

POCKET TEACHER

5–10

KOMPAKTWISSEN 5.–10. KLASSE

Mathematik

***Gleichungen
und Funktionen***

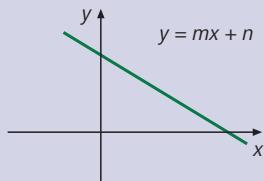
Cornelsen

SCRIPTOR

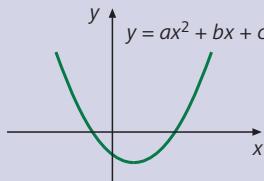
Typische Funktionsbilder

- Grundlage für die grafische Darstellung von Funktionen ist ein Koordinatensystem.
- Ein Punkt ist darin durch seine Koordinaten eindeutig festgelegt.
- Die Achsen bezeichnet man als x-Achse (Rechtsachse oder Abszissenachse) bzw. y-Achse (Hochachse oder Ordinatenachse).

Lineare Funktionen

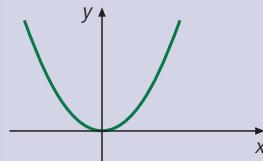


Quadratische Funktionen

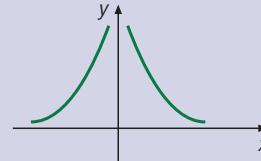


Potenzfunktionen ($y = x^n$)

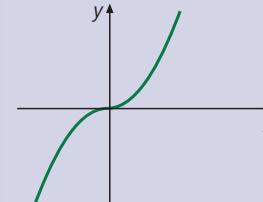
n gerade, positiv



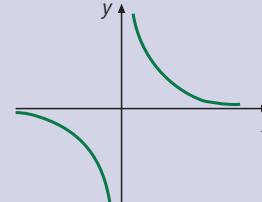
n gerade, negativ



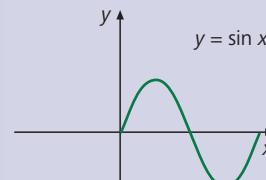
n ungerade, positiv



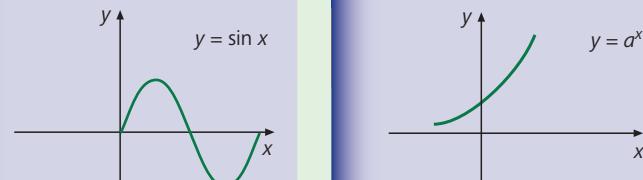
n ungerade, negativ



Sinusfunktionen



Exponentialfunktionen



Siegfried Schneider

Mathematik

***Gleichungen
und Funktionen***

POCKET TEACHER

Cornelsen

SCRIPTOR

Der Autor

Siegfried Schneider ist emeritierter Professor für Methodik des Mathematikunterrichts und Autor mehrerer Lehrbücher.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Das Wort **Cornelsen** ist für den Cornelsen Verlag GmbH als Marke geschützt.

Alle Rechte vorbehalten.

Nachdruck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, die sich aus den Schranken des UrhG ergeben, nicht gestattet.

