tellerrand der Schulmathematik werfen.

- Kapitel, die nicht immer im Unterricht behandelt werden, sind mit * gekennzeichnet.

Auf der Internetseite

http://www.intensivkurs-mathematik.de

erhalten Sie zusätzliche Informationen sowie eine Übersicht über die weiteren Bücher dieser Reihe.
Nun wünsche ich Ihnen eine erfolgreiche Vorbereitung auf die Abiturprüfungen in Mathematik!

Grundlegende Gleichungstypen

1. Diese Gleichungstypen müssen Sie bis zum Abitur beherrschen. Lösen Sie die Gleichungen für x rechnerisch.

(a) $4 - \frac{x}{2} = 1$ (*lineare Gleichung*)

(b) $3x^2 - 16 = 32$ (*quadratische Gleichung mit Wurzelziehen*)

(c) $3x^2 = -x$ (*quadratische Gleichung mit Ausklammern*)

(d) $2x^2 - x = 10$ (*quadratische Gleichung mit Mitternachtsformel*)

(e) $x^2 = 2ax$ (*Gleichung in Abhängigkeit von Parameter*)

(f) $x^2 + a = 2x$ (*nur Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von Parameter bestimmen*)

(g) $\sqrt{3x+1} = x - 1$ (*Wurzelgleichung*)

(h) $x = \frac{3}{x+2}$ (*Bruchgleichung*)

(i) $1 - \frac{1}{4}x^3 = 3$ (*höhere Gleichung mit Wurzelziehen*)

(j) $x^3 + 4x^2 = 5x$ (*höhere Gleichung mit Ausklammern I*)

(k) $4x^2 = x^4$ (*höhere Gleichung mit Ausklammern II*)

(l) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ (*biquadratische Gleichung mit Substitution*)

(m) $\mathrm{e}^{1-x} = 8$ (*Exponentialgleichung*)

(n) $x^2\mathrm{e}^x + 4x\mathrm{e}^x = 0$ (*gemischte Gleichung I*)

(o) $\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} = 0$ (*gemischte Gleichung II*)

(p) $\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + 4 = 0$ (*gemischte Gleichung III*)

(q) $\sin x = \frac{1}{2},\ x \in [0;\ 2\pi)$ (*trigonometrische Gleichung I*)

(r) $\cos x = -\frac{1}{2},\ x \in [0;\ 2\pi)$ (*trigonometrische Gleichung II*)

(s) $\sin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = \sqrt{\frac{1}{2}},\ x \in [0;\ 4\pi)$ (*trigonometrische Gleichung III*)

(t) $\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 5 & = & -y \\ 2x & + & y & = & 2 \end{array}$ (*LGS mit Gleichsetzungsverfahren*)

(u) $\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 1 \\ & & 7y & = & 4 - 2x \end{array}$ (*LGS mit Einsetzungsverfahren*)

(v) $\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 7 \\ x & + & y & = & 1 \end{array}$ (*LGS mit Additionsverfahren*)

Teil I.

Aufgaben

1. Differentialrechnung

Die Differentialrechnung ist ein sehr mächtiges Hilfsmittel, um mathematische Funktionen zu analysieren bzw. sie aufzustellen. Nach Abschluss dieses Kapitels werden wir zum Beispiel in der Lage sein,

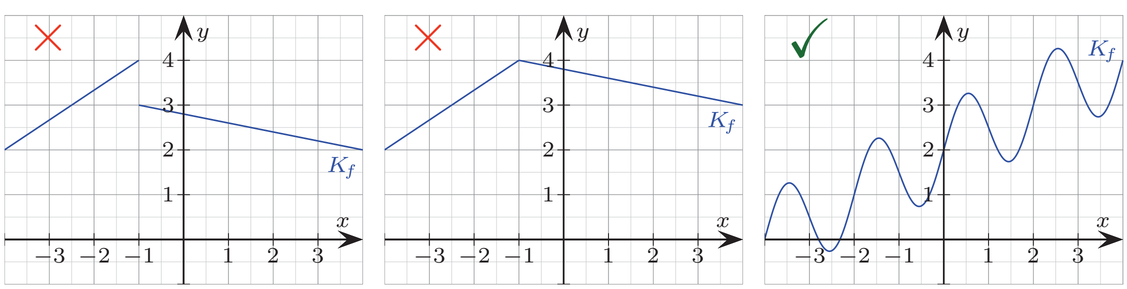
- besondere Punkte wie Hoch-, Tief- und Wendepunkte per Hand zu berechnen;
- Funktionen aufzustellen, die vorgegebene Eigenschaften erfüllen;
- Aufgaben zu Themen aus dem realen Leben zu bearbeiten: Wie viele Einheiten eines Produktes muss beispielsweise ein Unternehmen herstellen, um maximalen Gewinn zu machen?

1.1. Ableitungsfunktion

In der Differentialrechnung dreht sich alles um den Begriff der *Ableitung* einer Funktion. Mit Hilfe von Ableitungsfunktionen lässt sich angeben, inwiefern sich eine Funktion verändert. Wir unterscheiden zwischen der *ersten Ableitung*, *zweiten Ableitung* und *höheren Ableitungen*. Die erste Ableitung ist beispielsweise hilfreich, um

- das Monotonieverhalten einer Funktion zu untersuchen (→ Abschnitt 1.4)
- die Extremstellen einer Funktion zu berechnen (→ Abschnitt 1.4)

Im gesamten Buch konzentrieren wir uns hauptsächlich auf diejenigen Funktionen, für welche die geforderte Ableitung auch wirklich existiert. Dies ist nur an Stellen der Fall, an denen die Funktionen keine Sprünge machen („*stetig*“) und in einem gewissen Sinne *glatt* („*differenzierbar*“) sind. Grob gesagt kann man sie daran erkennen, dass ihre Schaubilder mit einem Stift durchgehend zu zeichnen sind und keine Knicke haben (→ Abb. 1.1).

