



Erste Hilfe



Auffinden einer Person

Grundsätze

- Ruhe bewahren
- Unfallstelle sichern
- Eigene Sicherheit beachten



Person ggf. aus dem Gefahrenbereich retten

Notruf 112

- Wo geschah es?
- Was geschah?
- Wie viele Verletzte?
- Welche Art von Verletzungen?
- Warten auf Rückfragen!



Bewusstsein prüfen
laut ansprechen,
anfassen, rütteln

nicht
vorhanden
um
Hilfe
rufen



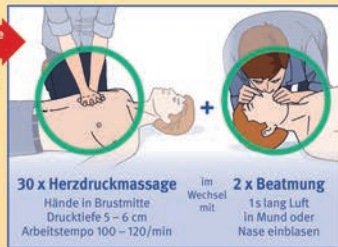
Atmung prüfen
Atemwege freimachen,
Kopf nackenwärts beugen,
Kinn anheben,
sehen/hören/fühlen

keine normale
Atmung



Notruf

**AED¹⁾
holen
lassen**



30 x Herzdruckmassage
Hände in Brustmitte
Drucktiefe 5 – 6 cm
Arbeitstempo 100 – 120/min

2 x Beatmung
1s lang Luft
in Mund oder
Nase einblasen

vorhanden

normale
Atmung



**Situationsgerecht
helfen**
z.B. Wunde versorgen



Stabile Seitenlage



Notruf

Bewusstsein und Atmung überwachen

Unfälle durch elektrischen Strom

- Auf Selbstschutz achten
- Strom sofort unterbrechen

Niederspannung: (bis 1000 Volt)

- Stecker ziehen, ausschalten
- Sicherung herausnehmen bzw. Sicherungsautomat betätigen

Hochspannung: (über 1000 Volt)

- Abstand halten
- Notruf „Elektrounfall“
- Fachpersonal herbeirufen
- Rettung nur durch Fachpersonal!

Maßnahmen am Patienten:

- Ständige Kontrolle von Bewusstsein und Kreislauf (Atmung)
- Ärztliche Behandlung veranlassen

¹⁾ Sofern verfügbar, den Anweisungen des „Automatisierten Externen Defibrillators“ AED (Gerät zur Beseitigung von Herzmuskelstörungen) folgen.



EUROPA-FACHBUCHREIHE
für Metallberufe

Roland Gomeringer
Max Heinzler
Roland Kilgus
Volker Menges
Stefan Oesterle

Thomas Rapp
Claudius Scholer
Andreas Stenzel
Andreas Stephan
Falko Wieneke

Tabellenbuch Metall

47., neu bearbeitete und erweiterte Auflage

Europa-Nr.: 10609 mit Formelsammlung

Europa-Nr.: 1060X ohne Formelsammlung

Europa-Nr.: 10706 XXL, mit Formelsammlung und CD

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Autoren:

Roland Gomeringer
Max Heinzler
Roland Kilgus
Volker Menges
Stefan Oesterle
Thomas Rapp
Claudius Scholer
Andreas Stenzel
Andreas Stephan
Falko Wieneke

Meßstetten
Wangen im Allgäu
Neckartenzlingen
Lichtenstein
Amtzell
Albstadt
Pliezhausen
Balingen
Marktoberdorf
Essen

Lektorat:

Roland Gomeringer, Meßstetten

Bildbearbeitung:

Zeichenbüro des Verlages Europa-Lehrmittel, Ostfildern

Maßgebend für die Anwendung der Normen und der anderen Regelwerke sind deren neueste Ausgaben. Sie können durch die Beuth Verlag GmbH, Burggrafenstr. 6, 10787 Berlin, bezogen werden.

Inhalte des Kapitels „Programmaufbau bei CNC-Maschinen nach PAL“ (Seiten 349 bis 368) richten sich nach Veröffentlichungen der PAL-Prüfungsaufgaben- und Lehrmittelentwicklungsstelle der IHK Region Stuttgart.

47. Auflage 2017, korrigierter Nachdruck 2018

Druck 6 5 4 3

Alle Drucke dieser Auflage sind im Unterricht nebeneinander einsetzbar, da sie bis auf korrigierte Druckfehler und kleine Normänderungen unverändert sind.

ISBN 978-3-8085-1727-7 mit Formelsammlung
ISBN 978-3-8085-1678-2 ohne Formelsammlung
ISBN 978-3-8085-1684-3 XXL, mit Formelsammlung und CD

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2017 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: Satz+Layout Werkstatt Kluth GmbH, 50374 Erftstadt
Umschlaggestaltung: Grafische Produktionen Jürgen Neumann, 97222 Rimpar
Umschlagfoto: Sauter Feinmechanik GmbH, 72555 Metzingen
Druck: M.P. Media-Print Informationstechnologie GmbH, 33100 Paderborn

Vorwort

Zielgruppen des Tabellenbuches

- Metallberufe aus Handwerk und Industrie
- Technische Produktdesigner
- Meister- und Technikerausbildung
- Praktiker in Handwerk und Industrie
- Studenten des Maschinenbaues

Inhalt

Der Inhalt des Buches ist in sieben Hauptkapitel gegliedert, die in der rechten Spalte benannt sind. Er ist auf die Bildungspläne der Zielgruppen abgestimmt und der Entwicklung der Technik und der KMK-Lehrpläne angepasst.

Die **Tabellen** enthalten die wichtigsten Regeln, Bauarten, Sorten, Abmessungen und Richtwerte der jeweiligen Sachgebiete.

Bei den **Formeln** wird in der Legende auf die Nennung von Einheiten verzichtet. In den oft parallel zum Buch verwendeten „**Formeln für Metallberufe**“ sind dagegen die Einheiten angegeben, um vor allem Berufsanfängern beim Berechnen eine Hilfestellung zu geben. Dies gilt auch für die neue „**Formelsammlung Metall plus+**“, die in kompakter Form neben einfachen Grundlagen auch weitergehende Inhalte bietet.

Mit der CD „**Tabellenbuch Metall digital**“ und der Web-Applikation „**Tabellenbuch Metall online**“ liegt das Tabellenbuch in digitaler Form vor. Berechnungsmöglichkeiten sind integriert. Formeln und Einheiten können gewählt und umgestellt werden. Ergänzt wird das Medienangebot durch eine APP „**Formeln & Tabellen Metall**“ für Smartphones und Tablets. Damit können z.B. schnell und einfach Basiseinheiten umgerechnet, Härtewerte oder Toleranzen bestimmt werden. Markierungen im Buch weisen auf den sinnvollen Einsatz der APP hin. Der Zugang zu weiteren Web-Angeboten ist über „**Formeln & Tabellen Metall**“ oder www.europa-lehrmittel.de/tm47 möglich.

Das **Sachwortverzeichnis** am Schluss des Buches enthält neben den deutschen auch die englischen Bezeichnungen.

Im **Normenverzeichnis** sind alle im Buch zitierten aktuellen Normen und Regelwerke aufgeführt.

Änderungen in der 47. Auflage

In der vorliegenden Auflage sind die **Normen auf dem Stand Januar 2017**. Wegen neuer Normen und der technischen Entwicklung wurden folgende Inhalte aktualisiert, erweitert oder neu aufgenommen:

- Qualitätsmanagement und Umweltmanagement jeweils nach neuester Norm. Wegfall allgemeiner Begriffe aus dem Qualitätsmanagement.
- Einführung in die „Geometrische Produktspezifikation (GPS)“ für die Technische Kommunikation.
- Zusätzliche Werkzeuge und teilweise aktualisierte Richtwerte bei der spanenden Fertigung.
- Ergänzungen in der Kostenrechnung.
- Darstellung der Strukturierungsprinzipien und Referenzkennzeichnung in Schaltplänen nach ISO 1219 bzw. DIN EN 81346.

Autoren und Verlag sind auch weiterhin allen Nutzern des Tabellenbuches für Hinweise und Verbesserungsvorschläge an lektorat@europa-lehrmittel.de dankbar.