4., aktualisierte Auflage

© Cornelsen Scriptor 2013 D C B A

Bibliographisches Institut GmbH

Bouchéstraße 12, 12435 Berlin

Redaktionelle Leitung: Heike Krüger-Ber

Redaktion: Dirk Michel, Claudia Fahlbusch

Herstellung: Andreas Preising

Umschlaggestaltung: glas AG, Seeheim-Jugenheim

Umschlagabbildung: © Teerapun Fuangtong – Fotolia.com

Satz: fotosatz griesheim GmbH, Griesheim

Druck und Bindung: Offizin Andersen Nexö Leipzig GmbH

Spenglerallee 26–30, 04442 Zwenkau

Printed in Germany

ISBN 978-3-411-87104-9

Inhalt

Vorwort	8
1 Mengen	10
1.1 Grundbegriffe	10
Mengenbegriff	10
Darstellung von Mengen	11
Mengenbeziehungen	13
Mächtigkeit von Mengen	14
1.2 Mengenoperationen	15
Vereinigung von Mengen	15
Differenz von Mengen	16
Durchschnitt von Mengen	17
Produktmenge	18
Potenzmenge	19
1.3 Zahlenmengen und Zahlenbereiche	20
Zahlenmengen	20
Strukturierte Mengen	21
Zahlenbereiche	22
1.4 Punktmengen	23
Lerncheck	26
2 Gleichungen – Grundbegriffe	27
2.1 Variable	27
2.2 Term	28
2.3 Gleichung	28
2.4 Lösen von Gleichungen	29
Grundbegriffe	29
Äquivalenz von Gleichungen	30

2.5 Gleichungstypen	32
Unterscheidung nach der Struktur	32
Unterscheidung nach der Anzahl der Variablen	33
Systeme	33
2.6 Ungleichungen	33
Lerncheck	35
3 Funktionen	36
3.1 Abbildungen	36
3.2 Funktionen	37
3.3 Anwendungen von Funktionen	38
3.4 Darstellung von Funktionen	40
3.5 Eigenschaften von Funktionen	42
Nullstellen	42
Monotonie	42
Beschränktheit	43
Symmetrie	44
Extremwerte	45
Umkehrbarkeit	45
Lerncheck	47
4 Lineare Funktionen	48
4.1 Begriff	48
4.2 Eigenschaften spezieller linearer Funktionen	49
Die Funktion $y = x$	49
Die Funktion $y = m x$	50
Die Funktion $y = x + n$	51
Die Funktion $y = m x + n$	52
4.3 Konstante Funktionen	53
4.4 Betragsfunktionen	54
Lerncheck	56

5	Lineare Gleichungen und Ungleichungen	57
5.1	Lineare Gleichungen	57
5.2	Lineare Gleichungssysteme	58
	Rechnerische Lösungsverfahren	58
	Grafisches Lösen	62
5.3	Lineare Ungleichungen	64
	Lerncheck	66
6	Quadratische Funktionen	67
6.1	Allgemeine Form einer quadratischen Funktion	67
6.2	Die Funktion $y = x^2$	68
6.3	Die Funktion $y = x^2 + c$	70
6.4	Die Funktion $y = (x + d)^2$	71
6.5	Die Funktion $y = x^2 + p x + q$	72
	Die Hilfsform $y = (x + d)^2 + e$	72
	Eigenschaften der Funktion $y = x^2 + p x + q$	73
	Übersicht	74
6.6	Die Funktion $y = a x^2$	75
	Eigenschaften	75
	Übersicht	76
6.7	Die Funktion $y = a x^2 + b x + c$	77
	Lerncheck	80
7	Quadratische Gleichungen	81
7.1	Allgemeine Form und Normalform	81
7.2	Grafisches Lösen quadratischer Gleichungen	82
7.3	Spezielle quadratische Gleichungen	83
	Die Gleichung $x^2 + q = 0$	83
	Die Gleichung $x^2 + p x = 0$	84
7.4	Allgemeine Lösungsformel	85
7.5	Der Satz von VIETA	88
	Lerncheck	90

8 Potenzieren, radizieren, logarithmieren	91
8.1 Potenzieren und Umkehroperationen	91
8.2 Erweiterung des Potenzbegriffs	92
8.3 Potenzgesetze	93
8.4 Radizieren	95
Wurzelbegriff	95
Wurzelgesetze	97
8.5 Logarithmieren	98
Logarithmusbegriff und Logarithmengesetze	98
Logarithmisches Rechnen	98
Lerncheck	100
9 Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen	101
9.1 Begriff Potenzfunktionen	101
9.2 Die Potenzfunktionen $y = x^n$; $n \in \mathbb{Z}$	102
Die Funktionen $y = x^n$; n gerade; positiv	102
Die Funktionen $y = x^n$; n ungerade; positiv	103
Die Funktionen $y = x^n$; n gerade; negativ	104
Die Funktionen $y = x^n$; n ungerade; negativ	105
9.3 Wurzelfunktionen als spezielle Potenzfunktionen	107
9.4 Begriff Exponentialfunktionen	108
9.5 Eigenschaften von Exponentialfunktionen	109
Die Funktionen $y = a^x$; $a > 1$	109
Die Funktionen $y = a^x$; $0 < a < 1$	110
9.6 Begriff Logarithmusfunktionen	112
9.7 Logarithmische Skalen	113
Entstehung der Skalen	113
Logarithmische Koordinatensysteme	114
Lerncheck	116