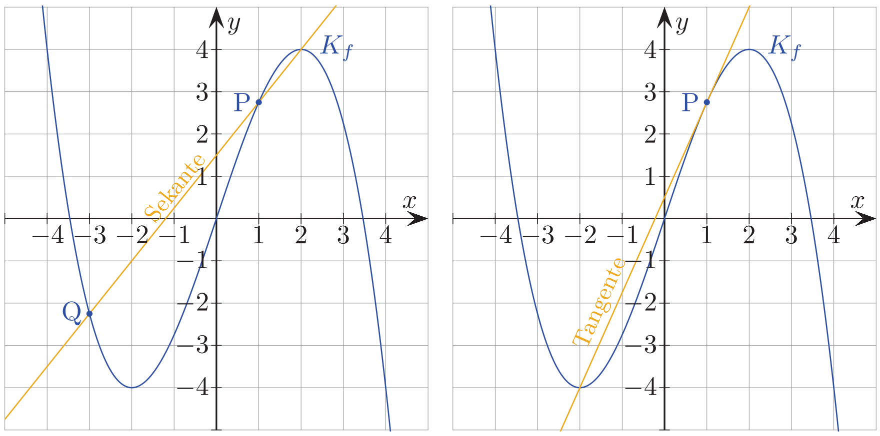


(a) Sprung (b) Knick (c) weder Sprünge noch Knicke

Abb. 1.1.: Mit welchen Funktionen werden wir es zu tun haben?

Graphisches Ableiten

An den Begriff der Ableitung können wir auf zweierlei Arten herangehen. Bevor wir uns mit den Rechenregeln beschäftigen, nähern wir uns auf die graphische Art. Dazu führen wir einige Begriffe ein.
Um zu bestimmen, wie stark eine Funktion zwischen zwei Punkten Q und P steigt, zeichnen wir eine Gerade durch Q und P (*Sekante*) und geben deren Steigung an.



(a) Sekante an f durch P und Q

(b) Tangente an f in P

Abb. 1.2.: Sekante und Tangente

Definition 1.1 (Mittlere Änderungsrate):
Die *mittlere Änderungsrate* einer Funktion f zwischen den Stellen x_0 und x ist gegeben durch den *Differenzenquotienten*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

und entspricht der *Sekantensteigung* zwischen diesen Stellen (→ Abb. 1.2a).

In Abb. 1.2a ist f gegeben durch $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$. Die Steigung der Sekante durch P und Q beträgt

$$m = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{\frac{11}{4} - \left(-\frac{9}{4}\right)}{4} = \frac{5}{4}\,.$$

Doch wie groß ist die Steigung der Funktion exakt im Punkt P? Dafür lassen wir den Punkt Q immer näher an P wandern. Die Steigung der Sekante gibt dann immer besser die aktuelle Steigung an, bis schließlich die Punkte Q und P zusammenfallen. Dann ist die Gerade eine *Tangente* in P. Die Steigung dieser Tangente wird durch die folgende Definition beschrieben und ist identisch mit der Steigung der Funktion in P.

Definition 1.2 (Momentane Änderungsrate):
Die *momentane Änderungsrate* einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gegeben durch den *Differentialquotienten*

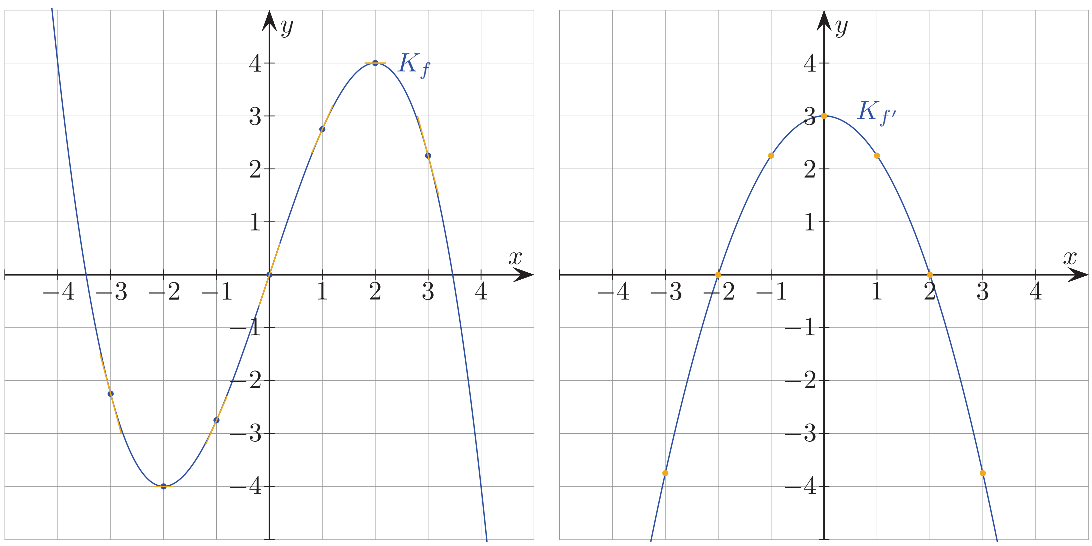
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

und entspricht der *Tangentensteigung* an dieser Stelle (→ Abb. 1.2b).

In Abb. 1.2b können wir die Steigung der Tangente in P näherungsweise mit Hilfe eines Steigungsdreiecks ermitteln und erhalten den Wert $m = \frac{9}{4}$. Unser Ziel ist es, eine Funktion f' zu ermitteln, die für die Funktion f die Steigung an jeder einzelnen Stelle angibt.