1 Technische Mathematik

9 ... 28

M

2 Technische Physik

29 ... 56

P

3 Technische Kommunikation

57 ... 118

K

4 Werkstofftechnik

119 ... 206

W

5 Maschinenelemente

207 ... 276

M

6 Fertigungstechnik

277 ... 418

F

7 Automatisierungstechnik

419 ... 460

A

Inhaltsverzeichnis

1 Technische Mathematik (M)

9

1.1 Einheiten im Messwesen

SI-Basisgrößen und Einheiten	10
Abgeleitete Größen und Einheiten . . .	10
Einheiten außerhalb des SI	12

1.2 Formeln

Formelzeichen, mathem. Zeichen . . .	13
Formeln, Gleichungen, Diagramme . .	14
Umstellen von Formeln	15
Größen und Einheiten	16
Rechnen mit Größen	17
Prozent- und Zinsrechnung	17

1.3 Winkel und Dreiecke

Winkelarten, Satz des Pythagoras . .	18
Funktionen im Dreieck	19

1.4 Längen

Teilung von Längen	20
Gestreckte Längen	21
Rohlängen	21

1.5 Flächen

Eckige Flächen	22
Dreieck, Vielecke, Kreis	23
Kreisausschnitt, -abschnitt, -ring . . .	24
Ellipse	24

1.6 Volumen und Oberfläche

Würfel, Zylinder, Pyramide	25
Kegel, Kegelstumpf, Kugel	26
Zusammengesetzte Körper	27

1.7 Masse

Allgemeine Berechnung	27
Längenbezogene Masse	27
Flächenbezogene Masse	27

1.8 Schwerpunkte

Linien Schwerpunkte	28
Flächenschwerpunkte	28

2 Technische Physik (P)

29

2.1 Bewegungen

Konstante Bewegungen	30
Beschleunigte Bewegungen	30
Geschwindigkeiten an Maschinen . .	31

2.2 Kräfte

Zusammensetzen und Zerlegen . . .	32
Kräftearten	34
Drehmoment	35

2.3 Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad

Mechanische Arbeit	35
Einfache Maschinen	36
Energie	36
Leistung und Wirkungsgrad	37

2.4 Reibung

Reibungskraft, Reibungszahlen . . .	38
Rollreibungszahlen	38

2.5 Druck in Flüssigkeiten und Gasen

Druck	39
Auftrieb	39
Hydraulische Kraftübersetzung . . .	39
Druckübersetzung	40
Durchflussgeschwindigkeit	40
Zustandsänderung bei Gasen	40

2.6 Festigkeitslehre

Belastungsfälle, Grenzspannungen . .	41
Statische Festigkeit	42
Elastizitätsmodul	42
Zug, Druck, Flächenpressung	43
Abscherung, Torsion, Biegung	44
Biegebelastung auf Bauteile	45
Widerstandsmomente	46
Knickung, Zus. Beanspruchung	47
Dynamische Festigkeit	48
Gestaltfestigkeit	49

2.7 Wärmetechnik

Temperaturen, Längenänderung . . .	51
Schwindung	51
Wärmemenge	51
Heizwerte	52

2.8 Elektrotechnik

Größen und Einheiten	53
Ohmsches Gesetz	53
Leiterwiderstand	53
Stromdichte	54
Schaltung von Widerständen	54
Stromarten	55
Elektrische Arbeit und Leistung . . .	56
Transformator	56

3 Technische Kommunikation (K)

57

3.1 Diagramme

Kartesisches Koordinatensystem . . .	58
Polarkoordinatensystem	59
Flächendiagramme	59

3.2 Geom. Grundkonstruktionen

Strecken, Lote, Winkel	60
Tangenten, Kreisbögen	61
Inkreis, Ellipse, Spirale	62
Zykloide, Evolvente, Hyperbel	63

3.3 Zeichnungselemente		3.7 Werkstückelemente	
Schriftzeichen	64	Butzen, Werkstückkanten	89
Normzahlen, Radien, Maßstäbe	65	Gewindeausläufe und -freistiche	90
Zeichenblätter	66	Gewinde, Schraubenverbindungen ..	91
Stücklisten, Positionsnummern	67	Zentrierbohrungen, Rändel	92
Linienarten	68	Freistiche	93
3.4 Darstellung		3.8 Schweißen und Löten	
Projektionsmethoden	70	Sinnbilder	94
Ansichten	72	Bemaßungsbeispiele	96
Schnittdarstellung	74	3.9 Oberflächen	
Schraffuren	76	Härteangaben in Zeichnungen	98
3.5 Maßeintragung		Gestaltabweichungen, Rauheit	99
Maßlinien, Maßzahlen	77	Oberflächenprüfung, -angaben	100
Bemaßungsregeln	78	Erreichbare Rauheit	102
Zeichnungselemente	79	Verzahnungsqualität	103
Toleranzangaben	81	3.10 Toleranzen, Passungen	
Maßarten	82	Grundlagen	104
Zeichnungsvereinfachung	84	ISO-Passungen	106
3.6 Maschinenelemente		Allgemeintoleranzen	112
Zahnräder	85	Wälzlagerpassungen	112
Wälzlager	86	Passungsempfehlungen, -auswahl ..	113
Dichtungen	87	Geometrische Produktspezifikation ..	114
Sicherungsringe, Federn	88	Geometrische Tolerierung	116

4 Werkstofftechnik (W)

119

4.1 Stoffe		4.6 Gusseisen-Werkstoffe	
Stoffwerte	120	Bezeichnung, Werkstoffnummern ..	167
Periodisches System der Elemente ..	122	Gusseisenarten	168
Chemikalien der Metalltechnik	123	4.7 Gießereitechnik	171
4.2 Bezeichnungssystem der Stähle		4.8 Leichtmetalle	
Definition und Einteilung	124	Übersicht Al-Legierungen	173
Normung von Stahlprodukten	125	Aluminium-Knetlegierungen	175
Werkstoffnummern	126	Aluminium-Gusslegierungen	177
Bezeichnungssystem	127	Aluminium-Profile	178
4.3 Stahlsorten		Magnesium- u. Titanlegierungen ..	181
Erzeugnisse aus Stahl, Übersicht ..	131	4.9 Schwermetalle	
Stähle, Übersicht	132	Bezeichnungssystem	183
Baustähle	134	Kupfer-Legierungen	184
Einsatzstähle	137	4.10 Sonstige Werkstoffe	186
Vergütungsstähle	138	4.11 Kunststoffe	
Werkzeugstähle	140	Übersicht	188
Nichtrostende Stähle	141	Duroplaste	191
Federstähle	143	Thermoplaste	192
Stähle für Blankstahlerzeugnisse ..	144	Elastomere, Schaumstoffe	195
4.4 Stahl-Fertigerzeugnisse		Kunststoffverarbeitung	196
Bleche, Bänder, Rohre	146	Polyblends, Schichtpressstoffe	197
Profile	150	Kunststoffprüfung	198
Längen- u. flächenbezogene Masse ..	159	4.12 Werkstoffprüfung	
4.5 Wärmebehandlung		Übersicht	199
Kristallgitter, Legierungssysteme ..	160	Zugversuch	201
Eisen-Kohlenstoff-Diagramm	161	Kerbbschlag-, Umlaufbiegeversuch ..	202
Wärmebehandlung der Stähle	162	Härteprüfung	203
		4.13 Korrosion, Korrosionsschutz	206

5 Maschinenelemente (M)**207**

5.1 Gewinde		5.5 Scheiben	
Gewindearten, Übersicht	208	Bauarten, Übersicht	239
Ausländische Gewinde-Normen	209	Flache Scheiben	240
Metrisches ISO-Gewinde	210	Sonstige Scheiben	241
Sonstige Gewinde	211	5.6 Stifte und Bolzen	
Gewindetoleranzen	213	Bauarten, Übersicht	242
5.2 Schrauben		Zylinderstifte, Spannstifte	243
Schraubenarten, Übersicht	214	Kerbstifte, Bolzen	244
Bezeichnung	215	5.7 Welle-Nabe-Verbindungen	
Festigkeit	216	Verbindung, Übersicht	245
Sechskantschrauben	217	Keile	246
Zylinderschrauben	220	Passfedern, Scheibenfedern	247
Sonstige Schrauben	221	Werkzeugkegel	248
Berechnung von Schrauben	226	5.8 Sonstige Maschinenelemente	
Schraubensicherungen, Übersicht . .	228	Federn	249
Schraubenantriebe	229	Gewindestifte, Druckstücke,	
5.3 Senkungen		Kugelköpfe	252
Senkungen für Senkschrauben	230	Griffe, Aufnahmen	253
Senkungen für Zylinderschrauben . .	231	Schnellspann-Bohrvorrichtung	255
5.4 Muttern		5.9 Antriebselemente	
Mutternarten, Übersicht	232	Riemen	257
Bezeichnung	233	Stirnräder, Maße	260
Festigkeit	234	Kegel- u. Schneckenräder, Maße . .	262
Sechskantmutter	235	Übersetzungen	263
Sonstige Muttern	236	5.10 Lager	
		Gleitlager	264
		Wälzlager	266
		Schmieröle und Schmierfette	275

6 Fertigungstechnik (F)**277**

6.1 Messtechnik		Werkzeug-Aufnahmen	311
Prüfmittel	278	Kühlschmierung	312
Messergebnis	279	Drehen	314
6.2 Qualitätsmanagement		Fräsen	326
Normen, Begriffe	280	Bohren, Senken, Reiben	337
Qualitätsplanung, Qualitätsprüfung . .	282	Schleifen	343
Statistische Auswertung	283	Honen	348
Qualitätsfähigkeit	285	CNC-Technik, Null- u. Bezugspunkte	349
Statistische Prozesslenkung	286	Werkzeug-/Bahnkorrekturen	350
6.3 Maschinenrichtlinie	289	CNC-Fertigung nach DIN	351
6.4 Produktionsorganisation		CNC-Drehen nach PAL	354
Erzeugnisgliederung	291	CNC-Fräsen nach PAL	360
Arbeitsplanung	293	6.7 Abtragen	
Kalkulation	297	Drahterodieren, Senkerodieren	369
6.5 Instandhaltung		Einflüsse auf das Verfahren	370
Wartung, Instandsetzung	300	6.8 Trennen durch Schneiden	
Instandhaltungskonzepte	301	Schneidkraft, Pressen	371
Dokumentationssystem	303	Schneidwerkzeug	372
6.6 Spanende Fertigung		Werkzeug- und Werkstückmaße	374
Zeitspannungsvolumen	304	Streifenausnutzung	375
Kräfte beim Spanen	305	6.9 Umformen	
Drehzahldiagramm	306	Biegen: Werkzeug, Verfahren	376
Schneidstoffe	308	Biegeradien, Zuschnitt	378
Wendeschneidplatten	310	Tiefziehen: Werkzeug, Verfahren	380
		Zuschnittdurchmesser, Ziehspalt . . .	382

