Die Metastruktur der Ortschaften –
eine endlos fortschreibbare Bereicherung von Sprache und Schrift

Wenn man Mathematik betreiben will, ist man „fein raus“, hat man es erst einmal bis zum Begriff einer mathematischen Struktur geschafft. *In der Tat* ist dann die Grundlegung der Mathematik „aus der *Metasprache* (hier *deutsch*) heraus“ gelungen, lassen sich dann doch bekanntlich Strukturen angeben, welche einen geeigneten Rahmen für alle weiteren mathematischen Tätigkeiten bieten – etwa die oft zu diesem Zweck herangezogenen ZFC-Mengentheorien. Der problematische Wegabschnitt liegt also in der Anfangsstrecke, von einer noch keinen mathematischen Begriff beinhaltenden Metasprache bis zur Definition der mathematischen Strukturen. Wir zitieren hierzu Hans Hermes: „Wie alle Mathematiker nutzen die Mengentheoretiker das gleiche schmutzige Tuch (nämlich die Mengenlehre), um ihr Silber (nämlich die Mengentheorie) zu polieren“ – mit der „Mengenlehre“ ist dabei die bekanntermaßen logisch unsaubere naive Mengenlehre („Menge“ im Sinne von Georg Cantor) gemeint, und mit der „Mengentheorie“ die axiomatische Mengenlehre. Es ist das Anliegen dieses Büchleins, das „schmutzige Tuch“ (also die naive Mengenlehre) durch ein „sauberes Tuch“ (die Metastruktur der Ortschaften) zu ersetzen (dies ist das Thema der ersten sechs Abschnitte des in dreizehn Abschnitte aufgeteilten Skripts), und danach (in den folgenden sieben Abschnitten) auf dem metamathematischen Basisbegriff der Ortschaften fußend Grundwahrheiten von Logik und Modelltheorie zu formulieren und zu beweisen (etwa den *Kompaktheitssatz*, den *Vollständigkeitssatz von Gödel*, das *Halteproblem von Turing*, die *Nicht-Auszählbarkeit der Tautologien* und *der arithmetischen Sätze*, den *Satz von Tarski*, den *Fixpunktsatz*, den *Satz von Löb* sowie die zwei *Unvollständigkeitssätze von Gödel*), und so die Tragfähigkeit des Konzepts der Ortschaften zu illustrieren. Die Ausführungen gestalten sich dabei sehr viel glatter, griffiger und eleganter als das bei einem mengenbasierten Ansatz der Fall ist; dies liegt u. a. an der zweifachen Bereitstellung der Terme und Forme(l)n (in einer „*primordialen*“ und in einer „*strukturalen*“ Variante), sowie daran, dass für jeden Ort o gilt: {o}=o, und dass für jedes Simpel S gilt: (S)=S.

Wegen der Kürze des Büchleins verzichten wir auf ein Inhalts- und Symbolverzeichnis, gliedern den Text aber thematisch in dreizehn Abschnitte; das Ende eines Abschnitts wird jeweils durch die ihm in chronologischer Reihenfolge zukommende Nummer (in einem schwarzen Kreis in weiß aufgeführt) angezeigt. Die Abschnitte lassen sich wie folgt betiteln:
Die Ausgangsregeln ❶ *Die Dimensionsregel* ❷ *Die primordiale Sprache* ❸ *Die erste Komprehensionsregel* ❹ *Die Aufgliederung der Lande* ❺ *Der Assembler* ❻ *Werke und Tris* ❼ *Korrekteit und Konsistenz* ❽ *Die Strukturen* ❾ *Die zweite Komprehensionsregel* ❿ *Aufzählbarkeit und Auszählbarkeit* ⓫ *Die Monturen* ⓬ *Die Arithmetiken* ⓭

Strassburg, Oktober 2018
François Borsotto

Vorwort

Wir gehen von einer „Metastruktur mit einer Konstanten und zwei Funktoren der Arität 2" aus; ihre Objekte heißen die *Ortschaften*. Dabei stellen wir zehn *Ausgangsregeln* auf, von welchen die zehnte gewissermaßen als „Urknall" fungiert. Im Laufe der Ausführungen gesellen sich bedarfsgesteuert weitere Regeln hinzu (die *Fortschreibungsregeln*; in diesem Büchlein die letzten drei Regeln). Von diesen wird jeweils gezeigt, dass sie vereinbar sind mit den vorangehenden Regeln; es findet also eine „unbedenkliche Weiterentwicklung" statt. Das Regelwerk ist so beschaffen, dass es ermöglicht, innerhalb des durch die Ortschaften gegebenen Rahmens alle benötigten Begriffe einzuführen (etwa *Ort*, *Simpel*, *endlich*, *Abbildung*, *Ordnungs*- und *Äquivalenzbeziehung*, *Familie*, *natürliche* und *ganze Zahl*, *Struktur*, *Term*, *Form(el)*, *konsistent, ausgebbar, auslesbar*), zu definieren, was ein *Programm* ist und wie es abläuft, und bestehende Zusammenhänge aufzuzeigen (etwa die *adischen Zerlegungen einer natürlichen Zahl*, die *Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung einer nicht nullen natürlichen Zahl*, die *Zurückführung der Potenzierung auf die Grundrechenarten „Addition und Multiplikation"*, den *Kompaktheitssatz*, den *Vollständigkeitssatz von Gödel*, das *Halteproblem von Turing*, die *Nicht-Auszählbarkeit der Tautologien* und *der arithmetischen Sätze*, den *Satz von Tarski*, den *Fixpunktsatz*, den *Satz von Löb* sowie die *Unvollständigkeitssätze von Gödel*). Die Zugrundelegung der Ortschaft als Basisbegriff bedingt bei vielen Definitionen und Beweisen eine Abweichung von den in der Literatur anzutreffenden Entsprechungen, die Ausführungen werden dadurch kürzer und transparenter. Hat man sich erst einmal mit den in den Beweisen auftretenden Bezeichnungen vertraut gemacht, sind die meisten Beweise eher einfach. Die Darstellung ist recht knapp gehalten, was die Auseinandersetzung mit dem Inhalt erschwert, sie zum andern aber auch spannender und einprägsamer werden lässt. Um das Ganze zu entzaubern sei darauf hingewiesen, dass die Metastruktur der Ortschaften im Grunde lediglich eine *de toute évidence* (und mit gleichem Recht wie die metamathematische Arithmetik; *vgl.* die diesbezügliche Anmerkung im zehnten Abschnitt) widerspruchsfreie naive Beziehungslehre ist, „naiv" in dem Sinne, dass die letzte Ausgangsregel *nicht* durch einen Ausdruck der Logik erster Stufe wiedergebbar ist (was ja beim Induktionsregelschema der metamathematischen Arithmetik auch der Fall ist). Vorkenntnisse in Mathematik und Informatik sind nicht erforderlich, aber sicher hilfreich.