10 Winkelfunktionen (Trigonometrische Funktionen)	117
10.1 Begriff	117
Anwendungen	117
Erweiterung des Winkelbegriffs: Gradmaß – Bogenmaß	118
Definitionen der Winkelfunktionen	119
10.2 Sinusfunktion	121
Die Sinusfunktion im Einheitskreis	121
Die Sinusfunktion für beliebige Winkel	122
Die Funktionen $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$	123
10.3 Kosinusfunktion	126
Die Kosinusfunktion im Einheitskreis	126
Die Kosinusfunktion für beliebige Winkel	126
10.4 Tangensfunktion	127
10.5 Kotangensfunktion	129
10.6 Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen	131
Lerncheck	133
11 Anwendungen der Winkelfunktionen	134
11.1 Anwendungsbereiche	134
11.2 Dreiecksberechnungen	137
Voraussetzungen für die Konstruktion und Berechnung	137
Allgemeine Sätze für die Berechnung von Dreiecken	141
Trigonometrische Sätze für die Berechnung von Dreiecken	144
Trigonometrische Beziehungen in beliebigen Dreiecken	149
Berechnung weiterer Größen im Dreieck	154
Lerncheck	156
12 Rechnen mit Formeln	157
Lerncheck	162
Stichwortverzeichnis	163

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler!

Dieser handliche POCKET TEACHER bringt dir viele Vorteile: Er informiert knapp und genau. Regeln, Erklärungen, Beispiele, Tabellen – alles ist übersichtlich geordnet und leicht verständlich.

Du kannst die gewünschten Infos am schnellsten über das Stichwortverzeichnis am Ende des Bandes finden. Stichwort vergessen? Dann schaue am besten ins Inhaltsverzeichnis und suche im entsprechenden Kapitel nach dem Wort! Sie sind durch Fettdruck hervorgehoben.

Der POCKET TEACHER Mathematik Gleichungen und Funktionen stellt die wichtigsten Gesetze und Regeln zusammen, die zum Stoff der Sekundarstufe I gehören. Grundlegende Begriffserklärungen, Sätze und Regeln sind farbig unterlegt.

BEISPIELE Zu jedem Thema werden viele Beispiele gegeben. Es ist nützlich, sie selbst zu lösen, nachzurechnen oder darzustellen und weitere Beispiele zu suchen oder zu bearbeiten.

Lerncheck Am Ende jedes Kapitels werden die wichtigsten Inhalte in einer Checkliste abgefragt. So kannst du dein Wissen schnell testen. Entdeckst du noch Lücken, dann gibt es hier Hinweise, welche Seiten du noch einmal genau lesen solltest.

BEACHTE Natürlich kann die POCKET-TEACHER-Reihe ausführliche Schulbücher mit Versuchsanleitungen, Übungen und Beispielen nicht ersetzen. Das soll sie auch nicht. Sie ist deine

kleine Lernhilfenbibliothek für alle Gelegenheiten, besonders für Hausaufgaben oder für die Vorbereitung auf Klassenarbeiten und Abschlussprüfungen.

► **HINWEIS** Über Mengen, Zahlen und Gleichungen kannst du auch im POCKET TEACHER Mathematik Algebra nachlesen. Wenn du zusätzliches Übungsmaterial suchst, dann schaue dir doch einmal die Reihe *Besser in Mathematik* in einer Buchhandlung an. Dort findest du ausführliche Erklärungen und viele Aufgaben mit Lösungen.

