

HANSER

Regina Storm

Wahrscheinlichkeitsrechnung,  
mathematische Statistik  
und statistische  
Qualitätskontrolle

ISBN-10: 3-446-40906-8

ISBN-13: 978-3-446-40906-4

Inhaltsverzeichnis

Weitere Informationen oder Bestellungen unter  
<http://www.hanser.de/978-3-446-40906-4>  
sowie im Buchhandel

# Inhaltsverzeichnis

0	<b>Einleitung</b> .....	13
---	-------------------------	----

## WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

1	<b>Einführung</b> .....	15
---	-------------------------	----

2	<b>Ereignis, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit</b> .....	16
2.1	Zufällige Erscheinungen und Ereignisse.....	16
2.2	Relationen zwischen zufälligen Ereignissen.....	19
2.3	Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.....	21
2.4	Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit.....	24
2.5	Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit.....	27
2.6	Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten.....	29

3	<b>Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit</b> .....	31
3.1	Die bedingte Wahrscheinlichkeit.....	31
3.2	Unabhängigkeit von Ereignissen.....	33
3.3	Formel der totalen Wahrscheinlichkeit.....	34
3.4	Bayessche Formel.....	36

4	<b>Zufallsgrößen und ihre Verteilungsfunktionen</b> .....	37
4.1	Einführung der Zufallsgröße und ihrer Verteilungsfunktion.....	37
4.2	Verteilungen diskreter Zufallsgrößen.....	41
4.3	Verteilungen stetiger Zufallsgrößen.....	42
4.4	Erwartungswert und Streuung.....	43
4.5	Quantile.....	46

5	<b>Spezielle Verteilungen</b> .....	47
5.1	Diskrete Verteilungen.....	47
5.1.1	Die diskrete gleichmäßige Verteilung.....	47
5.1.2	Die Binomialverteilung.....	47
5.1.3	Die hypergeometrische Verteilung.....	53
5.1.4	Die Poisson-Verteilung.....	56
5.1.5	Die geometrische Verteilung.....	58
5.1.6	Die negative Binomialverteilung.....	60
5.2	Stetige Verteilungen.....	61
5.2.1	Die stetige gleichmäßige Verteilung.....	61
5.2.2	Die Normalverteilung.....	62
5.2.3	Die logarithmische Normalverteilung.....	70
5.2.4	Die Exponentialverteilung.....	72
5.2.5	Die Weibull-Verteilung.....	74
5.2.6	Die Gammaverteilung.....	75

6	<b>Zufällige Vektoren und ihre Verteilungsfunktionen</b> .....	77
6.1	Einführung des zufälligen Vektors.....	77
6.2	Verteilungen diskreter zufälliger Vektoren.....	79
6.3	Verteilungen stetiger zufälliger Vektoren.....	82

7	<b>Stochastische Prozesse</b> .....	85
7.1	Einführung des stochastischen Prozesses.....	85
7.2	Momente des stochastischen Prozesses.....	88
7.3	Stationäre Prozesse.....	89
7.3.1	Definition des stationären Prozesses.....	89
7.3.2	Einige wichtige stationäre Prozesse.....	90
7.4	Der Poisson-Prozeß.....	96

## MATHEMATISCHE STATISTIK

8	<b>Einführung</b> .....	99
9	<b>Beschreibende Statistik für eindimensionale Merkmale</b> .....	100
9.1	Urliste, Häufigkeitstabelle, empirische Verteilung.....	100
9.2	Grafische Darstellung von Häufigkeitsverteilungen.....	107
9.3	Statistische Maßzahlen.....	109
9.3.1	Mittelwerte.....	109
9.3.2	Streuungsmaße.....	114
9.3.3	Empirisches Quantil.....	118
10	<b>Beschreibende Statistik für zweidimensionale Merkmale</b> .....	119
10.1	Urliste, Korrelationstabelle, empirische Verteilung.....	119
10.2	Statistische Maßzahlen.....	125
10.3	Berechnung der empirischen Regressionsgeraden.....	129
11	<b>Grundgesamtheit, Stichprobe, Stichprobenfunktion</b> .....	134
11.1	Grundgesamtheit und Stichprobe.....	134
11.2	Stichprobenfunktionen.....	139
11.3	Einige wichtige Verteilungen von Stichprobenfunktionen.....	140
12	<b>Statistische Schätzmethoden</b> .....	145
12.1	Allgemeine Aufgabenstellung.....	145
12.2	Punktschätzungen.....	145
12.2.1	Schätzung, Schätzwert.....	145
12.2.2	Kriterien zur Auswahl einer Punktschätzung.....	147
12.2.3	Beispiele für Punktschätzungen.....	148
12.2.3.1	Punktschätzung für die Wahrscheinlichkeit $p$ .....	148
12.2.3.2	Punktschätzung für die Verteilungsfunktion $F(x)$ .....	148
12.2.3.3	Punktschätzungen für den Mittelwert $\mu$ der normalverteilten Grundgesamtheit.....	149
12.2.3.4	Punktschätzungen für die Streuung $\sigma^2$ der normalverteilten Grundgesamtheit.....	149
12.2.3.5	Punktschätzungen für den Parameter $\lambda$ der poissonverteilten Grundgesamtheit.....	151
12.2.4	Maximum-Likelihood-Schätzmethode.....	151
12.2.5	Methode der kleinsten Quadrate.....	155
12.3	Konfidenzschätzungen.....	156
12.3.1	Konfidenzintervalle.....	156