Gelegentlich weichen wir bei den Bezeichnungen von Gewohntem ab, teils zur Unterscheidung von Bezeichnungen, welche in der Literatur eine ähnliche aber eben nicht genau dieselbe Bedeutung haben (etwa „auslesbar, auszählbar" vs. „entscheidbar, berechenbar"), teils da in der Literatur ebenfalls Unterschiedliches anzutreffen ist (z. B. bei der Bezeichnung von Kojunktoren).

Gegeben und wohlunterschieden sind die **Ortschaften**, eine Ortschaft ʡ (der **Peanoanker**) und zu je zwei Ortschaften f, g Ortschaften f\g, f×g (das **Dedukt** und das **Kreuzprodukt von f und g**), dabei gelten die im Folgenden aufgeführten ***Ausgangsregeln:*** Die ***Ortsregeln*** O1, O2, O3, O4, die ***Extensionalitätsregel*** ER, die ***Standortspezifizierungsregeln*** S1, S2, S3, S4, die ***Verankerungsregel*** VR. Zu ihnen gesellen sich die ***Fortschreibungsregeln*** DR (***Dimensionsregel***) und K1, K2, … (***Komprehensionsregeln***), von deren Vereinbarkeit mit den vorangehenden Regeln wir uns jeweils zu vergewissern haben. De facto lassen sich die Regeln als „fortgeschriebene Definition der Ortschaften“ auffassen.

Ein **Ort** oder **erste** Ortschaft sei eine Ortschaft u dergestalt, dass u\u≠u und für jede Ortschaft f gilt: u\f=u oder u\f=u\u. Ein **Standort** der Ortschaft f sei ein Ort u mit u\f=u\u; *schreibe* dann: u∈f, *sage:* f **enthält u**, u ist **aus f**. Eine Ortschaft s heißt **simpel** oder ein **Simpel**, wenn für Ortschaften f, g mit f×g=s gilt: (f=s und g≠s) oder (f≠s und g=s); ist s zudem erst, so nenne s **punktuell** oder einen **Punkt**. ***Zu den Bezeichnungen:*** *Lese* „=, ≠“ als: gleich, ungleich. Wie bei „=“ soll allgemein bei einem eine zweistellige Beziehung zwischen Ortschaften wiedergebenden Schriftzeichen das durchgestrichene Schriftzeichen das Nicht-Bestehen (also die Verneinung) der Beziehung anzeigen; so lese etwa „u∉f“ für Ortschaften u, f als: u∈f ist falsch, *sprich:* u ist kein in der Ortschaft f enthaltener Ort. *Lese* zudem „:=“ als: *per definitionem* gleich; beim spiegelverkehrten Zeichen „=:“ sind die Rollen von linker (definierter) und rechter (definierender) Seite zu vertauschen.

O1: Sind u, v Orte, so ist auch u×v ein Ort.
O2: Es existiert ein Ort ł derart, dass für jeden Ort u gilt: u×ł=ł×u=u.
O3: Für Orte u, v, w gilt: (u×v)×w=u×(v×w).
O4: Sind u, v Orte, sind a, b Punkte und gilt: u×a=v×b, so folgt: u=v und a=b.
ER: Eine Ortschaft wird durch ihre Standorte eindeutig festgelegt.
S1: Das Dedukt f\g von Ortschaften f, g enthält einen Ort u genau dann, wenn u∈f und u∉g.
S2: Das Kreuzprodukt f×g von Ortschaften f, g enthält einen Ort u genau dann, wenn u=v×w mit einem v∈f und einem w∈g.
S3: Zu jeder Ortschaft f existiert eine Ortschaft, welche einen Ort u genau dann enthält, wenn es einen Punkt a gibt mit u×a∈f.
S4: Zu jeder Ortschaft f existiert eine Ortschaft, welche gerade alle Orte der Gestalt (a×u)×a mit einem Standort u von f und einem Punkt a enthält.

In O2 ist ł eindeutig bestimmt, gilt doch für einen „Konkurrenten“ ł̃ von ł: ł̃=ł̃×ł=ł. Wegen ł×ł=ł ist ł nicht simpel. ***Wegen O1, ER, S2*** lässt sich O3 verallgemeinern zu **O3´:** Für Ortschaften e, f, g gilt: (e×f)×g=e×(f×g). ***Wegen O3´*** lassen sich bei der Kreuzproduktbildung von Ortschaften die schließenden Klammern der die Ausführungsreihenfolge regelnden Klammernpaare solange nach rechts verschieben bis alle schließenden Klammern am Schluss stehen, oder, was dasselbe besagt, bis keine öffnenden Klammern mehr unmittelbar aufeinanderfolgen. Somit hat die Klammersetzung auf das Endergebnis keinen Einfluss und kann also entfallen. Allgemein soll beim Verzicht auf Klammersetzung, falls nicht explizit eine andere Verabredung getroffen wurde, die Bindungsstärke nach rechts hin abnehmen.