Lerncheck

Kapitel „Lineare Gleichungen und Ungleichungen“	O. K. ✓	Das muss ich noch mal lesen
Ich kenne die Hauptschritte des Lösen linearer Gleichungen.		S. 57
Ich kann drei rechnerische Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme beschreiben.		S. 58–61
Ich kann ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen grafisch lösen.		S. 62, 63
Ich kann die Umformungsregeln für Ungleichungen anwenden.		S. 64, 65

Quadratische Funktionen

6.1 Allgemeine Form einer quadratischen Funktion

Wird ein Fahrzeug mit einer (Anfangs-)Geschwindigkeit v_0 gleichmäßig beschleunigt, nachdem es bereits den Weg s_0 zurückgelegt hat, so errechnet sich der Gesamtweg s nach einer Zeit t nach dem Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung:

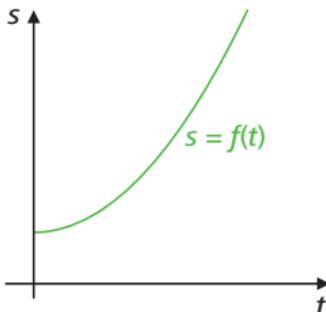
$$s = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + s_0,$$

a (Beschleunigung), v_0 und s_0 sind Konstante.

Der Weg s ist eine Funktion der Zeit $t \geq 0$: $s = f(t)$.

In der Funktionsgleichung (Formel) tritt die unabhängige Variable t in der zweiten Potenz auf.

Das Bild der Funktion ist eine gekrümmte Kurve.



Eine Funktion mit einer Gleichung

$y = a x^2 + b x + c$; a, b, c Konstante; $a \neq 0$; $x \in \mathbb{R}$
heißt **quadratische Funktion**.

Allgemeine Form der quadratischen Funktion:

$$y = a x^2 + b x + c$$

quadratisches lineares absolutes
 Glied Glied Glied

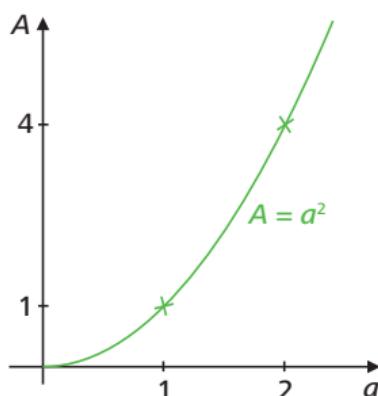
Das Bild einer quadratischen Funktion ist eine *Parabel*.

Im Einführungsbeispiel ist das Funktionsbild wegen der Beschränkung des Definitionsbereichs nur ein *Parabelstück*.

6.2 Die Funktion $y = x^2$

Den Flächeninhalt eines Quadrats berechnet man nach der Formel $A = a^2$. Der Flächeninhalt A ist eine Funktion der Seitenlänge a : $A = f(a)$.

$A = a^2$; $a \in \mathbb{R}$; $a \geq 0$ ist eine quadratische Funktion.

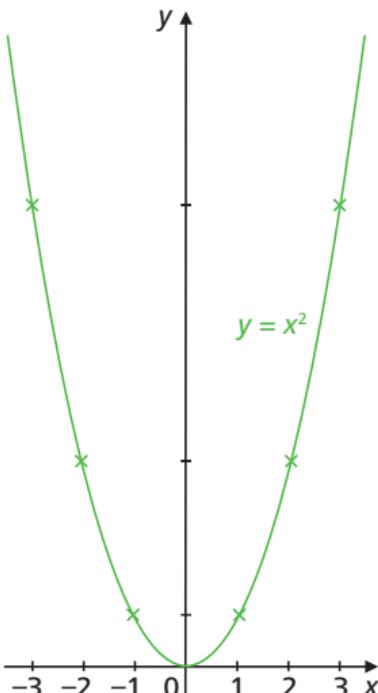


Setzt man in der allgemeinen Gleichung einer quadratischen Funktion $y = a x^2 + b x + c$ für $a = 1, b = 0, c = 0$, so erhält man die einfachste Form einer quadratischen Funktion: $y = x^2$. Ihr Bild im Koordinatensystem ist eine Parabel.

