Günter Strassert

Das Ordnen von Optionen und die Theorie der kollektiven Entscheidung

Wie durch individuelle Ordnungen kollektive Ordnungen und zirkuläre Triaden hergestellt werden

PL ACADEMIC RESEARCH

2. Das System von elementaren Gleichungen im Basis-Fall

2.1 Das „Strikte Condorcet-Paradoxon“

Der *Basis-Fall* sei charakterisiert durch die Aufgabe einer Gruppe von 3 Personen (kurz Wähler genannt), mittels Mehrheitsbeschluss eine strikte Rangordnung von 3 Kandidaten (*a, b, c*) herzustellen.

Sofern diese Aufgabe erfolgreich gelöst wird, hat eine Gruppenentscheidung stattgefunden, deren Ergebnis als *kollektive Rangordnung* oder einfach nur *kollektive Ordnung* bezeichnet werden kann.

Im Folgenden werden ausschließlich strikte Ordnungen, ob individuelle oder kollektive, behandelt; der Zusatz *strikt* könnte daher entfallen.

Eine Rangordnung, wird *strikt* genannt, wenn sie die Eigenschaften der Vollständigkeit, Asymmetrie und Transitivität erfüllt (Kern/Nida-Rümelin, 1994: 5).

Vollständigkeit ist gegeben, wenn alle *n* Kandidaten, hier also die Kandidaten *a*, *b* und *c*, in den individuellen Ordnungen enthalten sind.

Asymmetrie bedeutet, dass Indifferenz ausgeschlossen ist, d.h. zwei Kandidaten nicht denselben Rangplatz erhalten können. Z.B. gilt daher: $\langle a,b\rangle \neq \langle b,a\rangle$.[6]

Transitivität ist eine Konsistenzbedingung der Logik für Tripel von Kandidaten, d.h. die paarweisen Vergleiche von Kandidaten sind nur logisch konsistent, wenn gilt: $\langle a,b\rangle \wedge \langle b,c\rangle \rightarrow \langle a,c\rangle$. D.h., sind die Teilordnungen $\langle a,b\rangle$ und $\langle b,c\rangle$ gegeben, dann impliziert dies logischerweise die Teilordnung $\langle a,c\rangle$. Ist die Transitivitätsbedingung für jedes Tripel von Kandidaten erfüllt, dann ist sie auch für die Gesamtheit aller Kandidaten bzw. aller entsprechenden Tripel erfüllt (z.B. van Acker, 1990: 2).

Im Folgenden wird angenommen, dass jedes Mitglied einer Gruppe in der Lage sei, eine *strikte individuelle Ordnung* zu bestimmen, also intransitive individuelle Ordnungen vermeiden kann. Zweck dieser rigorosen Annahme ist, den kontroversen Problembereich der individuellen kognitiven Entscheidungstheorie auszuklammern, um die kombinationstheoretischen Bestimmungsgründe kollek-

6 Eine binäre asymmetrische Relation wird wegen ihrer Eigenschaft, eine eindeutige Vor- und Nachordnung zu stiften, auch als *Dominanzrelation* bezeichnet, und für die mit Hilfe von Dominanzrelationen gebildete Rangordnung wird in der Verhaltensbiologie plastisch der Begriff *Hackordnung* verwendet (z.B. Landau, 1951a und b, 1953).

tiver Entscheidungen möglichst einfach, d.h. nur auf der Grundlage von strikten individuellen Ordnungen, darstellen zu können.[7]

Die Anzahl der theoretisch möglichen *individuellen Ordnungen*, V_i, beträgt $n! = s$. Bei $n = 3$ Kandidaten (a, b, c) gibt es also $s = 6$ mögliche individuelle Ordnungen $(V_i; i = 1,2,\dots,s)$, ausgedrückt als sechs geordnete Tripel (Tabelle 1):

Tabelle 1: Individuelle Ordnungen (Tripel) für n = 3 Kandidaten

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
$\langle a,b,c\rangle$	$\langle a,c,b\rangle$	$\langle b,a,c\rangle$	$\langle b,c,a\rangle$	$\langle c,a,b\rangle$	$\langle c,b,a\rangle$

Eine *kollektive Ordnung*, mit S_i bezeichnet, wird von einer Menge von individuellen Ordnungen, V_i, hergestellt, wobei auch hier gilt: $i = 1,2,\dots, s$.

Wie kollektive Ordnungen durch individuelle Ordnungen hergestellt werden, sei an Hand so genannter Wähler-Profile (voter profiles) erläutert. Sei w_i die Anzahl von Wählern, welche auf eine der sechs individuellen Ordnungen entfällt, dann gilt $\sum_{i=1}^{s=6} w_i = p$, d.h. die Summe aller Besatzziffern w_i ist gleich der Anzahl der Wähler.

Da jeder individuellen Ordnung V_i eine eigene Besatzziffer w_i entspricht, beträgt die Anzahl der verschiedenen Besatzziffern: $w = s$.

Wird die Tabelle 1 erweitert, indem Zeilen für die Besatzziffern w_i hinzugefügt werden, können in neun Zeilen die Wähler-Profile aufgeführt werden, welche zu den kollektiven Ordnungen S_1 bis S_6 führen. Z.B. wird die kollektive Ordnung $S_1 = \langle a,b,c\rangle$ durch die folgenden neun Wähler-Profile hergestellt (Tabelle 2).

Die erste Zeile repräsentiert z.B. ein Wähler-Profil, bei welchem alle drei Wähler dieselbe individuelle Ordnung $V_1 = \langle a,b,c\rangle$ aufweisen ($w_1 = 3 = p$).