Aufgrund von O1, ER sind die in S3, S4 postulierten Ortschaften durch f eindeutig bestimmt; *bezeichne* sie mit f%, ⦂f, *in Worten:* der **Rumpf** sowie die **Einfassung von f**. Ein **Vorort von f** sei ein Standort von f%.
S1 liefert: Für Ortschaften f, g ist f\(f\g) =: f∩g die (aufgrund von ER eindeutig bestimmte) Ortschaft ***aller*** (mit als Standorte gerade alle) Orte, welche aus f *und* aus g sind; *nenne* f∩g den **Durchschnitt von f und g**. Eine all ihre Standorte aus f beziehende Ortschaft f′ heißt eine **Teilortschaft von f**; *schreibe* dann: f⊇f′, f′⊆f, und *sage:* f **inkludiert f′**, f **umfasst f′**. Gilt f⊇f′ *und* f≠f′, so *schreibe:* f⊃f′, f′⊂f, und *sage:* f′ ist eine **echte** Teilortschaft von f, die Inklusion von f′ in f ist **echt**. Eine Ortschaft sei **letzt** oder ein **Raum**, wenn sie von keiner Ortschaft echt inkludiert wird. Die **leere** Ortschaft ł\ł =: ∅ enthält keine Punkte und wird also von jeder Ortschaft umfasst. Es gilt: ∅%=⦂∅=∅. Wegen S2 gilt für jede Ortschaft f: f×∅=∅×f=∅. Ein **Tupel** sei eine nicht leere Ortschaft. Ortschaften f, g mit f∩g=∅ seien **disjunkt**. Wegen ∅\∅=∅=∅×∅ ist ∅ weder erst noch simpel. Ist i ein Ort, so gilt wegen i\i=∅≠i: i∈i; weiter gilt dann für jeden in i enthaltenen Ort j: j⊇i, ***denn:*** Annahme: es gibt einen Ort j mit j∈i, j⊉i. Nun ist i\j wegen S1, j∈i, j∈j eine nicht leere echte Teilortschaft von i, also sind i\∅=i, i\i=∅, i\j paarweise ungleich, im Widerspruch zur Definition der Orte. ***Per Ausschluss*** (*d. h.:* aufgrund des Fakts, dass die Verneinung einer Aussage sicher dann wahr ist, wenn die Aussage selbst zu einem Widerspruch führt) ist die Behauptung hiermit gezeigt. Mit j⊇i gilt wegen i∈i: i∈j, woraus, ebenso wie man j⊇i aus j∈i erhält, folgt: i⊇j, d. h. wegen j⊇i und ER: i=j. Folglich ist i bereits der einzige Standort von i, und gilt für jede Ortschaft f: i\f=∅ falls i∈f, i\f=i falls i∉f. Da wegen ER und dem eben Gezeigten eine einstandortige Ortschaft mit ihrem Standort übereinstimmt, ist in Summe gezeigt: Jeder Ort hat genau einen Standort: sich selbst. Es machen die Orte gerade alle einstandortigen Ortschaften aus. Ein Ort u ist genau dann in der Ortschaft f enthalten (u∈f), wenn u von f umfasst wird (u⊆f). Weil ł nur sich selbst enthält, lässt sich O2 wegen S2 verallgemeinern zu **O2′:** Für jede Ortschaft f gilt: f×ł=ł×f=f.

Der **Identifikator** Î ≔ ⦂ł enthält gerade alle Orte der Gestalt a×a, a Punkt. Å ≔ Î% enthält gerade alle Punkte. Wir nennen Å die **Allkommune**, ihre Teilortschaften die **Kommunen** oder die **kommunalen** Ortschaften. Eine Teilortschaft einer Kommune K heißt auch eine **Teilkommune von K**. *Nenne* die Teilortschaften von Å×Å **binär** und die Teilortschaften von Å×Å×Å **ternär**. Für β⊆Å×Å und K⊆Å heißt β1K ≔ (β∩(Å×K))%⊆Å der **Vorbereich von K in β**; er enthält einen Punkt a dann und nur dann, wenn es einen Punkt a′ gibt mit a×a′∈β.

Eine **Peanofolge** sei eine binäre Ortschaft π mit: Zu i∈Å existiert genau ein j∈Å sodass i×j∈π. Es existiert ein (eindeutig bestimmtes) o∈Å derart, dass für jeden Punkt a die Kommunenfolge a, π1a, π1π1a, π1π1π1a, π1π1π1π1a, … *bei Zulassung nur nicht leerer Glieder und ausgereizter Fortführung* abbricht mit letztem Glied o; diese Kommunenfolge heißt dann die **π-Kadenz von a**. Neben π1∅=∅ gilt dann: π1o=∅, und o ist die einzige nicht leere Kommune mit in π leerem Vorbereich. *Nenne* o =: 0(π) den **Nullpunkt von π**, und *nenne* für a∈Å den Punkt b mit a×b∈π den **π-Nachfolger πa von a**.
Im Folgenden sei π eine Peanofolge mit Nullpunkt o. Sei a∈Å; mit „Kadenz“ sei stets die π-Kadenz des Punkts a gemeint.

In der Kadenz kommt jedes Glied i nur einmal vor, da andernfalls die Kadenz nie abbräche, dabei erschiene der Abschnitt vom ersten bis zum zweiten Auftreten von i stets erneut. a ist Standort von keinem Glied außer a, ***denn:*** Nehme an: Es gibt ein Glied i≠a mit a∈i. Sei j=π1⋯π1a das unmittelbar vor i stehende Glied. Nun: a∈i=π1j=π1π1⋯π1a⊆π1π1⋯π1i, also ist a enthalten in einem *nach i* auftretenden Glied; die Kadenz von a bricht daher nie ab, im Widerspruch zur Definition einer Peanofolge. Per Ausschluss folgt jetzt die Behauptung. ***Sie verschärft sich zu:*** Ungleiche Glieder der Kadenz sind disjunkt, ***denn:*** Nehme an: dies wäre nicht der Fall. Sei i das erstauftretende Glied, zu welchem es ein zu i nicht disjunktes Glied j≠i gibt; sei u∈i∩j. Nach dem oben Gesagten sind i, j zu a ungleich. Ist i´ bzw. j´ das unmittelbar vor i bzw. das unmittelbar vor j stehende Glied, so gilt mit u∈i und i=π1i´: πu∈i´, mit u∈j und j=π1j´: πu∈j´, und somit: i´∩j´≠∅; wegen i´≠j´ ist dies ein Widerspruch zur Wahl von i. Per Ausschluss folgt die Behauptung. Jedes Glied ist punktuell, ***denn:*** Nehme an: Es gibt ein nicht punktuelles Glied der Kadenz. Für das auf das letztauftretende solche Glied u unmittelbar folgende (punktuelle) Glied v ist wegen v=π1u∈Å πv∈u der einzige Standort von u, welcher in π einen nicht leeren Vorbereich (nämlich v) hat; also kommt als zu πv ungleicher Standort von u nur der einzige Punkt mit in π leerem Vorbereich in Betracht, nämlich o. Somit gilt: o∈u, und deshalb: u∩o=o≠∅, es sind u, o also ungleiche nicht disjunkte Glieder, im Widerspruch zum eben Gezeigten. Per Ausschluss ergibt sich nun die Behauptung. ***Nenne*** im Fall „a≠o" den Punkt π1a den **π-Vorgänger von a**.
π1b= a↔b =πa vermittelt eine umkehrbar-eindeutige Korrespondenz zwischen den Punkten a und den zu o ungleichen Punkten b. In der (endlosen) Punktfolge o, πo, ππo, πππo, … kommt jeder Punkt genau einmal vor (***π-Folge der Punkte***). ***Hierzu:*** Die erste Aussage ist klar. In der π-Folge der Punkte tritt a∈Å *höchstens* einmal auf, da sonst die π-Kadenz von a endlos wäre. a kommt *mindestens* einmal vor, weil andernfallst die π-Kadenz von a sicher nicht mit o enden würde.