6.10 Spritzgießen	
Spritzgießwerkzeug	384
Schwindung, Kühlung, Dosierung . .	387
6.11 Fügen	
Schweißverfahren, Übersicht	389
Nahtvorbereitung	391
Schutzgasschweißen	392
Lichtbogenschweißen	394
Strahlschneiden	396
Kennzeichnung von Gasflaschen . . .	398
Löten	400
Kleben	403
6.12 Arbeits- und Umweltschutz	
Gefahren am Arbeitsplatz	405
Gefahrstoffverordnung	406
Warn-, Gebots-, Hinweiszeichen . . .	414
Kennzeichnung von Rohrleitungen .	417
Schall und Lärm	418

7 Automatisierungstechnik (A)

419

7.1 Pneumatik, Hydraulik	
Schaltzeichen, Wegeventile	420
Proportionalventile	422
Schaltpläne, Kennzeichnungssysteme	423
Pneumatische Steuerung	427
Pneumatikzylinder	428
Hydraulik-, Pneumatikzylinder, -pumpen	429
Rohre	431
7.2 Grafcet	
Grundstruktur	432
Schritte, Transitionen	433
Aktionen	434
Verzweigung	436
7.3 Elektropneumatik, Elektrohdraulik	
Schaltzeichen	438
Stromlaufpläne, Kennzeichnung . . .	439
Sensoren	441
Elektropneumatische Steuerung . . .	442
7.4 SPS-Steuerungen	
SPS-Programmiersprachen	443
Binäre Verknüpfungen	447
Ablaufsteuerungen	448
7.5 Regelungstechnik	
Grundbegriffe, Kennbuchstaben . . .	450
Bildzeichen	451
Regler	452
7.6 Handhabungs-, Robotertechnik	
Koordinatensysteme, Achsen	454
Aufbau von Robotern	455
Greifer, Arbeitssicherheit	456
7.7 Motoren und Antriebe	
Schutzmaßnahmen, Schutzarten . . .	457
Elektromotoren, Anschlüsse, Berechnung	460

Normenverzeichnis

461 ... 465

Sachwortverzeichnis

466 ... 487

Normen und andere Regelwerke

Normung und Normbegriffe

Normung ist eine planmäßig durchgeführte Vereinheitlichung von materiellen und nichtmateriellen Gegenständen, wie z. B. Bauteilen, Berechnungsverfahren, Prozessabläufen und Dienstleistungen, zum Nutzen der Allgemeinheit.

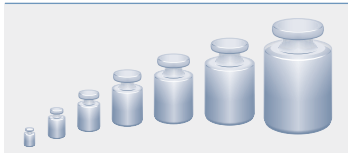
Normbegriff	Beispiel	Erklärung
Norm	DIN 509	Eine Norm ist das veröffentlichte Ergebnis der Normungsarbeit. Beispiel: DIN 509 mit Formen und Maßen von Freistichen bei Drehteilen und Bohrungen.
Teil	DIN 30910-2	Normen können aus mehreren in Zusammenhang stehenden Teilen bestehen. Die Teilnummern werden mit Bindestrich an die Norm-Nummer angehängt. DIN 30910-2 beschreibt z. B. Sinterwerkstoffe für Filter, während die Teile 3 und 4 Sinterwerkstoffe für Lager und Formteile beschreiben.
Beiblatt	DIN 743 Bbl 1	Ein Beiblatt enthält Informationen zu einer Norm, jedoch keine zusätzlichen Festlegungen. Das Beiblatt DIN 743 Bbl 1 enthält z. B. Anwendungsbeispiele zu den in DIN 743 beschriebenen Tragfähigkeitsberechnungen von Wellen und Achsen.
Entwurf	E DIN EN 10027-2 (2013-09)	Normentwürfe werden zur Einsicht und Stellungnahme veröffentlicht. Die Neufassung DIN EN 10027-2 (2015-07) mit Werkstoffnummern für Stähle lag der Öffentlichkeit z. B. von September 2013 bis Februar 2014 für Einsprüche als Entwurf vor.
Vornorm	DIN V 45696-1 (2006-02)	Eine Vornorm ist das Ergebnis einer Normungsarbeit, das wegen Vorbehalten nicht als Norm herausgegeben wird. DIN V 45696-1 enthält z. B. technische Maßnahmen bei der Gestaltung von Maschinen, die Ganzkörper-Schwingungen auf den Menschen übertragen.
Ausgabedatum	DIN 76-1 (2004-06)	Zeitpunkt des Erscheinens, welcher im DIN-Anzeiger veröffentlicht wird und mit dem die Norm Gültigkeit bekommt. Die DIN 76-1, welche Freistiche für metrische ISO-Gewinde festlegt, ist z. B. seit Juni 2004 gültig.

Normenarten und Regelwerke (Auswahl)

Art	Kurzzeichen	Erklärung	Zweck und Inhalte
Internationale Normen (ISO-Normen)	ISO	International Organisation for Standardization, Genf (O und S werden in der Abkürzung vertauscht)	Den internationalen Austausch von Gütern und Dienstleistungen sowie die Zusammenarbeit auf wissenschaftlichem, technischem und ökonomischem Gebiet erleichtern.
Europäische Normen (EN-Normen)	EN	Europäische Normungsorganisation CEN (Communauté Européenne de Normalisation), Brüssel	Technische Harmonisierung und damit verbundener Abbau von Handelshemmnissen zur Förderung des Binnenmarktes und des Zusammenwachsens von Europa.
Deutsche Normen (DIN-Normen)	DIN	Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin	Die nationale Normungsarbeit dient der Rationalisierung, der Qualitätssicherung, der Sicherheit, dem Umweltschutz und der Verständigung in Wirtschaft, Technik, Wissenschaft, Verwaltung und Öffentlichkeit.
	DIN EN	Deutsche Umsetzung einer europäischen Norm	
	DIN ISO	Deutsche Norm, deren Inhalt unverändert von einer ISO-Norm übernommen wurde.	
	DIN EN ISO	Norm, die von ISO und CEN veröffentlicht wurde, und deren deutsche Fassung als DIN-Norm Gültigkeit hat.	
	DIN VDE	Druckschrift des VDE, die den Status einer deutschen Norm hat.	
VDI-Richtlinien	VDI	Verein Deutscher Ingenieure e.V., Düsseldorf	Diese Richtlinien geben den aktuellen Stand der Technik zu bestimmten Themenbereichen wieder und enthalten z. B. konkrete Handlungsanleitungen zur Durchführung von Berechnungen oder zur Gestaltung von Prozessen im Maschinenbau bzw. in der Elektrotechnik.
VDE-Druckschriften	VDE	Verband der Elektrotechnik Elektronik Informationstechnik e.V., Frankfurt am Main	
DGQ-Schriften	DGQ	Deutsche Gesellschaft für Qualität e.V., Frankfurt am Main	Empfehlungen für den Bereich der Qualitätstechnik.
REFA-Blätter	REFA	Verband für Arbeitsstudien REFA e.V., Darmstadt	Empfehlungen für den Bereich der Fertigung und Arbeitsplanung.



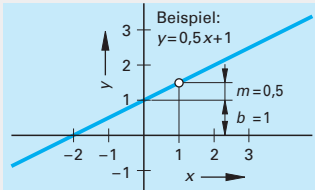
1 Technische Mathematik



1.1 Einheiten im Messwesen

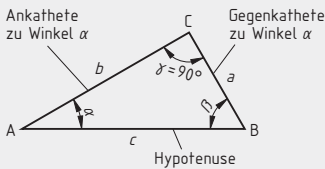
SI-Basisgrößen und Einheiten	10
Abgeleitete Größen und Einheiten	10
Einheiten außerhalb des SI	12

M



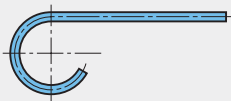
1.2 Formeln

Formelzeichen, mathematische Zeichen	13
Formeln, Gleichungen, Diagramme	14
Umstellen von Formeln	15
Größen und Einheiten	16
Rechnen mit Größen	17
Prozent- und Zinsrechnung	17



1.3 Winkel und Dreiecke

Winkelarten, Satz des Pythagoras	18
Strahlensatz	18
Funktionen im Dreieck	19
Funktionen im rechtwinkligen Dreieck	19
Funktionen im schiefwinkligen Dreieck	19



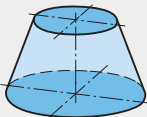
1.4 Längen

Teilung von Längen	20
Bogenlänge	20
Gestreckte Längen	21
Federdrahtlänge	21
Rohlänge	21



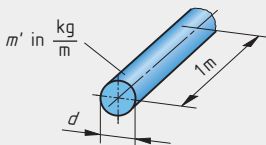
1.5 Flächen

Eckige Flächen	22
Dreieck, Vielecke, Kreis	23
Kreisausschnitt, Kreisabschnitt, Kreisring	24
Ellipse	24