12.3.2	Konfidenzintervall für den Mittelwert $\mu$ der normalverteilten Grundgesamtheit bei bekanntem $\sigma^2$ .....	158
12.3.3	Konfidenzintervall für den Mittelwert $\mu$ der normalverteilten Grundgesamtheit bei unbekanntem $\sigma^2$ .....	161
12.3.4	Konfidenzintervall für die Streuung $\sigma^2$ der normalverteilten Grundgesamtheit.....	163
12.3.5	Konfidenzintervall für den Variationskoeffizienten $v$ der normalverteilten Grundgesamtheit.....	166
12.3.6	Konfidenzintervall für den Median einer stetigen Verteilung.....	166
12.3.7	Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit $p$ der alternativen Grundgesamtheit.....	167
12.4	Toleranzschätzungen.....	170
12.4.1	Statistische Toleranzgrenzen.....	170
12.4.2	Statistische Toleranzgrenzen für normalverteilte Grundgesamtheit.....	171
12.4.3	Verteilungsfreie statistische Toleranzgrenzen.....	172
<b>13</b>	<b>Statistische Tests</b> .....	<b>173</b>
13.1	Allgemeine Aufgabenstellung.....	173
13.2	Test für den Mittelwert $\mu$ der normalverteilten Grundgesamtheit bei bekannter Streuung $\sigma^2$ .....	174
13.2.1	Der statistische Test.....	174
13.2.2	Die Gütefunktion des Tests.....	182
13.2.3	Bestimmung des notwendigen Stichprobenumfangs.....	184
13.3	Test für den Mittelwert $\mu$ der normalverteilten Grundgesamtheit bei unbekannter Streuung $\sigma^2$ .....	185
13.4	Vergleich zweier Mittelwerte aus normalverteilten Grundgesamtheiten.....	188
13.4.1	Die beiden Stichproben sind verbunden.....	188
13.4.2	Die beiden Stichproben sind voneinander unabhängig.....	190
13.5	Test für die Streuung $\sigma^2$ der normalverteilten Grundgesamtheit.....	193
13.6	Vergleich zweier Streuungen aus normalverteilten Grundgesamtheiten.....	195
13.7	Prüfung der Verteilung der Grundgesamtheit.....	198
13.7.1	Einige Bemerkungen über die Voraussetzung der Normalverteilung.....	198
13.7.2	Grafische Verfahren zur Prüfung der Verteilung.....	199
13.7.2.1	Das Wahrscheinlichkeitsnetz.....	199
13.7.2.2	Das Weibull-Netz.....	203
13.7.3	Prüfung der Verteilung mit dem $\chi^2$ -Test.....	205
13.7.4	Prüfung der Verteilung mit dem Kolmogoroff-Test.....	211
13.8	Test für die Wahrscheinlichkeit $p$ der alternativen Grundgesamtheit.....	215
13.9	Vergleich zweier Wahrscheinlichkeiten aus alternativen Grundgesamtheiten.....	217
<b>14</b>	<b>Varianzanalyse</b> .....	<b>219</b>
14.1	Aufgabenstellung.....	219
14.2	Einfache Klassifikation für Modell I.....	221
14.2.1	Versuchsplan und mathematisches Modell.....	221
14.2.2	Zerlegung der Summe der Abweichungsquadrate.....	224
14.2.3	$F$ -Test zur Prüfung der Hypothese $H_0 (H_A)$ .....	225
14.2.4	Tafel der Varianzanalyse.....	226
14.2.5	Bartlett-Test.....	228