Die ersten neun Regeln lassen zwei Trivialvarianten zu: Die **digitalen** Ortschaften (*darunter verstehe* ł, ∅) sind bereits die einzigen Ortschaften. Å ist die einzige nicht digitale Ortschaft; es ist dann Å punktuell mit Å=𐐒Å=ł%, Å×Å=Î=𐐒ł=ł.
Diese Varianten verbieten sich aber aufgrund der ***Verankerungsregel***

VR: ʕ ist eine Peanofolge.

0(ʕ) ≕ 0 sei der **nulle** Punkt oder die **Null**. *Nenne* für a∈Å die ʕ-Kadenz von a auch die ***chromatische Kadenz von a***, ʕa a den **chromatische Nachfolger von a**, und falls a≠0 ʕ1a den **chromatischen Vorgänger von a**. Die ʕ-Folge der Punkte heißt auch die ***chromatische Folge der Punkte***.
Die Punkte a und die **Lande** (*das seien* die Standorte von Å\0 ≕ Λ̊, also die nicht nullen Punkte) l entsprechen einander umkehrbar-eindeutig via der Korrespondenz ʕ1l= a↔l =ʕa. Mit 0↔1↔2↔3↔4↔5↔6↔7↔8↔9 seien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 die **Eins**, **Zwei**, **Drei**, **Vier**, **Fünf**, **Sechs**, **Sieben**, **Acht**, **Neun**. Sind a, b ∈Å und ist a Glied der chromatischen Kadenz von b, so heißt a **kleiner-gleich b**, b **größer-gleich a**; *schreibe* dann: a≤b, b≥a Gilt zudem: a≠b, so *schreibe:* a<b, b>a, und *sage:* a ist **kleiner als b**, b ist **größer als a**. Für a, b, c ∈Å gilt: 0≤a. a≤a. a≤b oder b≤a. a<ʕa, es gibt kein u∈Å mit a<u<ʕa. Aus a≤b, b≤a folgt: a=b. Aus a≤b, b≤c folgt: a≤c.

Die Beweismethode, welche auf der durch die chromatische Folge der Punkte bedingten Tatsache beruht, dass eine Aussage über Punkte bereits dann für alle Punkte gilt (***Induktionsschluss***), wenn man sie für 0 verifiziert hat (***Induktionsanfang***) und gezeigt hat, dass sie immer dann, wenn sie für einen Punkt a (oder, allgemeiner, für alle Punkte a´≤a) gilt (***Induktionsannahme***), auch für ʕa besteht (***Induktionsschritt***), sei das ***Induktionsprinzip***. Ebenso reicht es aus, eine punktbezogene Definition für 0 und für ʕa zu formulieren, dabei beim ***Rekursionsschritt*** „a→ʕa" vorausgesetzt wird, dass für den Punkt a (oder allgemeiner für alle Punkte a´≤a) die Definition bereits erfolgt ist (***Rekursionsprinzip***).

Induktiv (*sprich:* aufgrund des Induktionsprinzips) erhalten wir unmittelbar die ***Allkommunenregel:*** K⊆Å stimmt bereits dann mit Å überein, wenn 0∈K und für k∈Å mit k∈K (oder, verschärft: für k∈K mit k´∈K für alle k´≤k) gilt: ʕk∈K.
Sie liefert die Existenz zur nicht leeren Kommune K eines m∈K mit m≤k für k∈K, ***denn:*** Gäbe es kein solches m, so gälte: 0∈Å\K, und für a∈Å\K mit „a´∈Å\K für alle a´∈Å mit a´≤a": ʕa∈Å\K; wegen der Allkommunenregel hätte man dann also: Å\K=Å, d. h. es wäre K leer, im Widerspruch zur Voraussetzung auf K. Weil für Punkte a, b aus „a≤b, b≤a" folgt: a=b, ist m =: min$_{\leq}$K eindeutig bestimmt, und heiße das **Minimum von K (bzgl. ≤)**. Gibt es ein n∈K mit k≤n für alle k∈K, so ist auch n =: max$_{\leq}$K eindeutig bestimmt, und heiße das **Maximum von K (bzgl. ≤)**.

K⊆Å heißt **endlich**, wenn K leer ist oder bzgl. ≤ ein Maximum hat. Jeder Punkt ist endlich. Induktiv sieht man: Zu a∈Å ist die Kommune ϟa aller Glieder der chromatischen Kadenz von a bildbar, ϟa ist nicht leer und endlich mit Minimum 0, Maximum a; sei a^{ϟ} ≔ (ϟa)\0. Å\ϟa ist **unendlich** (nicht endlich) mit Minimum ʕa. Für n∈Å ist ϟʕ1n=(ϟn)\n nicht leer und endlich, mit Minimum 0, Maximum ʕ1n. Induktiv auf a∈Å sieht man leicht: Jedes K⊆Å mit „k≤a für k∈K" ist endlich. Es folgt: K⊆Å ist genau dann endlich, wenn es ein κ∈Å gibt mit k≤κ für alle k∈K. Hiermit wird klar, dass jede Teilkommune einer endlichen Kommune endlich ist.