Definition 1.3 (1. Ableitung):
Die *1. Ableitung* einer Funktion f gibt für jeden x-Wert die Tangentensteigung der Funktion f an der Stelle x an (→ Abb. 1.3). Wir bezeichnen diese Funktion mit f' (oder in der Physik mit $\frac{d}{dx}f$).

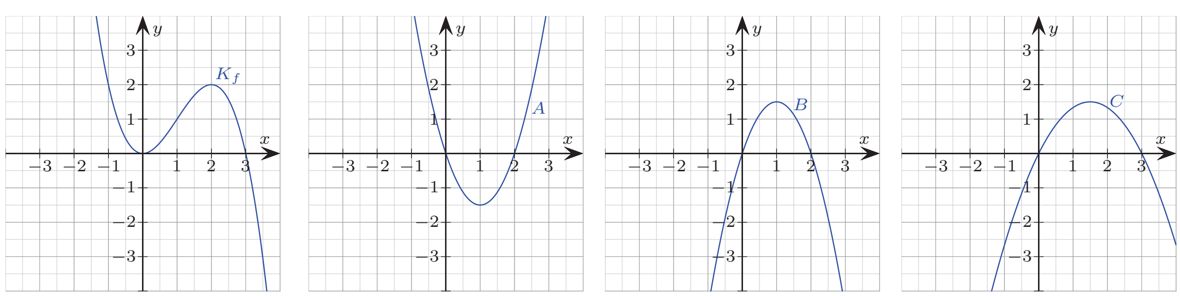
In Abb. 1.3 hat das Schaubild von f an den Stellen $x = -3$ und $x = 3$ stark fallende Tangenten. Das Schaubild von f' liegt dort unterhalb der x-Achse. An den Stellen $x = -2$ und $x = 2$ hat K_f waagrechte Tangenten. $K_{f'}$ hat dort Nullstellen. Das Schaubild von f hat an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ stark steigende Tangenten. Das Schaubild von f' liegt dort oberhalb der x-Achse. An der Stelle $x = 0$ hat K_f die Tangente mit der größten Steigung $m = 3$. $K_{f'}$ ist an dieser Stelle maximal und nimmt den y-Wert 3 an.



(a) Schaubild von f mit Tangenten (b) Schaubild von f'

Abb. 1.3.: Zusammenhang zwischen f und f'

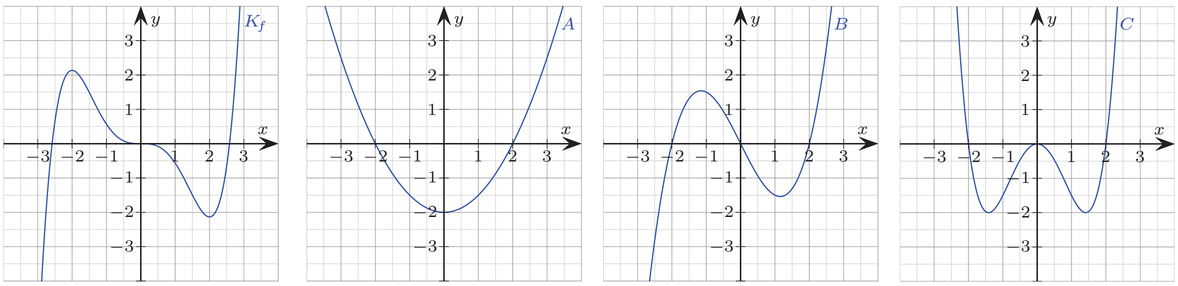
•• **3.** Das linke Bild (→ Abb. 1.4) zeigt das Schaubild K_f der Funktion f. Welches der drei rechten Schaubilder ist das Schaubild von f'? Begründen Sie ausführlich.



Ausgangsbild (a) (b) (c)

Abb. 1.4.: Schaubilder zu Aufgabe 3

•• **4.** Das linke Bild (→ Abb. 1.5) zeigt das Schaubild K_f der Funktion f. Welches der drei rechten Schaubilder ist das Schaubild von f'? Begründen Sie ausführlich.



Ausgangsbild (a) (b) (c)

Abb. 1.5.: Schaubilder zu Aufgabe 4

••• **5.** In Abb. 1.6 sind die Schaubilder dreier Funktionen sowie ihrer 1. Ableitungen eingezeichnet. Ordnen Sie die Schaubilder den Funktionen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