Wegen $a = 1$ (in der Funktionsgleichung) heißt sie auch *Einheitsparabel*.

Diese Bezeichnung erfolgt in Analogie zu den Begriffen Einheitskreis (Kreis mit $r = 1$) oder Einheitsquadrat (Quadrat mit $a = 1$). Damit ist keine spezielle Form gemeint, denn es gibt nur eine Kreisform oder Quadratform, so auch nur eine Parabelform.

Mitunter verwendet man für das Bild von $y = x^2$ auch die Bezeichnung *Normalparabel* (↗ S. 77).



► **HINWEIS** Sie lässt sich in einem Koordinatensystem mit gleichmäßiger Einteilung beider Achsen mithilfe einer Parabelschablone zeichnen. Dabei ist zu beachten, dass die Einheiten auf der Schablone mit den Einheiten im vorgesehenen Koordinatensystem übereinstimmen.

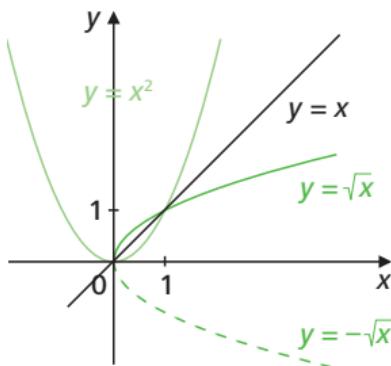
Aus dem Graph der Funktion $y = x^2$ sind folgende Eigenschaften ablesbar:

- Die Funktionskurve verläuft durch die *charakteristischen Punkte* $(-1; 1), (0; 0), (1; 1)$.
- $y = x^2$ hat genau eine Nullstelle $x_0 = 0$. An dieser Stelle nimmt die Funktion zugleich ihren kleinsten Wert $y_0 = 0$ an.
- Der Punkt $(0; 0)$ ist das (*globale*) *Minimum* der Funktion und wird *Scheitel* der Parabel genannt.
- $y = x^2$ ist nach unten beschränkt.
- Sie ist eine gerade Funktion (symmetrisch zur y -Achse),
- für $x < 0$ monoton fallend und
- für $x > 0$ monoton wachsend.

Umkehrbarkeit

$y = x^2$ ist *keine* umkehrbar eindeutige Funktion.

Deshalb kann man nur für Intervalle, in denen sie umkehrbar eindeutig ist, Umkehrfunktionen bilden.



$$y = x^2; \quad x \geq 0$$

$$\text{Umkehrung: } x = y^2; \quad y \geq 0$$

$$|y| = \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = x^2; \quad x < 0$$

$$\text{Umkehrung: } x = y^2; \quad y < 0$$

$$-|y| = \sqrt{x}$$

$$y = -\sqrt{x}$$

In der grafischen Darstellung wird jeweils nur ein Parabelast an der Geraden $y = x$ gespiegelt.

Lerncheck

Kapitel „Rechnen mit Formeln“	O. K. ✓	Das muss ich noch mal lesen
Ich kann Formeln nach gesuchten Größen umstellen.		S. 158–160
Ich kann in Formeln auftretende Bezeichnungen unterscheiden.		S. 160, 161