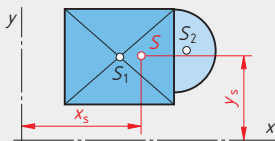
1.6 Volumen und Oberfläche

Würfel, Zylinder, Pyramide	25
Kegel, Kegelstumpf, Kugel	26
Zusammengesetzte Körper	27



1.7 Masse

Allgemeine Berechnung	27
Längenbezogene Masse	27
Flächenbezogene Masse	27



1.8 Schwerpunkte

Linien Schwerpunkte	28
Flächenschwerpunkte	28

Einheiten im Messwesen

SI ¹⁾ -Basisgrößen und Basiseinheiten							
vgl. DIN 1301-1 (2010-10), -2 (1978-02), -3 (1979-10)							
Basisgröße	Länge	Masse	Zeit	Elektrische Stromstärke	Thermodynamische Temperatur	Stoffmenge	Lichtstärke
Basis-einheit	Meter	Kilogramm	Sekunde	Ampere	Kelvin	Mol	Candela
Einheitenzeichen	m	kg	s	A	K	mol	cd

1) Die Einheiten im Messwesen sind im Internationalen Einheitensystem (SI = *S*ystème *I*nternational d’*U*nités) festgelegt. Es baut auf den sieben Basiseinheiten (SI-Einheiten) auf, von denen weitere Einheiten abgeleitet sind.

Basisgrößen, abgeleitete Größen und ihre Einheiten						
Größe	Formelzeichen	Einheit Name	Zeichen	Beziehung		Bemerkung Anwendungsbeispiele
Länge, Fläche, Volumen, Winkel						
Länge	<i>l</i>	Meter	m	1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm 1 mm = 1000 µm 1 km = 1000 m	1 inch = 1 Zoll = 25,4 mm In der Luft- und Seefahrt gilt: 1 internationale Seemeile = 1852 m	
Fläche	<i>A, S</i>	Quadratmeter Ar Hektar	m ² a ha	1 m ² = 10 000 cm ² = 1 000 000 mm ² 1 a = 100 m ² 1 ha = 100 a = 10 000 m ² 100 ha = 1 km ²	Zeichen <i>S</i> nur für Querschnittsflächen Ar und Hektar nur für Flächen von Grundstücken	
Volumen	<i>V</i>	Kubikmeter Liter	m ³ l, L	1 m ³ = 1000 dm ³ = 1 000 000 cm ³ 1 l = 1 L = 1 dm ³ = 10 dl = 0,001 m ³ 1 ml = 1 cm ³	Meist für Flüssigkeiten und Gase	
ebener Winkel (Winkel)	<i>α, β, γ ...</i>	Radian Grad Minute Sekunde	rad ° ' "	1 rad = 1 m/m = 57,2957...° = 180°/π 1° = $\frac{\pi}{180}$ rad = 60' 1' = 1°/60 = 60" 1" = 1'/60 = 1°/3600	1 rad ist der Winkel, der aus einem um den Scheitelpunkt geschlagenen Kreis mit 1 m Radius einen Bogen von 1 m Länge schneidet. Bei technischen Berechnungen statt <i>α</i> = 33° 17' 27,6" besser <i>α</i> = 33,291° verwenden.	
Raumwinkel	<i>Ω</i>	Steradian	sr	1 sr = 1 m ² /m ²	Der Raumwinkel von 1 sr umschließt auf der Oberfläche einer Kugel mit <i>r</i> = 1 m die Fläche eines Kugelabschnitts mit <i>A</i> ₀ = 1 m ² .	
Mechanik						
Masse	<i>m</i>	Kilogramm Gramm Megagramm Tonne	kg g Mg t	1 kg = 1000 g 1 g = 1000 mg 1 t = 1000 kg = 1 Mg 0,2 g = 1 Kt	In der Alltagssprache bezeichnet man die Masse eines Körpers auch als Gewicht. Massenangabe für Edelsteine in Karat (Kt).	
längen-bezogene Masse	<i>m'</i>	Kilogramm pro Meter	kg/m	1 kg/m = 1 g/mm	Zur Berechnung der Masse von Stäben, Profilen, Rohren.	
flächen-bezogene Masse	<i>m''</i>	Kilogramm pro Meter hoch zwei	kg/m ²	1 kg/m ² = 0,1 g/cm ²	Zur Berechnung der Masse von Blechen.	
Dichte	<i>ρ</i>	Kilogramm pro Meter hoch drei	kg/m ³	1000 kg/m ³ = 1 t/m ³ = 1 kg/dm ³ = 1 g/cm ³ = 1 g/ml = 1 mg/mm ³	Dichte = Masse eines Stoffes pro Volumeneinheit Für homogene Körper ist die Dichte eine vom Ort unabhängige Größe.	

Einheiten im Messwesen

Größen und Einheiten (Fortsetzung)

Größe	Formelzeichen	Einheit Name	Zeichen	Beziehung	Bemerkung Anwendungsbeispiele
Mechanik					
Trägheitsmoment, Massenmoment 2. Grades	J	Kilogramm mal Meter hoch zwei	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Für homogenen Vollzylinder mit Masse m und Radius r gilt: $J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$	Das Trägheitsmoment gibt den Widerstand eines starren, homogenen Körpers gegen die Änderung seiner Rotationsbewegung um eine Drehachse an.
Kraft Gewichtskraft	F F_G, G	Newton mal Meter	N	$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{J}}{\text{m}}$ $1 \text{ MN} = 10^3 \text{ kN} = 1\,000\,000 \text{ N}$	Die Kraft 1 N bewirkt bei der Masse 1 kg in 1 s eine Geschwindigkeitsänderung von 1 m/s.
Drehmoment Biegemoment Torsionsmoment	M M_b M_{Tr}, T	Newton mal Meter	$\text{N} \cdot \text{m}$	$1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$	1 N · m ist das Moment, das eine Kraft von 1 N bei einem Hebelarm von 1 m bewirkt.
Impuls	p	Kilogramm mal Meter pro Sekunde	$\text{kg} \cdot \text{m/s}$	$1 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 1 \text{ N} \cdot \text{s}$	Der Impuls ist das Produkt aus Masse mal Geschwindigkeit. Er hat die Richtung der Geschwindigkeit.
Druck mechanische Spannung	p σ, τ	Pascal Newton pro Millimeter hoch zwei	Pa N/mm^2	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 0,01 \text{ mbar}$ $1 \text{ bar} = 100\,000 \text{ N/m}^2 = 10 \text{ N/cm}^2 = 10^5 \text{ Pa}$ $1 \text{ mbar} = 1 \text{ hPa}$ $1 \text{ N/mm}^2 = 10 \text{ bar} = 1 \text{ MN/m}^2 = 1 \text{ MPa}$ $1 \text{ daN/cm}^2 = 0,1 \text{ N/mm}^2$	Unter Druck versteht man die Kraft je Flächeneinheit. Für Überdruck wird das Formelzeichen p_e verwendet (DIN 1314). 1 bar = 14,5 psi (pounds per square inch = Pfund pro Quadratinch)
Flächenmoment 2. Grades	I	Meter hoch vier Zentimeter hoch vier	m^4 cm^4	$1 \text{ m}^4 = 100\,000\,000 \text{ cm}^4$	früher: Flächenträgheitsmoment
Energie, Arbeit, Wärmemenge	E, W	Joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ W} \cdot \text{s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$	Joule für jede Energieart, kW · h bevorzugt für elektrische Energie.
Leistung, Wärmestrom	P Φ	Watt	W	$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m/s} = 1 \text{ V} \cdot \text{A} = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg/s}^3$	Leistung beschreibt die Arbeit, die in einer bestimmten Zeit verrichtet wurde.
Zeit					
Zeit, Zeitspanne, Dauer	t	Sekunde Minute Stunde Tag Jahr	s min h d a	$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$ $1 \text{ d} = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$	3 h bedeutet eine Zeitspanne (3 Std.), 3 ^h bedeutet einen Zeitpunkt (3 Uhr). Werden Zeitpunkte in gemischter Form, z.B. 3 ^h 24 ^m 10 ^s geschrieben, so kann das Zeichen min auf m verkürzt werden.
Frequenz	f, ν	Hertz	Hz	$1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$	1 Hz $\approx$ 1 Schwingung in 1 Sekunde.
Drehzahl, Umdrehungsfrequenz	n	1 pro Sekunde 1 pro Minute	1/s 1/min	$1/\text{s} = 60/\text{min} = 60 \text{ min}^{-1}$ $1/\text{min} = 1 \text{ min}^{-1} = \frac{1}{60 \text{ s}}$	Die Anzahl der Umdrehungen pro Zeiteinheit ergibt die Drehzahl, auch Drehfrequenz genannt.
Geschwindigkeit	v	Meter pro Sekunde Meter pro Minute Kilometer pro Stunde	m/s m/min km/h	$1 \text{ m/s} = 60 \text{ m/min} = 3,6 \text{ km/h}$ $1 \text{ m/min} = \frac{1 \text{ m}}{60 \text{ s}}$ $1 \text{ km/h} = \frac{1 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}$	Geschwindigkeit bei der Seefahrt in Knoten (kn): 1 kn = 1,852 km/h mile per hour = 1 mile/h = 1 mph 1 mph = 1,60934 km/h
Winkelgeschwindigkeit	ω	1 pro Sekunde Radiant pro Sekunde	1/s rad/s	$\omega = 2 \pi \cdot n$	Bei einer Drehzahl von $n = 2/\text{s}$ beträgt die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 4 \pi/\text{s}$.
Beschleunigung	a, g	Meter pro Sekunde hoch zwei	m/s^2	$1 \text{ m/s}^2 = \frac{1 \text{ m/s}}{1 \text{ s}}$	Formelzeichen g nur für Fallbeschleunigung. $g = 9,81 \text{ m/s}^2 \approx 10 \text{ m/s}^2$