14.2.6	Multiple Mittelwertvergleiche.....	230
14.3	Zweifache Klassifikation für Modell I (einfache Besetzung).....	234
14.3.1	Versuchsplan und mathematisches Modell.....	234
14.3.2	Zerlegung der Summe der Abweichungsquadrate.....	236
14.3.3	$\mathcal{F}$ - Test zur Prüfung der Hypothesen $H_A$ und $H_B$ .....	238
14.3.4	Tafel der Varianzanalyse.....	238
14.4	Zweifache Klassifikation für Modell I (mehrfache Besetzung).....	240
14.4.1	Versuchsplan und mathematisches Modell.....	240
14.4.2	Zerlegung der Summe der Abweichungsquadrate.....	243
14.4.3	$\mathcal{F}$ - Test zur Prüfung der Hypothesen $H_A$ , $H_B$ und $H_{AB}$ .....	244
14.4.4	Tafel der Varianzanalyse.....	244
<b>15</b>	<b>Regressions- und Korrelationsanalyse.....</b>	<b>246</b>
15.1	Aufgabenstellung.....	246
15.2	Lineare Regression bei zwei meßbaren Merkmalen.....	247
15.2.1	Das Modell der einfachen linearen Regression.....	247
15.2.2	Test und Konfidenzintervall für den Regressionskoeffizienten.....	249
15.2.3	Test und Konfidenzintervall für die Regressionskonstante.....	250
15.2.4	Konfidenzintervalle für die Regressionsgerade.....	251
15.2.5	Vorhersageintervall für die Zielgröße.....	252
15.2.6	Vergleich zweier Regressionsgeraden.....	253
15.3	Mehrfache (multiple) lineare Regression.....	257
15.3.1	Das Modell der mehrfachen linearen Regression.....	257
15.3.2	Berechnung der empirischen Regressionsebene.....	258
15.3.3	Tests und Konfidenzintervalle für die Regressionskoeffizienten.....	262
15.4	Nichtlineare Regression.....	263
15.5	Lineare Korrelation bei zwei meßbaren Merkmalen.....	265
15.5.1	Voraussetzungen bei der linearen Korrelation.....	265
15.5.2	Test auf Unabhängigkeit der Merkmale.....	265
15.5.3	Prüfung des Grades des linearen Zusammenhangs zwischen zwei Merkmalen.....	266
15.5.4	Konfidenzintervall für den Korrelationskoeffizienten.....	268
15.5.5	Vergleich zweier Korrelationskoeffizienten.....	268
15.6	Partielle und mehrfache (multiple) lineare Korrelation.....	269
15.6.1	Partielle lineare Korrelation.....	270
15.6.2	Mehrfache (multiple) lineare Korrelation.....	274
<b>16</b>	<b>Prüfverfahren bei zwei qualitativen Merkmalen (Kontingenztafeln).....</b>	<b>276</b>
16.1	Test auf Unabhängigkeit der Merkmale.....	276
16.2	Kontingenzmaße für die Stärke des Zusammenhangs.....	279
<b>17</b>	<b>Einige nichtparametrische Tests.....</b>	<b>281</b>
17.1	Einführung.....	281
17.2	Vorzeichentest.....	282
17.2.1	Vorzeichentest zum Vergleich verbundener Stichproben.....	282
17.2.2	Vorzeichentest zur Prüfung des Medians einer Verteilung.....	285
17.3	Wilcoxon-(Mann-Whitney-U-) Test.....	286
17.4	X-Test von van der Waerden.....	291

<b>18</b>	<b>Das Ausreißerproblem</b>	295
18.1	Ausreißertests	295
18.2	Zweiseitiger Ausreißertest für normalverteilte Grundgesamtheit	296
18.3	Ausreißertests nach Dixon	297
<b>19</b>	<b>Die Zeitreihenanalyse</b>	298
19.1	Einführung	298
19.2	Beispiele für Zeitreihen	300
19.3	Zerlegung einer Zeitreihe in Komponenten	303
19.4	Methoden zur Schätzung und Elimination des Trends	304
19.4.1	Schätzung des Trends mit Regression	304
19.4.2	Glätten von Zeitreihen	306
19.4.3	Die Differenzenmethode	309
19.5	Methoden zur Elimination und Schätzung der Saisonkomponente	311
19.6	Modellierung einer Zeitreihe durch einen stochastischen Prozeß	315
19.7	Statistische Analyse stationärer Prozesse	317
19.7.1	Schätzung von Mittelwert- und Autokorrelationsfunktion	317
19.7.2	Anpassung eines ARIMA-Prozesses	319
19.8	Prognose	322