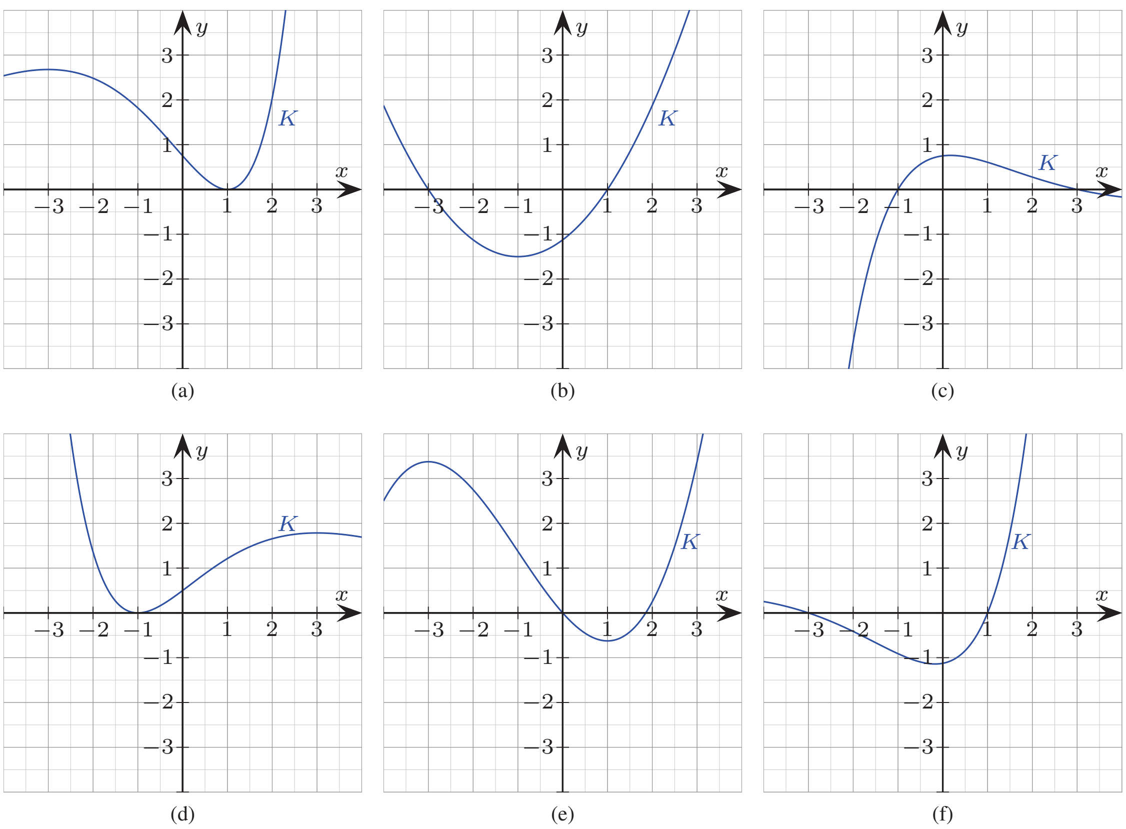
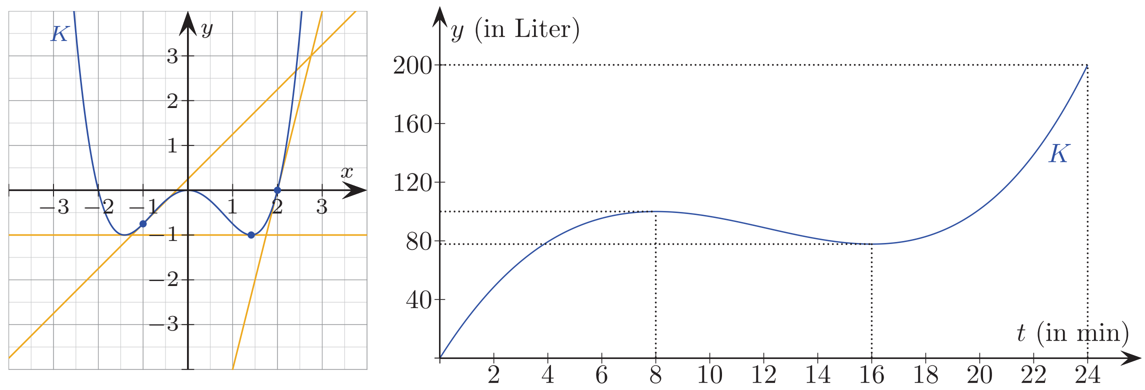


Abb. 1.6.: Schaubilder zu Aufgabe 5

•• **6.** In Abb. 1.7a ist das Schaubild K einer Funktion f dargestellt. Geben Sie die Werte der Ableitungsfunktion f' an den Stellen $x_1 = -1$, $x_2 = \sqrt{2}$ und $x_3 = 2$ (blau markierte Punkte) an. Die eingezeichneten Tangenten helfen Ihnen dabei.

●● **7.** In Abb. 1.7b ist das Schaubild K einer Funktion f dargestellt. Diese Funktion f gibt den Füllstand y einer Badewanne (in Litern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in min) an. Beschreiben Sie ungefähr, wie stark der Wasserhahn bzw. der Abfluss jeweils geöffnet werden muss, damit sich die dargestellte Füllkurve ergibt. Beachten Sie, dass zu einem einzelnen Zeitpunkt entweder der Wasserhahn oder der Abfluss geöffnet werden darf.



(a) Schaubild zu Aufgabe 6 (b) Schaubild zu Aufgabe 7

Abb. 1.7.: Schaubilder

●●● **8.** In Abb. 1.8 sind die Schaubilder verschiedener Funktionen dargestellt. Skizzieren Sie die Schaubilder der dazugehörigen 1. Ableitungen.