Neben ∅$^{\%}$=∅ gilt auch: ł$^{\%}$=∅, ***denn:*** Nehme an: ł$^{\%}$≠∅, sprich: Es existiert ein Ort u und ein Punkt a derart, dass u×a=ł. Für b ≔ min$_{\leq}$(Å\a) gilt: ł×b=b, andererseits: b=b×ł=b×(u×a)=(b×u)×a; dies steht wegen b≠a im Widerspruch zu O4. Hiermit ist unsere Behauptung per Ausschluss bewiesen. ❶

Definiere rekursiv (mittels des Rekursionsprinzips) zur Ortschaft f für a∈Å die **a-te Kreuzpotenz f^{a} von f**: f^{0} ≔ ł, f^{ʕa} ≔ f^{a}×f. Wir haben: ł^{a}=ł, und falls a≥1: ∅^{a}=∅. Die Ortschaften Å^{a}, a∈Å, sind paarweise disjunkt und haben mit Ausnahme von ł mehr als einen Standort; ***hierzu*** beachte, dass Å^{1}=Å mehr als einen Standort hat und, wie man auf O4 und „ł$^{\%}$=∅" gestützt leicht sieht, für a∈Å und u∈Å^{a} u×a in Å^{ʕa} aber in keinem Å$^{a´}$, a´≤a, enthalten ist. ʕ⊆Å^{2}; sind a, b ∈Å, f⊆Å^{a}, g⊆Å^{b}, so gilt: f\g⊆f⊆Å^{a}; f$^{\%}$=∅ falls a=0, f$^{\%}$⊆Å^{ʕ1a} falls a≥1; ȣf⊆Å^{ʕʕa}; es gibt ein c∈Å mit c≥a, c≥b, f×g⊆Å^{c}, wie man induktiv auf b erhält. Bei Beschränkung auf die Ortschaften der Gestalt Å^{u}, u∈Å, und ihre Teilortschaften bleiben also alle zehn Ausgangsregeln erhalten. Wir können deshalb bedenkenlos hinzunehmen die ***Dimensionsregel***

DR: Zu jedem Tupel t existiert ein Punkt a mit Å^{a}⊇t.

In DR wird a durch t eindeutig bestimmt, und heiße die **Dimension dim(t) von t**. Aufgrund von DR sind die Ortschaften der Gestalt Å^{a}, a∈Å, gerade alle Räume. Im Sinne der Inklusion sind die Orte gerade alle ***minimalen*** (*d. h.:* kleinstmöglichen) Tupel und die Räume gerade alle ***maximalen*** (*d. h.:* größtmöglichen) Tupel. Für a∈Å sei Å^{a} der **a-Raum** (also ł der **Nullraum**, Å der **Einsraum**). *Per definitionem* sei jeder Punkt eine **Dimension von ∅**. *Nenne* eine Ortschaft mit der Dimension a **a-dimensional**. Hiermit ist „nulldimensional, eindimensional, zweidimensional, dreidimensional" gleichbedeutend zu: digital, kommunal, binär, ternär.
Es vermittelt dim(r)= a↔r =Å^{a} eine eins-zu-eins Korrespondenz zwischen den Punkten a und den Räumen r. Es gilt: 0↔ł, 1↔Å, ʕa↔Å^{a}×Å. *Per definitionem* gelte mit a↔r, b↔s: a+b↔r×s; a+b sei die **Summe von a und b**. Diese ***chromatische Korrespondenz zwischen den Punkten und den Räumen*** bedingt für a, b, c ∈Å: a+1=ʕa, a+ʕb=ʕ(a+b); a+0=0+a=a; (a+b)+c=a+(b+c) [*vgl.* O2´, O3´]. a+b=b+a, *denn:* 1+0=0+1=1. Ist i∈Å mit 1+i=i+1, so: 1+(i+1)=(1+i)+1=(i+1)+1. Induktiv auf i ist somit gezeigt: Für i∈Å ist 1+i=i+1. Weiter gilt: i+0=i=0+i; ist j∈Å mit i+j=j+i, so: i+(j+1)=(i+j)+1=1+(i+j)=1+(j+i)=(1+j)+i=(j+1)+i. Induktiv auf j ist somit gezeigt: Für j∈Å ist i+j=j+i, ***q. e. d.*** (*lese als:* quod erat demonstrandum).