Einheiten im Messwesen

Größen und Einheiten (Fortsetzung)

Größe	Formelzeichen	Einheit Name	Zeichen	Beziehung	Bemerkung Anwendungsbeispiele
Elektrizität und Magnetismus					
Elektrische Stromstärke	I	Ampere	A		
Elektr. Spannung	U	Volt	V	$1 \text{ V} = 1 \text{ W}/1 \text{ A} = 1 \text{ J/C}$	Bewegte elektrische Ladung nennt man Strom. Die Spannung ist gleich der Potenzialdifferenz zweier Punkte im elektrischen Feld. Den Kehrwert des elektrischen Widerstands nennt man elektrischen Leitwert.
Elektr. Widerstand	R	Ohm	Ω	$1 \Omega = 1 \text{ V}/1 \text{ A}$	
Elektr. Leitwert	G	Siemens	S	$1 \text{ S} = 1 \text{ A}/1 \text{ V} = 1/\Omega$	
Spezifischer Widerstand	ϱ	Ohm mal Meter	$\Omega \cdot \text{m}$	$10^{-6} \Omega \cdot \text{m} = 1 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$	$\varrho = \frac{1}{\kappa} \text{ in } \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$
Leitfähigkeit	γ, κ	Siemens pro Meter	S/m		$\kappa = \frac{1}{\varrho} \text{ in } \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2}$
Frequenz	f	Hertz	Hz	$1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$ $1000 \text{ Hz} = 1 \text{ kHz}$	Frequenz öffentlicher Stromnetze: EU 50 Hz, USA 60 Hz
Elektr. Arbeit	W	Joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ W} \cdot \text{s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3,6 \text{ MJ}$ $1 \text{ W} \cdot \text{h} = 3,6 \text{ kJ}$	In der Atom- und Kernphysik wird die Einheit eV (Elektronenvolt) verwendet.
Phasenverschiebungswinkel	φ	–	–	für Wechselstrom gilt: $\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I}$	Winkel zwischen Strom und Spannung bei induktiver oder kapazitiver Belastung.
Elektr. Feldstärke	E	Volt pro Meter	V/m		$E = \frac{F}{Q}, C = \frac{Q}{U}, Q = I \cdot t$
Elektr. Ladung	Q	Coulomb	C	$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s}; 1 \text{ A} \cdot \text{h} = 3,6 \text{ kC}$	
Elektr. Kapazität	C	Farad	F	$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$	
Induktivität	L	Henry	H	$1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot \text{s/A}$	
Leistung Wirkleistung	P	Watt	W	$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m/s}$ $= 1 \text{ V} \cdot \text{A}$	In der elektrischen Energietechnik: Scheinleistung S in V · A

Thermodynamik und Wärmeübertragung

Größe	Formelzeichen	Einheit Name	Zeichen	Beziehung	Bemerkung Anwendungsbeispiele
Thermodynamische Temperatur	T, Θ	Kelvin	K	$0 \text{ K} = -273,15 \text{ }^\circ\text{C}$	Kelvin (K) und Grad Celsius ($^\circ\text{C}$) werden für Temperaturen und Temperaturdifferenzen verwendet. $t = T - T_0; T_0 = 273,15 \text{ K}$ Umrechnung in $^\circ\text{F}$: Seite 51
Celsius-Temperatur	t, ϑ	Grad Celsius	$^\circ\text{C}$	$0 \text{ }^\circ\text{C} = 273,15 \text{ K}$ $0 \text{ }^\circ\text{C} = 32 \text{ }^\circ\text{F}$ $0 \text{ }^\circ\text{F} = -17,77 \text{ }^\circ\text{C}$	
Wärmemenge	Q	Joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ W} \cdot \text{s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3600000 \text{ J} = 3,6 \text{ MJ}$	
Spezifischer Heizwert	H_u	Joule pro Kilogramm Joule pro Meter hoch drei	J/kg J/m ³	$1 \text{ MJ/kg} = 1000000 \text{ J/kg}$ $1 \text{ MJ/m}^3 = 1000000 \text{ J/m}^3$	

Einheiten außerhalb des Internationalen Einheitensystems SI

Länge	Fläche	Volumen	Masse	Energie, Leistung
1 inch (in) = 25,4 mm	1 sq.in = 6,452 cm ²	1 cu.in = 16,39 cm ³	1 oz = 28,35 g	1 PSh = 0,735 kW
1 foot (ft) = 0,3048 m	1 sq.ft = 9,29 dm ²	1 cu.ft = 28,32 dm ³	1 lb = 453,6 g	1 PS = 0,7355 kW
1 yard (yd) = 0,9144 m	1 sq.yd = 0,8361 m ²	1 cu.yd = 764,6 dm ³	1 t = 1000 kg	1 kcal = 4186,8 Ws
1 See-meile = 1,852 km	1 acre = 4046,856 m ²	1 gallon (US) = 3,785 l	1 short ton = 907,2 kg	1 kcal = 1,166 Wh
1 Land-meile = 1,6093 km	Druck, Spannung		1 Karat = 0,2 g	1 kpm/s = 9,807 W
	1 bar = 14,5 pound/in ²	1 gallon (UK) = 4,546 l	1 pound/in ³ = 27,68 g/cm ³	1 Btu = 1055 Ws
	1 N/mm ² = 145,038 pound/in ²	1 barrel = 158,8 l		1 hp = 745,7 W



Formelzeichen, mathematische Zeichen

Formelzeichen						vgl. DIN 1304-1 (1994-03)
Formelzeichen	Bedeutung	Formelzeichen	Bedeutung	Formelzeichen	Bedeutung	
Länge, Fläche, Volumen, Winkel						
l	Länge	r, R	Radius	α, β, γ	ebener Winkel	
b	Breite	d, D	Durchmesser	Ω	Raumwinkel	
h	Höhe	A, S	Fläche, Querschnittsfläche	λ	Wellenlänge	
s	Weglänge	V	Volumen			
Mechanik						
m	Masse	F	Kraft	G	Schubmodul	
m'	längenbezogene Masse	F_G, G	Gewichtskraft	μ, f	Reibungszahl	
m''	flächenbezogene Masse	M	Drehmoment	W	Widerstandsmonent	
ρ	Dichte	M_T, T	Torsionsmoment	I	Flächenmoment 2. Grades	
J	Trägheitsmoment	M_b	Biegemoment	W, E	Arbeit, Energie	
p	Druck	σ	Normalspannung	W_p, E_p	potenzielle Energie	
p_{abs}	absoluter Druck	τ	Schubspannung	W_k, E_k	kinetische Energie	
p_{amb}	Atmosphärendruck	ε	Dehnung	P	Leistung	
p_o	Überdruck	E	Elastizitätsmodul	η	Wirkungsgrad	
Zeit						
t	Zeit, Dauer	f, ν	Frequenz	a	Beschleunigung	
T	Periodendauer	ν, u	Geschwindigkeit	g	örtliche Fallbeschleunigung	
n	Umdrehungsfrequenz, Drehzahl	ω	Winkelgeschwindigkeit	α	Winkelbeschleunigung	
				$Q, \dot{V}, q_v$	Volumenstrom	
Elektrizität						
Q	Ladung, Elektrizitätsmenge	L	Induktivität	X	Blindwiderstand	
U	Spannung	R	Widerstand	Z	Scheinwiderstand	
C	Kapazität	ϱ	spezifischer Widerstand	φ	Phasenverschiebungswinkel	
I	Stromstärke	γ, κ	elektrische Leitfähigkeit	N	Windungszahl	
Wärme						
T, θ	thermodynamische Temperatur	Q	Wärme, Wärmemenge	$\Phi, \dot{Q}$	Wärmestrom	
$\Delta T, \Delta t, \Delta \theta$	Temperaturdifferenz	λ	Wärmeleitfähigkeit	a	Temperaturleitfähigkeit	
t, ϑ	Celsius-Temperatur	α	Wärmeübergangskoeffizient	c	spezifische Wärmekapazität	
α_t, α	Längenausdehnungskoeffizient	k	Wärmedurchgangskoeffizient	H_u	spezifischer Heizwert	
Licht, elektromagnetische Strahlung						
E_v	Beleuchtungsstärke	f	Brennweite	I_e	Strahlstärke	
		n	Brechzahl	Q_e, W	Strahlungsenergie	
Akustik						
p	Schalldruck	L_p	Schalldruckpegel	N	Lautheit	
c	Schallgeschwindigkeit	I	Schallintensität	L_N	Lautstärkepegel	
Mathematische Zeichen						vgl. DIN 1302 (1999-12)
Math. Zeichen	Sprechweise	Math. Zeichen	Sprechweise	Math. Zeichen	Sprechweise	
$\approx$	ungefähr gleich, rund, etwa	$\sim$	proportional	$\log$	Logarithmus (allgemein)	
$\hat{=}$	entspricht	a^x	a hoch x, x-te Potenz von a	$\lg$	dekadischer Logarithmus	
$\dots$	und so weiter	$\sqrt{\quad}$	Quadratwurzel aus	$\ln$	natürlicher Logarithmus	
∞	unendlich	$\sqrt[n]{\quad}$	n-te Wurzel aus	e	Eulersche Zahl ($e = 2,718281\dots$)	
$=$	gleich	$ x $	Betrag von x	$\sin$	Sinus	
$\neq$	ungleich	$\perp$	senkrecht zu	$\cos$	Kosinus	
$\stackrel{\text{def}}{=}$	ist definitionsgemäß gleich	$\parallel$	ist parallel zu	$\tan$	Tangens	
$<$	kleiner als	$\uparrow \uparrow$	gleichsinnig parallel	$\cot$	Kotangens	
$\leq$	kleiner oder gleich	$\uparrow \downarrow$	gegensinnig parallel	$(, [, \{$	runde, eckige, geschweifte	
$>$	größer als	$\sphericalangle$	Winkel		Klammer auf und zu	
$\geq$	größer oder gleich	$\triangle$	Dreieck	π	pi (Kreiszahl = 3,14159 ...)	
$+$	plus	$\equiv$	kongruent zu			
$-$	minus	Δx	Delta x	$\overline{AB}$	Strecke AB	
$\cdot$	mal, multipliziert mit		(Differenz zweier Werte)	$\overline{AB}$	Bogen AB	
$\div, /, :$	durch, geteilt durch, zu, pro	$\%$	Prozent, vom Hundert	a', a''	a Strich, a zwei Strich	
Σ	Summe	‰	Promille, vom Tausend	a_1, a_2	a eins, a zwei	