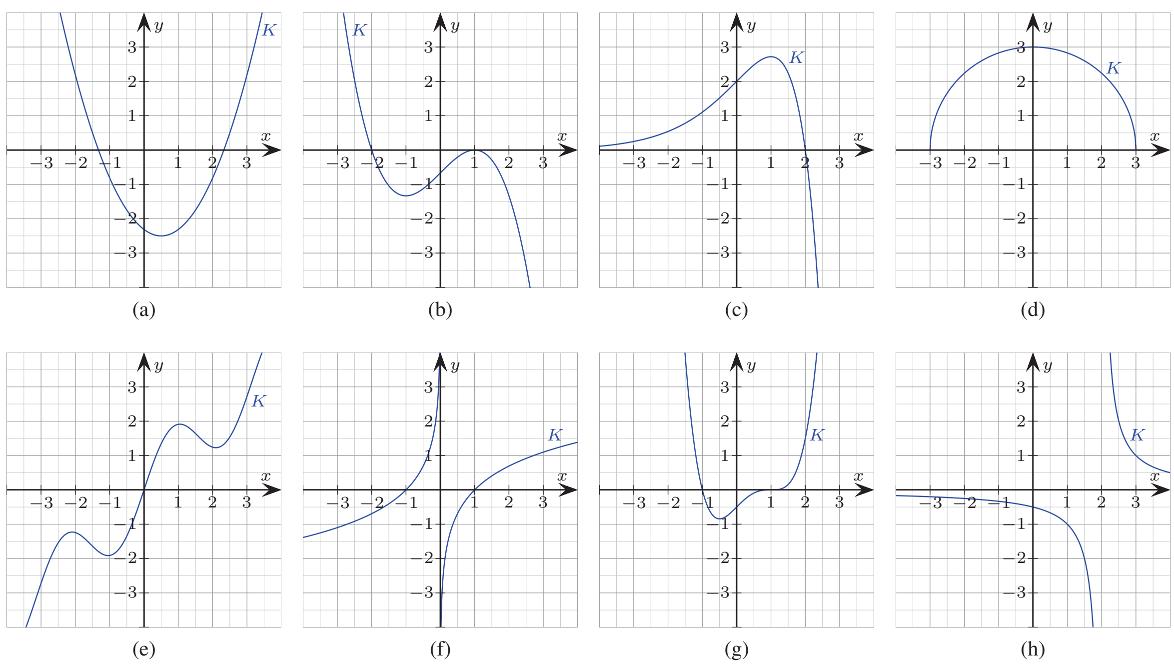


Abb. 1.8.: Schaubilder zu Aufgabe 8

Teil II.

Lösungen

Differentialrechnung

Grundlegende Gleichungstypen

1. Zunächst wird die allgemeine Lösungsmethode beschrieben, anschließend der konkrete Lösungsweg für die Aufgabe.

(a) *lineare Gleichung*: Die Gleichung nacheinander so umstellen, dass die Unbekannte x alleine steht.

$$\begin{aligned} 4 - \tfrac{x}{2} &= 1 && \mid -4 \\ -\tfrac{x}{2} &= -3 && \mid \cdot(-2) \\ x &= 6 \end{aligned}$$

(b) *quadratische Gleichung mit Wurzelziehen*: Die Gleichung nacheinander so umstellen, dass der Term x^2 alleine steht. Dann Wurzel ziehen.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 16 &= 32 && \mid +16 \\ 3x^2 &= 48 && \mid : 3 \\ x^2 &= 16 && \mid \sqrt{} \end{aligned}$$

Die Lösungen lauten $x_1 = -4$ bzw. $x_2 = 4$.

(c) *quadratische Gleichung mit Ausklammern*: Alles auf eine Seite bringen. Dann x ausklammern.

$$\begin{aligned} 3x^2 &= -x && \mid +x \\ 3x^2 + x &= 0 && \mid x \text{ ausklammern} \\ x(3x+1) &= 0 && \mid \text{Satz vom Nullprodukt} \end{aligned}$$

Wir erhalten $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = -\frac{1}{3}$.

(d) *quadratische Gleichung mit Mitternachtsformel*: Alles auf eine Seite bringen. Dann Mitternachtsformel anwenden. Die Lösungen einer Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ (sofern sie existieren) lauten

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - x &= 10 && \mid -10 \\ 2x^2 - x - 10 &= 0 && \mid \text{Mitternachtsformel} \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{1 \pm 9}{4}$$

und somit $x_1 = -2$ bzw. $x_2 = \frac{5}{2}$.

(e) *Gleichung in Abhängigkeit von Parameter*: Rechnen, als ob der Parameter eine Zahl wäre. Weiterhin wird die Lösung für x gesucht.

$$\begin{aligned} x^2 &= 2ax && \mid -2ax \\ x^2 - 2ax &= 0 && \mid x \text{ ausklammern} \\ x(x-2a) &= 0 && \mid \text{Satz vom Nullprodukt} \end{aligned}$$

Wir erhalten $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 2a$.

(f) *nur Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von Parameter bestimmen*: Wovon ist die Anzahl der Lösungen für x abhängig? Hier: vom Wert des Terms unter der Wurzel. Für quadratische Gleichungen gilt: Ist $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, dann gibt es zwei Lösungen. Ist $\Delta = 0$, dann gibt es genau eine Lösung. Ist $\Delta < 0$, dann gibt es keine Lösung.

$$\begin{aligned} x^2 + a &= 2x && \mid -2x \\ x^2 - 2x + a &= 0 && \mid \text{Mitternachtsformel} \\ \Delta &= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a \\ &= 4 - 4a \end{aligned}$$

Wir erhalten also genau eine Lösung für $\Delta = 0$ bzw. $a = 1$, zwei Lösungen für $\Delta > 0$ bzw. $a < 1$ und keine Lösung für $\Delta < 0$ bzw. $a > 1$.

(g) *Wurzelgleichung*: Jede Seite der Gleichung quadrieren.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} &= x - 1 && \mid ()^2 \\ 3x + 1 &= x^2 - 2x + 1 && \mid -3x - 1 \\ 0 &= x^2 - 5x && \mid x \text{ ausklammern} \\ 0 &= x(x-5) && \mid \text{Satz vom Nullprodukt} \end{aligned}$$

Wir erhalten $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 5$.

(h) *Bruchgleichung*: Jede Seite der Gleichung mit dem Hauptnenner des Bruches multiplizieren.

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{x+2} && \mid \cdot (x+2) \\ x^2 + 2x &= 3 && \mid -3 \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 && \mid \text{Mitternachtsformel} \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

und somit $x_1 = -3$ bzw. $x_2 = 1$.

(i) *höhere Gleichung mit Wurzelziehen*: Die Gleichung nacheinander so umstellen, dass die Potenz alleine steht. Dann Wurzel ziehen.

$$\begin{aligned} 1 - \tfrac{1}{4}x^3 &= 3 && \mid -1 \\ -\tfrac{1}{4}x^3 &= 2 && \mid \cdot(-4) \\ x^3 &= -8 && \mid \sqrt[3]{} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

(j) *höhere Gleichung mit Ausklammern I*: Alles auf eine Seite bringen. Dann die niedrigste Potenz ausklammern.