Gestützt auf O4 erhält man induktiv auf die Dimension: Ist u ein Ort, so existiert zu 1≤k≤dim(u) ein a∈Å^{ʕ1k}, ein s∈Å und ein Ort r mit a×s×r=u; a, s, r sind durch k eindeutig bestimmt. *Setze:* s ≕ u_k. Sind Orte u, v **äquidimensional** (von einem selben Raum umfasst) mit Dimension d und mit u_i=v_i für 1≤i≤d, so folgt: u=v, wie man induktiv auf d leicht sieht. Klar ist nun (*beachte* O1, S1): Jeder Standort einer Ortschaft f ist zu f äquidimensional. Für Tupel s, t ist s×t ein Tupel, es gilt: dim(s×t)=dim(s)+dim(t). Sind u, v Orte, so gilt für 1≤i≤dim(u): $(u×v)_i=u_i$, und für 1≤j≤dim(v): $(u×v)_{dim(u)+j}=v_j$. Sei t ein Tupel. Nun gibt es zu 1≤i≤dim(t) genau dann Tupel u, v mit dim(u)=i, u×v=t, wenn für a, b ∈t gilt: $a_1×\cdots×a_i×b_{i+1}×\cdots×b_{dim(t)}$∈t; es sind dann u, v durch i eindeutig bestimmt und ist u genau dann simpel, wenn i minimal ist. Induktiv auf die Dimension erkennt man jetzt ohne Mühe, dass jedes Tupel t sich auf genau eine Weise als $t=t_1×\cdots×t_a$ mit a∈Å und Simpeln t_1, …, t_a schreiben lässt (für a=0 ist dieser Schriftausdruck als der Nullraum ł zu lesen). *Nenne* a ≕ ‖t‖ die **Stellenzahl** und jedes 1≤i≤‖t‖ eine **Stelle von t**; zudem sei t_i für 1≤i≤‖t‖ der **i-te Sektor von t**, auch **Sektor von t an der Stelle i**. Es ist ‖t‖≤dim(t); Gleichheit besteht sicher dann, wenn t im Sinne der Inklusion minimal (ein Ort) oder maximal (ein Raum) ist; ist t ein Raum, so ist für 1≤i≤‖t‖ t_i=Å. Sei () ≔ ł, für Simpel R, S, T, … sei (R) ≔ R, (R, S) ≔ R×S, (R, S, T) ≔ R×S×T …. *Hiermit* gilt für jedes Tupel t: $t=(t_1, …, t_{‖t‖})$. Wir verstehen für a∈Å unter einem **a-Tupel** ein Tupel mit Stellenzahl a, und sagen anstelle von „2-Tupel, 3-Tupel" auch: **Paar**, **Tripel**.
Ein Tupel t heißt **wiederholungsfrei**, wenn für 1≤i<j≤‖t‖ gilt: $t_i≠t_j$.
Die Simpel sind gerade alle 1-Tupel; sie lassen sich kennzeichnen als diejenigen **analogen** (zu ł ungleichen) Tupel, welche sich nicht als Kreuzprodukt u×v von analogen Tupeln u, v schreiben lassen. Die Tupel mit Stellenzahl ≥2 sind gerade alle Ortschaften, welche **komplex** (*will sagen:* weder digital noch simpel) sind.
Beispiele für Simpel: Die nicht leeren Kommunen. Die Peanofolgen, speziell ʕ. Für jedes Tupel t die Ortschaften 8t, Å$^{dim(t)+2}$\8t (mithin sind insbesondere Î und der **Distinktor** Ĵ ≔ Å^{2}\Î simpel: nehme t=ł). Seien s, t Tupel. Nun: ‖s×t‖=‖s‖+‖t‖, und für 1≤i≤‖s‖ gilt: $(s×t)_i=s_i$, für 1≤j≤‖s‖: $(s×t)_{‖s‖+j}=t_j$. Hieraus folgt offenbar die

Kürzungsregel für ×: Für Tupel u, v, i, j mit u×i×v=u×j×v gilt: i=j. Eingeschränkt auf die Räume liefert die Kürzungsregel für × (vermittelt durch die chromatische Korrespondenz zwischen den Punkten und den Räumen) als weitere Regel die ***Kürzungsregel für +:*** Für a, b, i, j ∈Å mit a+i+b=a+j+b ist i=j. Kraft S2 besteht die ***Umkehrung von O1:*** Sind f, g Ortschaften, ist f×g ein Ort, so sind auch f, g Orte.
Zu a, b ∈Å mit b≥a existiert wegen der Kürzungsregel für + genau ein d∈Å mit a+d=b; d ≕ b−a≤b sei die **Differenz von a und b**. Für i, j, a ∈Å mit i, j ≤a gilt a−i=j genau dann, wenn a−j=i – sind doch beide Aussagen gleichbedeutend zu: a=i+j. Für a, b ∈Å gilt: a≤a+b mit (a+b)−b=a, falls a≥b: a−b≤a mit a−(a−b)=b. Es ist 0≤a mit a−0=a, a≤a mit a−a=0. Ist a≥1, so gilt: a−1=ʕ1a.
Sind a, a′ ∈Å mit a′≤a, ist f⊆$Å^{a}$, f′⊆$Å^{a′}$, so nenne f⇃f′ ≔ f∩(f′×$Å^{a-a′}$) die **Vorein-schränkung von f auf f′**, f⇂f′ ≔ f∩($Å^{a-a′}$×f′) die **Nacheinschränkung von f auf f′**.
Ein **Anfang** des Tupels t sei ein Tupel i mit i×j=t für ein geeignetes Tupel j; j sei dann ein **Rest von t**. Wegen t=t×ł=ł×t sind ł, t Anfänge und Reste von t. Ein Tupel s derart, dass es Tupel i, j gibt mit i×s×j=t, heißt ein **Teil von t**. Hiermit sind die Sektoren von t gerade alle simplen Teile von t. Jeder Anfang und jeder Rest von t ist Teil von t. Die Anfänge der Reste von t sowie die Reste der Anfänge von t sind gerade alle Teile von t. Anstelle von „zu t ungleich“ sagen wir hier auch: **echt**.

Für (i∈Å und) f, g ⊆$Å^{i}$ enthält f∪g ≔ $Å^{i}$\(($Å^{i}$\f)∩($Å^{i}$\g)) gerade alle a∈$Å^{i}$ mit a∈f *oder* a∈g, (f\g)∪(g\f) ≕ fΔg gerade alle a∈$Å^{i}$ mit a∈f *oder aber* a∈g. *Nenne* f∪g die **Vereinigung** und fΔg die **symmetrische Differenz von f und g**. fΔ∅=f. fΔf=∅. fΔg=gΔf=(f∪g)\(f∩g). Ist h⊆$Å^{i}$, so gilt: (fΔg)Δh=fΔ(gΔh), h∩(fΔg)=(h∩f)Δ(h∩g), h×(f∘g)=(h×f)∘(h×g), (f∘g)×h=(f×h)∘(g×h) – dabei stehe ∘ für \, ∩, ∪ oder Δ.
Wir setzen: {} ≔∅, und für äquidimensionale Orte r, s, t, u, …: {r} ≔ r, {r, s} ≔ r∪s, {r, s, t} ≔ r∪s∪t, {r, s, t, u} ≔ r∪s∪t∪u, …. Es sind die so darstellbaren Kommunen gerade alle endlichen Kommunen. Sind A, B endliche Kommunen, so sind die Kommunen A∪B, AΔB offensichtlich ebenfalls endlich.