## STATISTISCHE QUALITÄTSKONTROLLE

<b>20</b>	<b>Aufgaben und Methoden</b>	325
<b>21</b>	<b>Statistische Prozeßkontrolle</b>	326
21.1	Einführung	326
21.2	Kontrollkarten für die messende Prüfung	327
21.2.1	Mittelwertkarte ( $\bar{x}$ -Karte)	327
21.2.1.1	Aufbau der Mittelwertkarte	327
21.2.1.2	Berechnung der Kontrollgrenzen	331
21.2.1.2.1	Wahl von $\alpha$ und $n$	331
21.2.1.2.2	Sollwert $a$ und Streuung $\sigma^2$ sind bekannt	333
21.2.1.2.3	Schätzwerte für $a$ und $\sigma$ aus dem Vorlauf	333
21.2.1.3	Führung der Kontrollkarte	340
21.2.1.4	Die mittlere Lauflänge	341
21.2.2	Mediankarte ( $\tilde{x}$ -Karte)	344
21.2.3	$\bar{x}/s$ -Karte	345
21.2.4	Die Prozeßfähigkeit	347
21.3	Kontrollkarten für die zählende Prüfung	350
21.3.1	$p$ -Karte	350
21.4	Kontrollkarten mit Gedächtnis	355
21.5	Kostenoptimale Prozeßkontrolle	359
<b>22</b>	<b>Annahmestichprobenprüfung</b>	360
22.1	Einführung	360
22.2	Prüfpläne für die Attributprüfung	362
22.2.1	Einfache Stichprobenprüfung	362
22.2.1.1	Aufbau eines einfachen Prüfplans	362
22.2.1.2	Operationscharakteristik für den einfachen Prüfplan	364
22.2.1.3	Bestimmung der Kenngrößen des Prüfplans	367

22.2.1.4	Durchschlupf und mittlerer Prüfaufwand.....	368
22.2.2	Doppelte Stichprobenprüfung.....	369
22.2.3	Mehrfach- und Sequential-Stichprobenprüfung.....	372
22.3	Prüfpläne für die Variablenprüfung.....	373
22.3.1	Aufbau eines einfachen Prüfplans.....	373
22.3.2	Operationscharakteristik für den Prüfplan.....	376
22.3.3	Bestimmung der Kenngrößen des Prüfplans.....	377
22.4	Standardisierung von Prüfplänen.....	379
22.4.1	Stichprobensysteme.....	379
22.4.2	Stichprobensysteme für die Attributprüfung.....	379
22.4.3	Stichprobensysteme für die Variablenprüfung.....	381

## Anhang

Tafel I:	Verteilungsdichte $\phi(x)$ der standardisierten Normalverteilung.....	384
Tafel II:	Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der standardisierten Normalverteilung.....	386
Tafel III:	Quantile $z_q$ der standardisierten Normalverteilung.....	388
Tafel IV:	Zweistellige Zufallszahlen.....	389
Tafel V:	Quantile $t_{m,q}$ der $t$ -Verteilung.....	390
Tafel VI:	Quantile $\chi^2_{m,q}$ der $\chi^2$ -Verteilung.....	391
Tafel VII:	Quantile $F_{m_1,m_2,q}$ der $F$ -Verteilung für $q = 0,95$ und $q = 0,99$ .....	392
Tafel VIII:	Kritische Werte für den Kolmogoroff-Test.....	398
Tafel IX:	Toleranzfaktoren $k_{n,\beta,\gamma}$ für normalverteilte Grundgesamtheit ( $\mu$ und $\sigma^2$ unbekannt).....	399
Tafel X:	Mindeststichprobenumfang $n_0$ für zweiseitiges verteilungsfreies Toleranzintervall.....	400
Tafel XI:	Mindeststichprobenumfang $\tilde{n}_0$ für einseitiges verteilungsfreies To- leranzintervall.....	400
Tafel XII:	Kritische Werte $l_{n_1,1-\frac{\alpha}{2}}$ für den Lord-Test zur Prüfung von $H_0: \mu = \mu_0$ .....	400
Tafel XIII:	Kritische Werte $l_{n_1,n_2,1-\frac{\alpha}{2}}$ für den Spannweitentest nach Lord zur Prü- fung von $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ( $n_1 = n_2$ ).....	400
Tafel XIV:	Kritische Werte $p_{n_1,n_2,1-\alpha}$ für den Test nach Pillai und Buenaventura zur Prüfung von $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ für $\alpha = 0,05$ und $\alpha = 0,01$ .....	401
Tafel XV:	Quantile $a_{m_1,m_2,q}$ der Verteilung der studentisierten Variationsbreite ( $q = 0,95$ und $q = 0,99$ ).....	402
Tafel XVI:	Zufallshöchstwerte des Korrelationskoeffizienten.....	404
Tafel XVII:	Kritische Werte für den X-Test von van der Waerden.....	405
Tafel XVIII:	Kritische Werte $w_{n,\alpha}$ für den Ausreißertest bei normalverteilter Grund- gesamtheit ( $\mu$ und $\sigma^2$ unbekannt).....	407
Tafel XIX:	Kritische Werte $\tau_{n,\alpha}$ für die Ausreißertests nach Dixon.....	407
Tafel XX:	Faktoren zur Berechnung der Kontrollgrenzen.....	408
Literatur- und Quellenverzeichnis.....		410
Auswahl englischer Fachausdrücke.....		417
Sachwortverzeichnis.....		420