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 &= 5x && \mid -5x \\ x^3 + 4x^2 - 5x &= 0 && \mid x \text{ ausklammern} \\ x(x^2 + 4x - 5) &= 0 && \mid \text{Satz vom Nullprodukt} \end{aligned}$$

Wir erhalten $x_1 = 0$ und mit der Mitternachtsformel $x_2 = -5$ bzw. $x_3 = 1$.

(k) *höhere Gleichung mit Ausklammern II*: Alles auf eine Seite bringen. Dann die niedrigste Potenz ausklammern.

$$\begin{aligned} 4x^2 &= x^4 && \mid -4x^2 \\ 0 &= x^4 - 4x^2 && \mid x^2 \text{ ausklammern} \\ 0 &= x^2(x^2 - 4) && \mid \text{Satz vom Nullprodukt} \end{aligned}$$

Wir erhalten $x_1 = 0$ und mit Hilfe von Wurzelziehen die Lösungen $x_2 = -2$ bzw. $x_3 = 2$.

(l) *biquadratische Gleichung mit Substitution*: Substituieren Sie $u = x^2$. Dann ist $x^4 = u^2$.

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 - 4 &= 0 && \mid \text{Subst: } u = x^2 \\ u^2 - 3u - 4 &= 0 && \mid \text{Mitternachtsformel} \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$u_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

und somit $u_1 = -1$ bzw. $u_2 = 4$. Nun führen wir die Rücksubstitution durch.

$$u_1 = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{keine Lösungen}$$
$$u_2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2 \text{ bzw. } x_2 = 2$$

(m) *Exponentialgleichung*: Beide Seiten der Gleichung logarithmieren.

$$\begin{aligned} e^{1-x} &= 8 && \mid \ln() \\ 1 - x &= \ln 8 && \mid +x - \ln 8 \\ 1 - \ln 8 &= x \end{aligned}$$

(n) *gemischte Gleichung I*: So viel wie möglich ausklammern. Dabei müssen die Potenzgesetze beachtet werden.

$$\begin{aligned} x^2 e^x + 4xe^x &= 0 && \mid xe^x \text{ ausklammern} \\ xe^x(x+4) &= 0 && \mid \text{Satz vom Nullprodukt} \end{aligned}$$

Wir erhalten $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = -4$. Anmerkung: e^x wird nie Null!

(o) *gemischte Gleichung II*: Einen e-Term ausklammern.

$$\begin{aligned} e^{-x} - 3e^{-2x} &= 0 && \mid e^{-x} \text{ ausklammern} \\ e^{-x}(1 - 3e^{-x}) &= 0 && \mid \text{Satz vom Nullprodukt} \end{aligned}$$

Da der Ausdruck e^{-x} alleine nie Null werden kann, lösen wir

$$\begin{aligned} 1 - 3e^{-x} &= 0 && \mid +3e^{-x} \\ 1 &= 3e^{-x} && \mid : 3 \\ \tfrac{1}{3} &= e^{-x} && \mid \ln() \\ -\ln 3 = \ln \tfrac{1}{3} &= -x && \mid \cdot(-1) \\ \ln 3 &= x \end{aligned}$$

(p) *gemischte Gleichung III*: Substituiere $e^x = u$. Dann ist $e^{2x} = u^2$

$$\begin{aligned} e^{2x} - 4e^x + 4 &= 0 && \mid \text{Subst: } u = e^x \\ u^2 - 4u + 4 &= 0 && \mid \text{Mitternachtsformel} \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$u_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2}$$

und somit $u = 2$. Nun führen wir die Rücksubstition durch.

$$u = 2 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

(q) *trigonometrische Gleichung I*: $\sin^{-1}$ anwenden.

$$\sin x = \tfrac{1}{2} \qquad \mid \sin^{-1}$$

Wir erhalten $x_1 = \frac{1}{6}\pi$. Die zweite Lösung berechnen wir durch die Formel $x_2 = \pi - x_1$, also $x_2 = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$. Weitere Lösungen (außerhalb des Intervalls) würden wir durch Addition bzw. Subtraktion von ganzen Vielfachen des Terms 2π (Periodenlänge von f mit $f(x) = \sin x$) zu den Lösungen erhalten.

(r) *trigonometrische Gleichung II*: $\cos^{-1}$ anwenden.

$$\cos x = -\tfrac{1}{2} \qquad | \cos^{-1}$$

Wir erhalten $x_1 = \frac{4}{3}\pi$. Die zweite Lösung berechnen wir durch die Formel $x_2 = 2\pi - x_1$, also $x_2 = 2\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$. Weitere Lösungen (außerhalb des Intervalls) würden wir durch Addition bzw. Subtraktion von ganzen Vielfachen des Terms 2π (Periodenlänge von f mit $f(x) = \cos x$) zu den Lösungen erhalten.

(s) *trigonometrische Gleichung III*: Substituieren des inneren Terms und $\sin^{-1}$ anwenden.

$$\begin{aligned} \sin(\tfrac{1}{2}x - 1) &= \sqrt{\tfrac{1}{2}} && | \text{ Subst: } u = \tfrac{1}{2}x - 1 \\ \sin u &= \sqrt{\tfrac{1}{2}} && | \sin^{-1} \end{aligned}$$

Wir erhalten $u_1 = \frac{1}{6}\pi$ bzw. $u_2 = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$. (Bei der Kosinusfunktion müssten wir die erste Lösung von 2π abziehen, um die zweite Lösung zu erhalten.) Nun führen wir die Rücksubstitution durch.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{6}\pi \Rightarrow \frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{6}\pi \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}\pi + 2 \\ u_2 &= \frac{5}{6}\pi \Rightarrow \frac{1}{2}x - 1 = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow x_2 = \frac{5}{3}\pi + 2 \end{aligned}$$

Weitere Lösungen würden wir durch Addition bzw. Subtraktion von ganzen Vielfachen des Terms 4π (Periodenlänge von f mit $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x - 1)$) zu den Lösungen erhalten.