Stichwortverzeichnis

- A**bbildung
 - eindeutige 36
 - eineindeutige 36
 - nicht eindeutige 36
 - umkehrbar eindeutige 36
- abhängige Variable 37
- absolutes Glied 51, 67, 81
- Abszisse 41
- Abszissenachse 40
- achsensymmetrisch 44
- Addition 91
- Additionstheoreme 132
- Additionsverfahren 61
- äquivalente Umformungen 31
- algebraische Gleichung 32
- allgemeine Form der
 - quadratischen Funktion 67
 - quadratischen Gleichung 81
- allgemeine Lösungsformel einer
 - quadratischen Gleichung 86
- Amplitude 124
- Ankathete 144
- Anstieg 50, 127
- Anstiegsdreieck 50
- Anstiegswinkel 49
- arcus 119
- Argument 37
- Asymptote 106
- Aussage
 - falsche 28
 - wahre 28
- Aussageform 29
- B**asis 91
- beschränkt
 - nach oben 43
 - nach unten 43
- Beschränktheit 43
- Bestimmungsgleichung 29
- Betragsfunktion 54
- Bild der Funktion 42
- Bildmenge 36
- Bogenmaß 119
- Bogenminute 118
- Bogensekunde 118
- C**ANTOR 10
- D**efinitionsbereich 37
- dekadische Logarithmen 99
- Differenz zweier Mengen 16
- disjunkt 16
- Diskriminante 73
- Division 91
- Doppelwinkelformeln 132
- Drehrichtung 118
- Drehsinn
 - mathematisch negativ 119
 - mathematisch positiv 118
- Dreieck 136, 142 f.
- Dreiecksungleichung 138
- Durchschnitt zweier Mengen 17
- e**-Funktion 109
- Einheitsparabel 68
- Einsetzungsverfahren 59
- Element einer Menge 10
- elementfremd 16
- endliche Menge 14
- eulersche Zahl 99, 109
- EULER-VENN-Diagramm 12
- Exponent 91
- Exponentialfunktion 109
- Extremwerte 45

Formeln 157 ff.

– Rechnen mit 157 ff.

Frequenz 124**F**unktionen 37**F**unktionen

– gerade 44

– konstante 53

– lineare 48

– quadratische 67

– stückweise lineare 54

– trigonometrische 117, 120

– umkehrbare 45

– ungerade 44

– zueinander inverse 45

Funktionsgleichung 37**F**unktionskurve 39, 42**F**unktionswert 37**G**egenkathete 144**g**emischtquadratische

Gleichung 84

geordnete Menge 21**ge**ordnetes Paar 18**ge**rade Funktion 44**G**leichheit von Mengen 13**gle**ichmächtig 14**G**leichsetzungsverfahren 60**G**leichung 28**G**leichung zweiten Grades 81**G**leichungssystem 33**Grad** 118**Gradmaß** 118**graf**ische Darstellung 42**graf**isches Lösen 62**Graph** einer Funktion 40, 42**Grund**bereich 29**Grund**zahl 91**H**auptwerte der Winkel-funktionen 132**H**ochachse 40**H**ochzahl 91**H**yperbel 104**H**yperbeläste 104**H**ypotenuse 144**I**nnenwinkelsatz 139**I**ntervall

– geschlossenes 24

– offenes 24

Kathete 144**K**omplementärmenge 13**K**omplementärwinkel 145**K**ongruenzsätze 140**kon**stante Funktion 53**K**oordinatensystem 40**K**osinus 120**K**osinusfunktion 120, 126 f.**K**osinussatz 151**K**otangens 120**K**otangensfunktion 120, 129**K**reuzmenge 18**kub**ische Parabel 103**K**urvenverlauf 39**le**ere Menge 15**Le**erfeld 27**line**are Funktion 48**line**are Gleichung 57**line**ares Gleichungssystem 33, 58**line**ares Glied 67, 81**line**are Ungleichung 64**Link**skrümmung 103**Lö**sen einer Gleichung 29**Lö**sen einer Ungleichung 34**Lös**ung eines Gleichungs-