Eine **Abbildung** sei eine analoge Ortschaft α derart, dass es zu a∈$\alpha^{\%}$ genau ein b∈Å gibt mit a×b∈α; b ≕ αa sei das **Bild von a**, und a ein **Urbild von b (bzgl. α)**. Enthält eine Kommune K jeden Punkt, welcher Bild eines Vororts von α ist, so *schreibe:* α: $\alpha^{\%}$→K; ist α **bildeindeutig** (*d. h.:* gilt für i, j∈$\alpha^{\%}$ mit i≠j: αi≠αj) auch: α: $\alpha^{\%}$↣K; ist jeder Standort von K Bild eines a∈$\alpha^{\%}$ auch: α: $\alpha^{\%}$↠K; falls α: $\alpha^{\%}$↣K *und* α: $\alpha^{\%}$↠K auch: α: $\alpha^{\%}$↔K. ∅: ∅↣K. *Per definitionem* sei jeder Punkt ein **Rang von ∅**. Ist α≠∅, so sei rg(α) ≔ dim($\alpha^{\%}$)=dim(α)−1 der **Rang von α**. *Nenne* eine Abbildung mit Rang a **a-rangig**. Es sind die Punkte gerade alle nicht leeren null-rangigen Abbildungen, für a∈Å gilt: a: ł↔a. *Nenne* α: f→K| α: f↣K| α: f↠K| α: f↔K eine Abbildung **von f nach K| in K| auf K| inauf K**. Ist u∈f und a=αu, so *schreibe:* α: f→K mit u↦a. Î: Å↔Å mit u↦u, ʕ: Å↔Å. *Nenne* α: f→K **konstant** falls für a, b ∈f gilt: αa=αb; es ist dann auch jeder analoge Rest von α eine konstante Abbildung. Konstant ist ∅ sowie jeder Punkt, jede weitere konstante Abbildung ist komplex, jede nicht konstante Abbildung ist simpel. Ein **Operator** sei eine Abbildung mit einem Raum als Rumpf. Die konstanten Operatoren sind gerade alle $Å^{a}$×b, a, b ∈Å. Jeder Punkt ist ein Operator. Î und jede Peanofolge, speziell ʕ, ist ein einrangiger Operator. Für α: f→Å, f′⊇f sei α′: f′→Å mit α′⇃f=α eine **Erweiterung von α auf f′**; *nenne* einhergehend α die **Einschränkung von α′ auf f.** ❷

Rekrutiere rekursiv zu jedem τ∈Å unter den analogen Tupeln die **Terme mit Tiefe τ**: Die Punkte im Verein mit den **Variablen** (*das seien* die Kommunen der Gestalt Å\a mit einem a∈Å, speziell also Å) sind gerade alle Terme mit Tiefe 0. Für τ∈Å sind die Terme mit Tiefe τ+1 gerade alle Tupel der Gestalt $o\times T_1\times\cdots\times T_{rg(o)}$ mit einem nicht punktuellen Operator o und Termen T_1, …, $T_{rg(o)}$, welche alle eine Tiefe ≤τ haben, dabei mindestens einer die Tiefe τ hat.
Ein Term T ist simpel oder aber komplex, je nachdem ob 0 Tiefe von T ist oder nicht. Jeder Sektor eines Terms ist ein Operator oder eine Variable.

Zeige induktiv für τ∈Å, dass für einen Term T mit einer Tiefe kleiner-gleich τ gilt: Ein echter Anfang von T ist selbst *kein* Term, und ein Tupel, welches T als echten Anfang hat, ist selbst *kein* Term.
Hierzu: Der Induktionsanfang „τ=0“ besteht, weil 0 genau dann Tiefe von T ist, wenn T simpel ist. Sei τ∈Å, die Behauptung gelte für jeden Term mit einer Tiefe kleiner-gleich τ. Zum Induktionsschritt ist zu zeigen: sie besteht auch falls τ+1 Tiefe von T ist, falls also $T=o\times T_1\times\cdots\times T_{rg(o)}$ mit einem nicht punktuellen Operator o und Termen T_1, …, $T_{rg(o)}$, welche alle eine Tiefe ≤τ haben (und mindestens ein Term die Tiefe τ). Befände sich unter den echten Anfängen von T oder unter den Tupeln, für welche T ein echter Anfang ist, ein Term S, so wäre S von der Gestalt $S=o\times S_1\times\cdots\times S_{rg(o)}$ mit Termen S_1, …, $S_{rg(o)}$. Für das Maximum μ der Kommune aller $1\leq i\leq rg(o)$ mit $S_i=T_i$ gälte jetzt: μ<rg(o) und $S_{\mu+1}$ ist ein echter Anfang von $T_{\mu+1}$, oder umgekehrt. Dies schließt die Induktionsvoraussetzung aber aus, weil $T_{\mu+1}$ eine Tiefe kleiner-gleich τ hat. Induktiv ist die Behauptung hiermit bewiesen.

Gestützt auf obiges Ergebnis erkennt man induktiv leicht, dass für τ∈Å gilt: Die Terme mit Tiefe τ haben τ als einzige Tiefe. Folglich ist die Tiefe eines Terms T eindeutig bestimmt; sie werde mit ƫT bezeichnet. Die Terme der Tiefe 0 sind gerade alle simplen Terme, also die Punkte und Variablen. Ist ein Term T **priorisch** (nicht zu den Variablen gehörig), so gilt: $T=o\times T_1\times\cdots\times T_{rg(o)}$ mit einem Operator o und Termen T_1, …, $T_{rg(o)}$, dabei ist o und jedes T_i, 1≤i≤rg(o), eindeutig bestimmt; *nenne* o =: ƿT den **Prior**, ħT ≔rg(o) die **Höhe**, jedes 1≤i≤ħT eine **Position** und T_i den **i-ten Faktor von T** oder **Faktor von T in der Position i**. Ist T komplex, so ist ƫT=$\max_{\leq}${ƫT_1, ⋯, ƫ$T_{rg(o)}$}+1. Ist ħT=1| 2| 3, so sei T **unifaktoriell| bifaktoriell| trifaktoriell**. Ein Term t, zu welchem es ein Tupel a gibt mit „a×t ist ein Anfang von T und Å ist kein Rest von a“ sei ein **Teilterm von T**. *Setze* für jede Variable x: ħx ≔ 0 sei die **Höhe von x**. Offensichtlich gilt für jeden Term T: ‖T‖>ƫT, ‖T‖>ħT.