(t) *LGS mit Gleichsetzungsverfahren*: Beide Gleichungen nach einer Variablen (z.B. y) auflösen. Diese dann gleichsetzen.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 5 & = & -y \\ 2x & + & y & = & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcr} -3x & + & 5 & = & y \\ & & y & = & -2x + 2 \end{array}$$

Dann setzen wir beide gleich.

$$\begin{aligned} -3x + 5 &= -2x + 2 && | +3x - 2 \\ 3 &= x \end{aligned}$$

Schließlich setzen wir den gefundenen Wert in eine der oberen Gleichungen (z.B. die zweite) ein.

$$y = -2 \cdot 3 + 2 = -4.$$

Wir erhalten das Lösungspaar $x = 3$, $y = -4$.

(u) *LGS mit Einsetzungsverfahren*: Eine Gleichung (z.B. die erste) nach einer Variablen (z.B. x) auflösen und in die zweite Gleichung einsetzen.

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & 1 \\ & & 7y & = & 4-2x \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x & = & 1-3y \\ 7y & = & 4-2x \end{array}$$

Dann setzen wir den Term für x in die andere Gleichung (hier: die zweite) ein und lösen nach der übrigen Variablen (hier: y) auf.

$$\begin{aligned} 7y &= 4-2(1-3y) \\ 7y &= 4-2+6y \qquad \mid -6y \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Schließlich setzen wir den gefundenen Wert in eine der oberen Gleichungen ein.

$$x = 1-3\cdot 2 = -5.$$

Wir erhalten das Lösungspaar $x = -5$, $y = 2$.

(v) *LGS mit Additionsverfahren*: Eine Gleichung (z.B. die zweite) zunächst mit einer Zahl multiplizieren, damit die Vorfaktoren einer Variablen (z.B. von x) gleich sind. Dann ziehen wir die einzelnen Gleichungen voneinander ab.

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 7 \\ x & + & y & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 7 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}$$

Wir ziehen die zweite Zeile von der ersten ab: $y = 5$. Dann setzen wir den gefundenen Wert in eine der oberen Gleichungen ein.

$$x+5 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -4.$$

Wir erhalten das Lösungspaar $x = -4$, $y = 5$.

2. Beide Lösungsmöglichkeiten sind denkbar, wobei wir nur den geeigneteren Weg vorstellen.

(a) *lineare Ungleichung*: Direktes Rechnen

$$\begin{aligned} 5-\tfrac{1}{2}x &\le 2 \qquad \mid -2+\tfrac{1}{2}x \\ 3 &\le \tfrac{1}{2}x \qquad \mid \cdot 2 \\ 6 &\le x \end{aligned}$$

Wir erhalten $x \in [6; \infty)$.

(b) *quadratische Ungleichung*: Grenzfallbetrachtung

$$\begin{aligned} x^2+3x &= 4 \qquad \mid -4 \\ x^2+3x-4 &= 0 \qquad \mid \text{Mitternachtsformel} \end{aligned}$$

Dies gilt für $x = -4$ bzw. $x = 1$. Nun betrachten wir wieder die Ungleichung, und zwar auch für die Zwischenräume.

	$x \in (-\infty;\ -4)$	$x = -4$	$x \in (-4;\ 1)$	$x = 1$	$x \in (1;\ \infty)$
$x^2 + 3x < 4$?	nein	nein	ja	nein	nein

Wir erhalten $x \in (-4;\ 1)$.

(c) *höhere Ungleichung*: Grenzfallbetrachtung

$$\begin{aligned} x &\leq x^3 && \mid -x^3 \\ x - x^3 &= 0 && \mid x \text{ ausklammern} \\ x(1 - x^2) &= 0 \end{aligned}$$

Dies gilt für $x = -1$, $x = 0$ bzw. $x = 1$. Nun betrachten wir wieder die Ungleichung, und zwar auch für die Zwischenräume.

	$x \in (-\infty;\ -1)$	$x = -1$	$x \in (-1;\ 0)$	$x = 0$	$x \in (0;\ 1)$	$x = 1$	$x \in (1;\ \infty)$
$x \leq x^3$?	nein	ja	ja	ja	nein	ja	ja

Wir erhalten $x \in [-1;\ 0]$ und $x \in [1;\ \infty)$.

(d) *exponentielle Ungleichung*: Direktes Rechnen

$$\begin{aligned} e^{1-x} &> 4 && \mid \ln() \\ 1 - x &> \ln 4 && \mid +x - \ln 4 \\ 1 - \ln 4 &> x \end{aligned}$$

Wir erhalten $x \in (-\infty;\ 1 - \ln 4)$.

(e) *trigonometrische Ungleichung*: Grenzfallbetrachtung

$$\sin x = \tfrac{1}{2} \qquad \mid \sin^{-1}$$

Dies gilt für $x = \frac{1}{6}\pi$ bzw. $x = \frac{5}{6}\pi$. Nun betrachten wir wieder die Ungleichung, und zwar auch für die Zwischenräume.

	$x \in [0;\ \frac{1}{6}\pi)$	$x = \frac{1}{6}\pi$	$x \in (\frac{1}{6}\pi;\ \frac{5}{6}\pi)$	$x = \frac{5}{6}\pi$	$x \in (\frac{5}{6}\pi; 2\pi]$
$\sin x \geq \frac{1}{2}$?	nein	ja	ja	ja	nein

Wir erhalten $x \in [\frac{1}{6}\pi;\ \frac{5}{6}\pi]$

Ableitungsfunktion

Graphisches Ableiten

3. Schaubild B ist richtig. Das Schaubild von f' muss die Nullstellen 0 und 2 haben, da K_f dort waagrechte Tangenten hat. An der Stelle $x = 1$ muss f' einen positiven y-Wert haben.