systems 58

- Lösungsalgorithmus 31
Lösungsformel 31
Lösungsgrundmenge 29
Lösungsmenge 29
Logarithmenbasis 92
Logarithmengesetze 98
Logarithmentafel 99
logarithmieren 92, 98
logarithmische Skale 113
logarithmisches Koordinatensystem
 - doppelt 115
 - einfache 114
Logarithmus 92
Logarithmusfunktion 112
- M**ächtigkeit von Mengen 14
Maximum
 - globales 45
 - lokales 45
Menge 10
Minimum
 - globales 45
 - lokales 45
monoton
 - fallend 43
 - wachsend 43
Monotonie 42
Multiplikation 91
- N**ormalform der quadratischen Gleichung 82
Normalparabel 68
Nullstelle 42
Numerus 92
- O**bermenge
 - echte 13
 - unechte 14
Ordinate 40
Ordinatenachse 40
- Ordinatenstreckung 124
Originalmenge 36
- P**arabel 67, 102
Periodizität 123
Phasenverschiebung 125
Platzhalter 27
Pol 128
Potenzfunktion 101
Potenzgesetze 94
potenzieren 91
Potenzmenge 19
Potenzwert 91
Probe 32
Produktgleichheit 105
Produktmenge 18
Proportionalität
 - direkte 50
 - indirekte 105
 - umgekehrte 105
Proportionalitätsfaktor 50
Punktmenge 23
- Q**uadrant 40
quadratische Ergänzung 71
quadratische Funktion 67
quadratische Gleichung 81
quadratisches Glied 67, 81
Quadratwurzel 95
- R**ad 119
Radian 119
Radikand 92
radizieren 83, 92
Rechenoperationen
 - 1. Stufe 91
 - 2. Stufe 91
 - 3. Stufe 91
Rechtsachse 40
Rechtskrümmung 103

- reinquadratische Gleichung 83
 Richtungsfaktor 50
- S**cheitel 69
 Sinus 120
 Sinusfunktion 120
 Sinuskurve 121
 Sinussatz 149 f.
 Spiegelung 124
 Stauchung 75, 124
 Steigung 50, 127
 Streckung 75, 124
 strukturierte Menge 21
 stückweise lineare Funktion 54
 Substitution 59
 Subtraktion 91
 Symmetrie 44
- T**angens 120
 Tangensfunktion 120
 Teilmenge
 – echte 13
 – unechte 14
 Term 28
 transzendente Gleichung 33
 trigonometrische Funktion 118, 120
- U**mformungsregeln 31
 umkehrbare Funktion 45
 Umkehrbarkeit 45
 Umkehrfunktion 45
 unabhängige Variable 37
 Unbekannte 29
 unendliche Mengen
 – abzählbar 15
 – überabzählbar 15
 ungerade Funktion 44
 Ungleichung 33
 Untermenge 13
- V**ariable 27
 Vereinigung von Mengen 15
 VIETA
 – Satz von 88
 Vorschrift 36
 Vorzeichen der Winkel-
 funktionen 132
- W**endepunkt 103
 Wertebereich 37
 Wertetafel 40
 Winkelbegriff 117
 Winkelfunktion 118, 120,
 134 ff.
 Wurzel 92
 Wurzelexponent 92
 Wurzelfunktion 107
 Wurzelgesetze 97
 Wurzelziehen 83
- x**-Achse 40
- y**-Achse 40
 y -Achsen-Abschnitt 51
- Z**ahlenbereich 21 f.
 Zahlenmenge 20
 Zeichenreihe 27
 zentrale symmetrisch 44
 Zerlegung in Linear-
 faktoren 85
 zueinander äquivalente
 Gleichungen 30
 zueinander äquivalente
 Ungleichungen 64
 Zuordnung 36

Schülerzitate (amazon)

**„Einfach und prägnant.
Eine super Lernhilfe.“**

**„... das Buch eignet sich hervor-
ragend zum Üben für Klausuren oder
kleine Tests ...“**

Mathematik

Gleichungen und Funktionen

Das Kompaktwissen für die Klassen 5–10:

- Funktionen beschreiben und grafisch darstellen
- Die Umformungsregeln bei Ungleichungen anwenden
- Quadratische Gleichungen richtig lösen
- Potenzieren, radizieren, logarithmieren
- Sinus- und Kosinusfunktion anwenden

Für Referate, Klassenarbeiten, Tests und mittlere Abschlussprüfungen

ISBN 978-3-411-87104-9
6,99 € (D) · 7,20 € (A)



9 783411 871049