Formeln, Gleichungen, Diagramme

Formeln

Die Berechnung physikalischer Größen erfolgt meist über Formeln. Sie bestehen aus:

- Formelzeichen, z. B. v_c für die Schnittgeschwindigkeit, d für den Durchmesser, n für die Drehzahl
- Operatoren (Rechenvorschriften), z. B. $\cdot$ für Multiplikation, $+$ für Addition, $-$ für Subtraktion, $-$ (Bruchstrich) für Division
- Konstanten, z. B. π (pi) = 3,14159 ...
- Zahlen, z. B. 10, 15 ...

Die Formelzeichen (Seite 13) sind Platzhalter für Größen. Bei der Lösung von Aufgaben werden die bekannten Größen mit ihren Einheiten in die Formel eingesetzt. Vor oder während der Berechnung werden die Einheiten so umgeformt, dass

- der Rechengang möglich wird oder
- das Ergebnis die geforderte Einheit erhält.

Die meisten Größen und ihre Einheiten sind genormt (Seite 10).

Das **Ergebnis** ist immer ein **Zahlenwert** mit einer **Einheit**, z. B. 4,5 m, 15 s

Beispiel:

Wie groß ist die Schnittgeschwindigkeit v_c in m/min für $d = 200$ mm und $n = 630$ /min?

$$v_c = \pi \cdot d \cdot n = \pi \cdot 200 \text{ mm} \cdot 630 \frac{1}{\text{min}} = \pi \cdot 200 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{1000 \text{ mm}} \cdot 630 \frac{1}{\text{min}} = \mathbf{395,84 \frac{\text{m}}{\text{min}}}$$

Formel für die Schnittgeschwindigkeit

$$v_c = \pi \cdot d \cdot n$$

Zahlenwertgleichungen

Zahlenwertgleichungen sind Formeln, in welche die üblichen Umrechnungen von Einheiten bereits eingearbeitet sind. Bei ihrer Anwendung ist zu beachten:

Die Zahlenwerte der einzelnen Größen dürfen nur in der vorgeschriebenen Einheit verwendet werden.

- Die Einheiten werden bei der Berechnung nicht mitgeführt.
- Die Einheit der gesuchten Größe ist vorgegeben.

Beispiel:

Wie groß ist das Drehmoment M eines Elektromotors mit der Antriebsleistung $P = 15$ kW und der Drehzahl $n = 750$ /min?

$$M = \frac{9550 \cdot P}{n} = \frac{9550 \cdot 15}{750} \text{ N} \cdot \text{m} = \mathbf{191 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

Zahlenwertgleichung für das Drehmoment

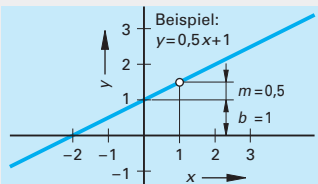
$$M = \frac{9550 \cdot P}{n}$$

vorgeschriebene Einheiten

Bezeichnung	Einheit
M Drehmoment	N · m
P Leistung	kW
n Drehzahl	1/min

Gleichungen und Diagramme

Bei Funktionsgleichungen ist y die Funktion von x , mit x als unabhängige und y als abhängige Variable. Die Zahlenpaare (x, y) einer Wertetabelle bilden ein Diagramm im x - y -Koordinatensystem.



1. Beispiel:

$$y = 0,5x + 1$$

x	-2	0	2	3
y	0	1	2	2,5

2. Beispiel:

Kostenfunktion und Erlösfunktion

$$K_G = 60 \text{ €/Stck} \cdot M + 200000 \text{ €}$$

$$E = 110 \text{ €/Stck} \cdot M$$

M	0	4000	6000
K_G	200000	440000	560000
E	0	440000	660000

- K_G Gesamtkosten $\rightarrow$ abhängige Variable
- M Menge $\rightarrow$ unabhängige Variable
- K_f Fixe Kosten $\rightarrow$ y -Koordinatenabschnitt
- K_v Variable Kosten $\rightarrow$ Steigung der Funktion
- E Erlös $\rightarrow$ abhängige Variable

Zuordnungsfunktion

$$y = f(x)$$

Lineare Funktion

$$y = m \cdot x + b$$

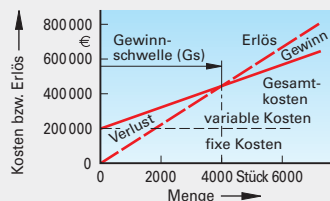
Beispiele:

Kostenfunktion

$$K_G = K_v \cdot M + K_f$$

Erlösfunktion

$$E = E/\text{Stück} \cdot M$$





Umstellen von Formeln

Umstellen von Formeln

Formeln und Zahlenwertgleichungen werden umgestellt, damit die gesuchte Größe allein auf der linken Seite der Gleichung steht. Dabei darf sich der Wert der linken und der rechten Formelseite nicht ändern. Für alle Schritte einer Formelumstellung gilt:

Veränderungen auf der
linken Formelseite

=

Veränderungen auf der
rechten Formelseite

Formel

$$P = \frac{F \cdot s}{t}$$

linke
Formel-
seite = rechte
Formel-
seite

Zur Rekonstruktion der einzelnen Schritte ist es sinnvoll, jeden Schritt rechts neben der Formel zu kennzeichnen:

$\cdot t$ → beide Formelseiten werden mit t multipliziert.

$: F$ → beide Formelseiten werden durch F dividiert.

Umstellung von Summen

Beispiel: Formel $L = l_1 + l_2$, Umstellung nach l_2

1 $L = l_1 + l_2$	$ - l_1$	l_1 subtrahieren	3 $L - l_1 = l_2$	Seiten vertauschen
2 $L - l_1 = l_1 + l_2 - l_1$		subtrahieren durchführen	4 $l_2 = L - l_1$	umgestellte Formel

Umstellung von Produkten

Beispiel: Formel $A = l \cdot b$, Umstellung nach l

1 $A = l \cdot b$	$:\ b$	dividieren durch b	3 $\frac{A}{b} = l$	Seiten vertauschen
2 $\frac{A}{b} = \frac{l \cdot b}{b}$		kürzen mit b	4 $l = \frac{A}{b}$	umgestellte Formel

Umstellung von Brüchen

Beispiel: Formel $n = \frac{l}{l_1 + s}$, Umstellung nach s

1 $n = \frac{l}{l_1 + s}$	$\cdot (l_1 + s)$	mit $(l_1 + s)$ multiplizieren	4 $n \cdot l_1 - n \cdot l_1 + n \cdot s = l - n \cdot l_1$	$ \ : n$ subtrahieren dividieren durch n
2 $n \cdot (l_1 + s) = \frac{l \cdot (l_1 + s)}{(l_1 + s)}$		rechte Formelseite kürzen Klammer auflösen	5 $\frac{s \cdot n}{n} = \frac{l - n \cdot l_1}{n}$	kürzen mit n
3 $n \cdot l_1 + n \cdot s = l$	$ - n \cdot l_1$	$- n \cdot l_1$ subtrahieren	6 $s = \frac{l - n \cdot l_1}{n}$	umgestellte Formel

Umstellung von Wurzeln

Beispiel: Formel $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, Umstellung nach a

1 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$(\)^2$	Formel quadrieren	4 $a^2 = c^2 - b^2$	$ \ \sqrt{\quad}$ radizieren
2 $c^2 = a^2 + b^2$	$ - b^2$	b^2 subtrahieren	5 $\sqrt{a^2} = \sqrt{c^2 - b^2}$	Ausdruck vereinfachen
3 $c^2 - b^2 = a^2 + b^2 - b^2$		subtrahieren, Seite tauschen	6 $a = \sqrt{c^2 - b^2}$	umgestellte Formel

Größen und Einheiten

Zahlenwerte und Einheiten

Physikalische Größe

10 mm

Zahlenwert Einheit

Physikalische Größen, z. B. 125 mm, bestehen aus einem

- Zahlenwert**, der durch Messung oder Berechnung ermittelt wird, und aus einer
- Einheit**, z. B. m, kg

Die Einheiten sind nach DIN 1301-1 genormt (Seite 10).