Eine **Parametrik** sei ein wiederholungsfreier Ort mit nur Variablen als Sektoren (mithin ł und jede Variable eine Parametrik ist). Ein **Interpret von p** sei ein zu p **stellengleicher** Ort (hat dieselben Stellen wie p) I. Hat ein Term T keinen Sektor s mit „s ist eine Variable, welche nicht zu den Sektoren von p zählt“, so sagen wir: p **bedient T**; *definiere* dann den **Wert T(p, I) von T bei der Interpretation durch den Interpret I von p** rekursiv auf ƫT wie folgt: Ist T eine Variable, so sei T(p, I) ≔ I_i, dabei sei i die Stelle von p mit p_i=T. Ist $T=o\times T_1\times\cdots\times T_{rg(o)}$ priorisch, so sei T(p, I) ≔ o(T_1(p, I), …, $T_{rg(o)}$(p, I)). T heißt ein **Titel** falls T **variablenfrei** (kein Sektor von T eine Variable) ist; T(p, I)=T(ł, ł) ist dann unabhängig von p und I und heiße schlicht der **Wert von T**.

Induktiv auf die Tiefe prüft man leicht die Richtigkeit der folgenden Aussage nach: Sei p eine den Term T bedienende Parametrik, für $1 \le i \le \|p\|$ sei T_i ein Titel. Ist I der Interpret von p mit $I_i = T_i(ł, ł)$ für $1 \le i \le \|p\|$, so gilt: $T(p, I) = T'(ł, ł)$, dabei sei T' der Titel mit: $\|T'\| = \|T\|$. Für $1 \le i \le \|T\|$ gilt im Fall „T_i ist ein Sektor von p": $T'_i = t_j$, dabei sei $1 \le j \le \|p\|$ mit $p_j = T_i$; und gilt andernfalls: $T'_i = T_i$.

Die **booleschen Konstanten** $\top \coloneqq \hat{I}\backslash(0, 0)$, $\bot \coloneqq \hat{J}\cup(0, 0) = Å^2\backslash\top$ (das **Verum** und **Falsum**), die **Komparatoren** $\equiv \coloneqq \hat{I}\backslash(1, 1)$, $\not\equiv \coloneqq \hat{J}\cup(1, 1) = Å^2\backslash\equiv$ (der **bejahende** und **verneinende Komparator**), die **Junktoren** $\wedge \coloneqq \hat{I}\cup(0, 1)$, $\vee \coloneqq \hat{J}\backslash(0, 1) = Å^2\backslash\wedge$ (der **Konjunktor** sowie der **Adjunktor**), schließlich die **Quantoren** $\exists \coloneqq \hat{I}\cup(1, 0)$, $\forall \coloneqq \hat{J}\backslash(1, 0) = Å^2\backslash\exists$ (der **lokale** und der **globale Quantor**) heißen die **logischen Zeichen**. Alle acht gehören sie zu den Simpeln, welche weder zu den Operatoren noch zu den Variablen zählen.

Beziehe rekursiv zu $\nu \in Å$ die **Formen mit Verschachtelungsgrad ν** unter den Tupeln der Gestalt $p\times\zeta\times t$ mit einer Parametrik p, einem logischen Zeichen ζ und einem Tupel t: Die Tupel der Gestalt $p\times b$ oder $p\times k\times S\times T$, dabei p eine Parametrik, b eine boolesche Konstante, k ein Komparator ist, S, T von p bediente Terme sind, sind gerade alle Formen mit Verschachtelungsgrad 0. Für $\nu \in Å$ sind die Formen mit Verschachtelungsgrad $\nu+1$ gerade alle Tupel der Gestalt $p\times j\times s\times t$, dabei p eine Parametrik und j ein Junktor ist, und s, t Tupel sind sodass $p\times s$, $p\times t$ Formen mit Verschachtelungsgrad $\le\nu$ sind und $p\times s$ oder $p\times t$ den Verschachtelungsgrad ν hat, oder der Gestalt $p\times q\times x\times t$, dabei p eine Parametrik, q ein Quantor, x eine Variable und t ein Tupel ist derart, dass $p\times x\times t$ eine Form mit Verschachtelungsgrad ν ist.
Die Parametrik $p \eqqcolon ßF$ heißt das **Maß**, $\|ßF\|$ die **Maßzahl** und die Form F eine **$\|ßF\|$-Form**, das logische Zeichen ζ das **Logo** und das analoge Tupel $\zeta\times t \eqqcolon ʃF$ der **Formelteil von F**.

Eine **Formel** sei ein Tupel f, welches Formelteil einer Form F ist; *nenne* dann ßF eine **f bedienende** Parametrik. Eine Variable x, welche Sektor von f ist, sei ein **Parameter** oder eine **Laufvariable von f**, je nachdem ob x Sektor einer (und mithin jeder) f bedienenden Parametrik ist oder nicht; letzteres ist genau dann der Fall, wenn $\exists\times x$ oder $\forall\times x$ ein Teil von f ist. Ein Verschachtelungsgrad von F sei auch ein **Verschachtelungsgrad von f**. Das Logo von F sei auch das **Logo von f**.
Ein echter Anfang einer Formel ist selbst *keine* Formel, und ein Tupel, welches eine Formel als echten Anfang hat, ist selbst *keine* Formel. ***Hierzu:*** Zeige induktiv: Für $\nu \in Å$ besitzt eine Formel f mit einem Verschachtelungsgrad kleiner-gleich ν keinen echten Anfang, welcher zu den Formeln gehört, und ist f auch nicht echter Anfang einer Formel. Ist $\nu=0$, so ist eine boolesche Konstante oder ist $f=k\times S\times T$ mit Termen S, T und einem Komparator k, und die Behauptung ist klar bzw. ergibt sich leicht aus der entsprechenden Aussage über Terme. Gehe beim Induktionsschritt vor wie bei den (bifaktoriellen) Termen, mit einem Junktor oder Quantor in der Rolle des Priors und dem Verschachtelungsgrad in der Rolle der Tiefe.

Wie die Tiefe eines Terms ist auch der Verschachtelungsgrad $\underset{\smile}{v}\xi$ einer Form(el) ξ eindeutig bestimmt und kleiner als $\|\xi\|$. Die Formeln mit Verschachtelungsgrad 0 sind gerade alle booleschen Konstanten im Verein mit den Formeln der Gestalt