4. Schaubild C ist richtig. Das Schaubild von f' muss die Nullstellen -2, 0 und 2 haben, da K_f dort waagrechte Tangenten hat. Im Bereich $x \in (-2;\ 2)$ muss f' negative y-Werte haben.

5. (b) ist die Ableitung von (e), da das Schaubild in (e) an den Stellen $x = -3$ und $x = 1$ waagrechte Tangenten hat und das Schaubild in (b) dort Nullstellen. Das Schaubild in (e) fällt am stärksten in $x = -1$. Dort hat das Schaubild in (b) den tiefsten y-Wert; (c) ist die Ableitung von (d), da das Schaubild in (d) an den Stellen $x = -1$ und $x = 3$ waagrechte Tangenten hat und das Schaubild in (c) dort Nullstellen; (f) ist die Ableitung von (a), da das Schaubild in (a) an den Stellen $x = -3$ und $x = 1$ waagrechte Tangenten hat und das Schaubild in (f) dort Nullstellen. Das Schaubild in (a) fällt am stärksten in $x = 0$. Dort hat das Schaubild in (f) den tiefsten y-Wert.

6. $f'(-1) = 1$, $f'(\sqrt{2}) = 0$, $f'(2) = 4$

7. Zu Beginn ($t = 0$) wird der Wasserhahn weit geöffnet. Bis zum Zeitpunkt $t = 8$, als 100 Liter Wasser in der Badewanne sind, wird er immer weiter zugedreht. Es fließt also immer weniger Wasser in die Badewanne. In $t = 8$ wird der Wasserhahn geschlossen. Es fließt kein Wasser mehr in die Badewanne. Von $t = 8$ bis $t = 12$ wird der Abfluss immer weiter geöffnet, es fließt also immer mehr Wasser ab. Von $t = 12$ bis $t = 16$ wird der Abfluss wieder immer mehr geschlossen, bis der Füllstand der Wanne knapp 80 Liter beträgt. In $t = 16$ wird der Abfluss geschlossen, es fließt also kein weiteres Wasser mehr ab. Anschließend wird der Wasserhahn immer weiter geöffnet, bis zum Zeitpunkt $t = 24$ die Badewanne mit 200 Litern Wasser gefüllt ist.

8. Die Schaubilder der jeweiligen Ableitungsfunktion sind in Abb. 3.10 skizziert.

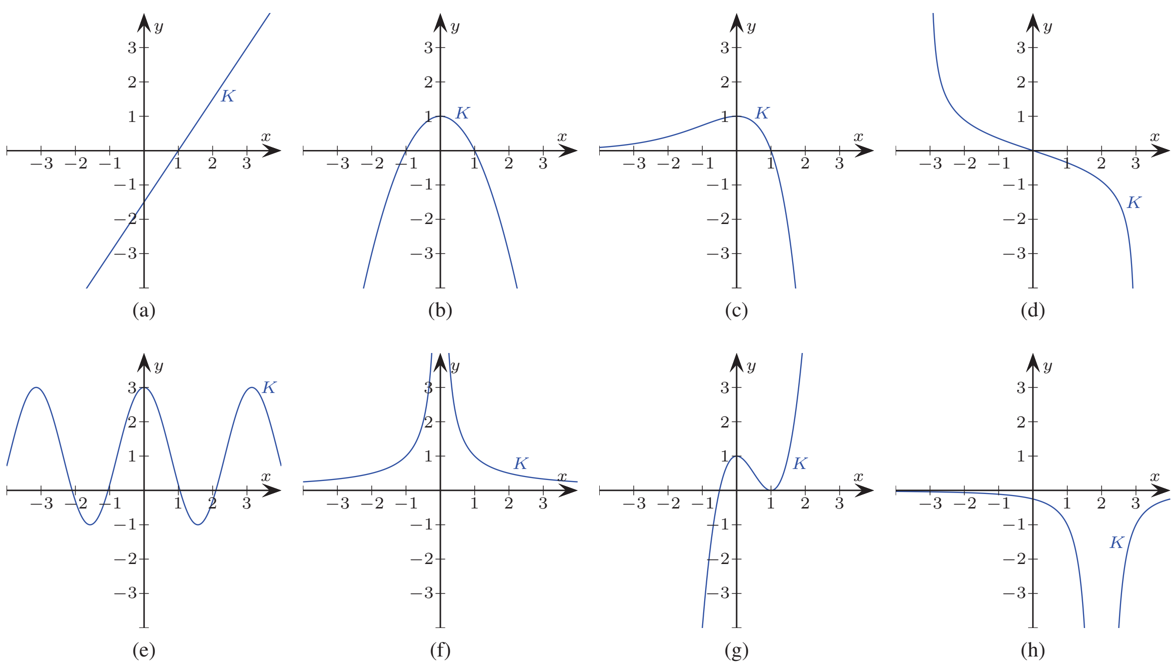


Abb. 3.10.: Lösungsskizzen zu Aufgabe 8

Mit diesem Übungsbuch können Sie sich langfristig und gezielt auf die Abiturprüfung in Ihrem Bundesland vorbereiten.

Alle Grundlagen und die neuen Unterrichtsinhalte werden anschaulich und mit vielen Bildern erklärt

Für alle Aufgaben ist der Schwierigkeitsgrad angegeben. Alle Lösungswege stehen zur Verfügung und ermöglichen so eine individuelle und selbständige Vorbereitung.

mit „einfachen" Zahlen

viele Bilder

Beispielaufgaben

Erklärungen

viele Übungen

alle Lösungswege

individuell

für leistungsschwache und -starke Schüler

ISBN 978-3-00-050266-8