Sehr große oder sehr kleine Zahlenwerte lassen sich durch Vorsatzzeichen als dezi- male Vielfache oder Teile vereinfacht darstellen, z. B. 0,004 mm = 4 µm.

Dezimale Vielfache oder Teile von Einheiten

vgl. DIN 1301-2 (1978-02)

Vorsatz- Zeichen	Name	Zehner- potenz	Mathematische Bezeichnung	Beispiele
T	Tera	10 ¹²	Billion	12 000 000 000 000 N = 12 · 10 ¹² N = 12 TN (Tera-Newton)
G	Giga	10 ⁹	Milliarde	45 000 000 000 W = 45 · 10 ⁹ W = 45 GW (Giga-Watt)
M	Mega	10 ⁶	Million	8 500 000 V = 8,5 · 10 ⁶ V = 8,5 MV (Mega-Volt)
k	Kilo	10 ³	Tausend	12 600 W = 12,6 · 10 ³ W = 12,6 kW (Kilo-Watt)
h	Hekto	10 ²	Hundert	500 l = 5 · 10 ² l = 5 hl (Hekto-Liter)
da	Deka	10 ¹	Zehn	32 m = 3,2 · 10 ¹ m = 3,2 dam (Deka-Meter)
–	–	10 ⁰	Eins	1,5 m = 1,5 · 10 ⁰ m
d	Dezi	10 ⁻¹	Zehntel	0,5 l = 5 · 10 ⁻¹ l = 5 dl (Dezi-Liter)
c	Zenti	10 ⁻²	Hundertstel	0,25 m = 25 · 10 ⁻² m = 25 cm (Zenti-Meter)
m	Milli	10 ⁻³	Tausendstel	0,375 A = 375 · 10 ⁻³ A = 375 mA (Milli-Ampere)
µ	Mikro	10 ⁻⁶	Millionstel	0,000 052 m = 52 · 10 ⁻⁶ m = 52 µm (Mikro-Meter)
n	Nano	10 ⁻⁹	Milliardstel	0,000 000 075 m = 75 · 10 ⁻⁹ m = 75 nm (Nano-Meter)
p	Piko	10 ⁻¹²	Billionstel	0,000 000 000 006 F = 6 · 10 ⁻¹² F = 6 pF (Pico-Farad)

Umrechnung von Einheiten

Berechnungen mit physikalischen Größen sind nur dann möglich, wenn sich ihre Einheiten jeweils auf eine Basis beziehen. Bei der Lösung von Aufgaben müssen Einheiten häufig auf Basiseinheiten umgerechnet werden, z. B. mm in m, h in s, mm² in m². Dies geschieht durch Umrechnungsfaktoren, die den Wert 1 (kohärente Einheiten) darstellen.

Umrechnungsfaktoren für Einheiten (Auszug)

Größe	Umrechnungsfaktoren, z. B.	Größe	Umrechnungsfaktoren, z. B.
Längen	$1 = \frac{10\text{ mm}}{1\text{ cm}} = \frac{1000\text{ mm}}{1\text{ m}} = \frac{1\text{ m}}{1000\text{ mm}} = \frac{1\text{ km}}{1000\text{ m}}$	Zeit	$1 = \frac{60\text{ min}}{1\text{ h}} = \frac{3600\text{ s}}{1\text{ h}} = \frac{60\text{ s}}{1\text{ min}} = \frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}$
Flächen	$1 = \frac{100\text{ mm}^2}{1\text{ cm}^2} = \frac{100\text{ cm}^2}{1\text{ dm}^2} = \frac{1\text{ cm}^2}{100\text{ mm}^2} = \frac{1\text{ dm}^2}{100\text{ cm}^2}$	Winkel	$1 = \frac{60'}{1^\circ} = \frac{60''}{1'} = \frac{3600''}{1^\circ} = \frac{1^\circ}{60\text{ s}}$
Volumen	$1 = \frac{1000\text{ mm}^3}{1\text{ cm}^3} = \frac{1000\text{ cm}^3}{1\text{ dm}^3} = \frac{1\text{ cm}^3}{1000\text{ mm}^3} = \frac{1\text{ dm}^3}{1000\text{ cm}^3}$	Zoll	$1\text{ inch} = 25,4\text{ mm}; 1\text{ mm} = \frac{1}{25,4}\text{ inch}$

1. Beispiel:

Das Volumen $V = 3416\text{ mm}^3$ ist in cm^3 umzurechnen.

Das Volumen V wird mit dem Umrechnungsfaktor multipliziert, der im Zähler die Einheit cm^3 und im Nenner die Einheit mm^3 aufweist.

$V = 3416\text{ mm}^3 = \frac{1\text{ cm}^3 \cdot 3416\text{ mm}^3}{1000\text{ mm}^3} = \frac{3416\text{ cm}^3}{1000} = \mathbf{3,416\text{ cm}^3}$

2. Beispiel:

Die Winkelangabe $\alpha = 42^\circ 16'$ ist in Grad ($^\circ$) auszudrücken.

Der Teilwinkel $16'$ muss in Grad ($^\circ$) umgewandelt werden. Er wird mit dem Umrechnungsfaktor multipliziert, der im Zähler die Einheit Grad ($^\circ$) und im Nenner die Einheit Minute ($'$) hat.

$\alpha = 42^\circ + 16' \cdot \frac{1^\circ}{60} = 42^\circ + \frac{16 \cdot 1^\circ}{60} = 42^\circ + 0,267^\circ = \mathbf{42,267^\circ}$



Rechnen mit Größen, Prozentrechnung, Zinsrechnung

Rechnen mit Größen

Physikalische Größen werden mathematisch behandelt wie Produkte.

• Addition und Subtraktion

Bei gleichen Einheiten werden die Zahlenwerte addiert und die Einheit im Ergebnis übernommen.

Beispiel:

$$L = l_1 + l_2 - l_3 \text{ mit } l_1 = 124 \text{ mm, } l_2 = 18 \text{ mm, } l_3 = 44 \text{ mm; } L = ?$$

$$L = 124 \text{ mm} + 18 \text{ mm} - 44 \text{ mm} = (124 + 18 - 44) \text{ mm} = \mathbf{98 \text{ mm}}$$

• Multiplikation und Division

Die Zahlenwerte und die Einheiten entsprechen den Faktoren von Produkten.

Beispiel:

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2 \text{ mit } F_1 = 180 \text{ N, } l_1 = 75 \text{ mm, } l_2 = 105 \text{ mm; } F_2 = ?$$

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot l_1}{l_2} = \frac{180 \text{ N} \cdot 75 \text{ mm}}{105 \text{ mm}} = 128,57 \frac{\text{N} \cdot \text{mm}}{\text{mm}} = \mathbf{128,57 \text{ N}}$$

• Multiplizieren und Dividieren von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert bzw. dividiert, indem die Exponenten addiert bzw. subtrahiert werden.

Beispiel:

$$W = \frac{A \cdot a^2}{e} \text{ mit } A = 15 \text{ cm}^2, a = 7,5 \text{ cm, } e = 2,4 \text{ cm; } W = ?$$

$$W = \frac{15 \text{ cm}^2 \cdot (7,5 \text{ cm})^2}{2,4 \text{ cm}} = \frac{15 \cdot 56,25 \text{ cm}^{2+2}}{2,4 \text{ cm}} = 351,56 \text{ cm}^{4-1} = \mathbf{351,56 \text{ cm}^3}$$

Regeln beim Potenzieren

a Basis
 $m, n \dots$ Exponenten

Multiplikation von Potenzen

$$a^2 \cdot a^3 = a^{2+3}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Division von Potenzen

$$\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Sonderformen

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

Prozentrechnung

Der **Prozentsatz** gibt den Teil des Grundwertes in Hundertstel an.

Der **Grundwert** ist der Wert, von dem die Prozente zu rechnen sind.

Der **Prozentwert** ist der Betrag, den die Prozente des Grundwertes ergeben.

P_s Prozentsatz, Prozent P_w Prozentwert G_w Grundwert

Beispiel:

Werkstückrohteilgewicht 250 kg (Grundwert); Abbrand 2 % (Prozentsatz)
Abbrand in kg = ? (Prozentwert)

$$P_w = \frac{G_w \cdot P_s}{100\%} = \frac{250 \text{ kg} \cdot 2\%}{100\%} = \mathbf{5 \text{ kg}}$$

Prozentwert

$$P_w = \frac{G_w \cdot P_s}{100\%}$$

Zinsrechnung

K_0 Anfangskapital Z Zinsen t Laufzeit in Tagen,
 K_t Endkapital p Zinssatz pro Jahr Verzinsungszeit

Zins

$$Z = \frac{K_0 \cdot p \cdot t}{100\% \cdot 360}$$

1. Beispiel:

$$K_0 = 2800,00 \text{ €; } p = 6\frac{\%}{a}; t = \frac{1}{2} a; Z = ?$$

$$Z = \frac{2800,00 \text{ €} \cdot 6\frac{\%}{a} \cdot 0,5 a}{100\%} = \mathbf{84,00 \text{ €}}$$

2. Beispiel:

$$K_0 = 4800,00 \text{ €; } p = 5,1\frac{\%}{a}; t = 50 \text{ d; } Z = ?$$

$$Z = \frac{4800,00 \text{ €} \cdot 5,1\frac{\%}{a} \cdot 50 \text{ d}}{100\% \cdot 360 \frac{d}{a}} = \mathbf{34,00 \text{ €}}$$

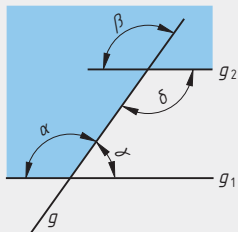
1 Zinsjahr (1 a) = 360 Tage (360 d)

360 d = 12 Monate

1 Zinsmonat = 30 Tage

Winkelarten, Strahlensatz, Winkel im Dreieck, Satz des Pythagoras

Winkelarten



- g Gerade
 g_1, g_2 parallele Geraden
 α, β Stufenwinkel
 β, δ Scheitelwinkel
 α, δ Wechselwinkel
 α, γ Nebenwinkel

Werden zwei Parallelen durch eine Gerade geschnitten, so bestehen unter den dabei gebildeten Winkeln geometrische Beziehungen.

Stufenwinkel

$$\alpha = \beta$$

Scheitelwinkel

$$\beta = \delta$$

Wechselwinkel

$$\alpha = \delta$$

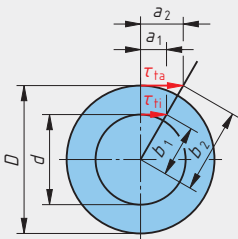
Nebenwinkel

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

Strahlensatz

τ_{ta} Torsionsspannung außen

τ_{ti} Torsionsspannung innen



Werden zwei Geraden durch zwei Parallelen geschnitten, so bilden die zugehörigen Strahlenabschnitte gleiche Verhältnisse.

Beispiel:

$$D = 40 \text{ mm}, d = 30 \text{ mm},$$

$$\tau_{ta} = 135 \text{ N/mm}^2; \tau_{ti} = ?$$

$$\frac{\tau_{ti}}{\tau_{ta}} = \frac{d}{D} \Rightarrow \tau_{ti} = \frac{\tau_{ta} \cdot d}{D}$$

$$= \frac{135 \text{ N/mm}^2 \cdot 30 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 101,25 \text{ N/mm}^2$$

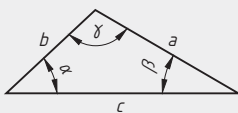
Strahlensatz

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{d}{2}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

$$\frac{b_1}{d} = \frac{b_2}{D}$$

Winkelsumme im Dreieck



a, b, c Dreiecksseiten

α, β, γ Winkel im Dreieck

Beispiel:

$$\alpha = 21^\circ, \beta = 95^\circ, \gamma = ?$$

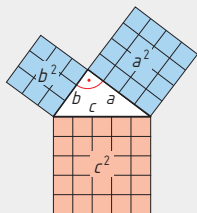
$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 21^\circ - 95^\circ = 64^\circ$$

Winkelsumme im Dreieck

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

In jedem Dreieck ist die Winkelsumme 180° .

Lehrsatz des Pythagoras



Im **rechtwinkligen Dreieck** ist das Hypotenusenquadrat flächengleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.

a Kathete

b Kathete

c Hypotenuse

1. Beispiel:

$$c = 35 \text{ mm}; a = 21 \text{ mm}; b = ?$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(35 \text{ mm})^2 - (21 \text{ mm})^2} = 28 \text{ mm}$$

2. Beispiel:

$$\text{CNC-Programm mit } R = 50 \text{ mm und } l = 25 \text{ mm.}$$

$$K = ?$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$R^2 = l^2 + K^2$$

$$K = \sqrt{R^2 - l^2} = \sqrt{50^2 \text{ mm}^2 - 25^2 \text{ mm}^2}$$

$$K = 43,3 \text{ mm}$$

Quadrat über der Hypotenuse

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Länge der Hypotenuse

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

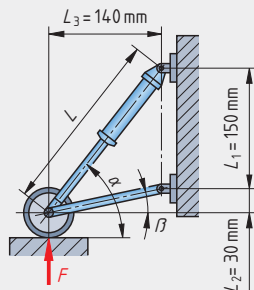
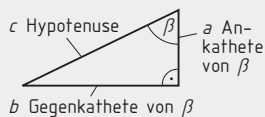
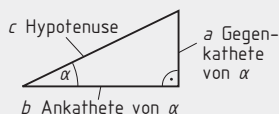
Länge der Katheten

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Funktionen im Dreieck

Funktionen im rechtwinkligen Dreieck (Winkelfunktionen)



c Hypotenuse (längste Seite)
 a, b Katheten
 Bezogen auf den Winkel α ist
 – b die Ankathete und
 – a die Gegenkathete
 α, β, γ Winkel im Dreieck, mit $\gamma = 90^\circ$
 $\sin$ Schreibweise für Sinus
 $\cos$ Schreibweise für Kosinus
 $\tan$ Schreibweise für Tangens
 $\sin \alpha$ Sinus des Winkels α

1. Beispiel

$L_1 = 150 \text{ mm}$, $L_2 = 30 \text{ mm}$, $L_3 = 140 \text{ mm}$;
 Winkel $\alpha = ?$

$$\tan \alpha = \frac{L_1 + L_2}{L_3} = \frac{180 \text{ mm}}{140 \text{ mm}} = 1,286$$

Winkel $\alpha = 52^\circ$

2. Beispiel

$L_1 = 150 \text{ mm}$, $L_2 = 30 \text{ mm}$, $\alpha = 52^\circ$;
 Länge des Stoßdämpfers $L = ?$

$$L = \frac{L_1 + L_2}{\sin \alpha} = \frac{180 \text{ mm}}{\sin 52^\circ} = 228,42 \text{ mm}$$

Winkelfunktionen

Sinus	=	Gegenkathete Hypotenuse
Kosinus	=	Ankathete Hypotenuse
Tangens	=	Gegenkathete Ankathete
Kotangens	=	Ankathete Gegenkathete

Bezogen auf den Winkel α ist:

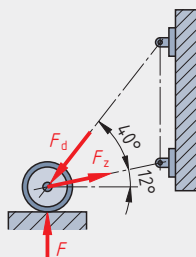
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

Bezogen auf den Winkel β ist:

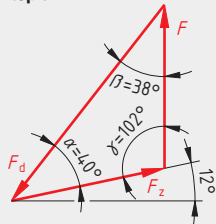
$$\sin \beta = \frac{b}{c} \quad \cos \beta = \frac{a}{c} \quad \tan \beta = \frac{b}{a}$$

Die Berechnung eines Winkels in Grad ($^\circ$) oder als Bogenmaß (rad) erfolgt mit der Arcus-Funktion, z.B. $\arcsin$.

Funktionen im schiefwinkligen Dreieck (Sinussatz, Kosinussatz)



Kräfteplan



Im Sinussatz entsprechen die Seitenverhältnisse dem Sinus der entsprechenden Gegenwinkel im Dreieck. Aus einer Seite und zwei Winkeln lassen sich die anderen Werte berechnen.

Seite $a \rightarrow$ Gegenwinkel α

Seite $b \rightarrow$ Gegenwinkel β

Seite $c \rightarrow$ Gegenwinkel γ

Beispiel

$F = 800 \text{ N}$, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 38^\circ$; $F_z = ?$, $F_d = ?$

Die Berechnung erfolgt jeweils aus dem Kräfteplan.

$$\frac{F}{\sin \alpha} = \frac{F_z}{\sin \beta} \Rightarrow F_z = \frac{F \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$F_z = \frac{800 \text{ N} \cdot \sin 38^\circ}{\sin 40^\circ} = 766,24 \text{ N}$$

$$\frac{F}{\sin \alpha} = \frac{F_d}{\sin \varphi} \Rightarrow F_d = \frac{F \cdot \sin \varphi}{\sin \alpha}$$

$$F_d = \frac{800 \text{ N} \cdot \sin 102^\circ}{\sin 40^\circ} = 1217,38 \text{ N}$$

Die Berechnung eines Winkels in Grad ($^\circ$) oder als Bogenmaß (rad) erfolgt mit der Arcus-Funktion, z.B. $\arccos$.

Sinussatz

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Vielfältige Umstellungen sind möglich:

$$a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}$$

Kosinussatz

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

Umstellung, z.B.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$