Logischerweise muss die kollektive Ordnung $S_1 = \langle a,b,c\rangle$ entstehen, weil eine tatsächlich oder gedachte Abstimmung über die drei paarweisen Vergleiche a/b, a/c und b/c bei Anwendung der Mehrheitsbedingung $\frac{1}{2}\cdot(p+1)=2$, zu den Teilordnungen $\langle a,b\rangle$, $\langle a,c\rangle$ und $\langle b,c\rangle$ führen würde, und zwar drei Mal mit dem Ergebnis 3 : 0, d.h. drei Fürstimmen und Null Gegenstimmen.

7 Unbestritten ist, dass eine Entscheidungsperson im Rahmen eines individuellen komplexen multikriteriellen Entscheidungsproblems zu einer intransitiven individuellen Ordnung gelangen kann, weil ihr es nicht gelingt, die durch die Kriterien gestifteten verschiedenen Teil-Ordnungen in eine finale (overall) transitive Ordnung zu bringen (z.B. May, 1954; van Acker, 1990). Dies wird insbesondere dann der Fall sein, wenn die Anzahl n der Optionen groß ist und das Entscheidungsproblem nicht so weit spezifiziert ist, dass widersprüchliche Entscheidungen vermieden werden können.

Tabelle 2: Wähler-Profile für die kollektive Ordnung $S_1 = \langle a,b,c \rangle$

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
$\langle a,b,c \rangle$	$\langle a,c,b \rangle$	$\langle b,a,c \rangle$	$\langle b,c,a \rangle$	$\langle c,a,b \rangle$	$\langle c,b,a \rangle$
Wähler-Profile für die kollektive Ordnung $S_1 = \langle a,b,c \rangle$					
w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
3	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0
2	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0

Da bei diesem Beispiel zwei Fürstimmen für die einfache Mehrheit ausreichen, gibt es hier acht weitere Möglichkeiten der Verteilung von drei Stimmen auf die individuellen Ordnungen, welche ebenfalls zu der kollektiven Ordnung $S_1 = \langle a,b,c \rangle$ führen. Insgesamt gibt es also neun Wähler-Profile und entsprechend neun Zeilen in Tabelle 2.

Auf analoge Weise bestimmen sich die übrigen fünf kollektiven Ordnungen (S_2 bis S_6).

Im folgenden Gliederungspunkt wird die Gesamtheit der kollektiven Ordnungen kombinationstheoretisch, d.h. mit Hilfe von *Binomialkoeffizienten*, bestimmt.

Es gibt jedoch auch Wähler-Profile, welche nicht zu kollektiven Ordnungen führen, sondern zu zirkulären Triaden. In diesem Beispiel ($n = 3$; $p = 3$) werden zwei zirkuläre Triaden hergestellt, und zwar durch die beiden im Folgenden aufgeführten Wähler-Profile (Tabelle 3). Die zirkuläre Triade $Z_r = \overline{abca}$ entsteht, weil das in der ersten Zeile aufgeführte Wähler-Profil bedeutet, dass bei den paarweisen Vergleichen *a/b, b/c* und *c/a* jeweils die Mehrheitsbedingung für die kollektiven Teil-Ordnungen $\langle a,b \rangle$, $\langle b,c \rangle$ und $\langle c,a \rangle$ erfüllt ist. Das Wähler-Profil in der zweiten Zeile impliziert, dass bei den paarweisen Vergleichen *a/c, c/b* und b/a jeweils die Mehrheitsbedingung für die Teil-Ordnungen $\langle a,c \rangle$, $\langle c,b \rangle$ und $\langle b,a \rangle$ erfüllt ist, so dass sich die zirkuläre Triade $Z_r = \overline{acba}$ ergibt. Das tiefgestellte r bzw. l steht bei Anordnung der Kandidaten als Dreieck für die Richtung eines Zirkels, d.h. r für rechtsherum bzw. l für linksherum.

Tabelle 3: Wähler-Profile für zwei Typen einer zirkulären Triade: Z_r und Z_l

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	Typen zirkulärer Triaden	
$\langle a,b,c\rangle$	$\langle a,c,b\rangle$	$\langle b,a,c\rangle$	$\langle b,c,a\rangle$	$\langle c,a,b\rangle$	$\langle c,b,a\rangle$		
						Typ 1	Typ 2
w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	Z_r	Z_l
1	0	0	1	1	0	$\overline{abca}$	
0	1	1	0	0	1		$\overline{acba}$

Beide Typen von zirkulären Triaden sind im Fall von n = 3 jeweils ein Mal besetzt, sind aber, wie zu zeigen sein wird, mit zunehmender Anzahl p von Wählern vielfach besetzt.

Wenn sich die Mehrheitsbedingung $\frac{1}{2}\cdot(p+1)$ auf mehr als 50% der Wähler bezieht, wenn also für p ungerade gilt: $\frac{1}{2}\cdot(p+1) \rangle \frac{1}{2}\cdot p$, dann repräsentieren die beiden Typen der zirkulären Triade ein so genanntes *striktes Condorcet Paradoxon* (strict Condorcet paradox; Lepelley/Martin, 2001:164), welches immer auftritt, wenn wie hier nur strikte individuelle Ordnungen und ungerade Anzahlen von Wählern betrachtet werden.

Ein striktes Condorcet-Paradoxon kann durch die folgenden drei Teilbedingungen charakterisiert werden (Gehrlein, 1997:74), (Tabelle 4):

Durch Addition ergeben sich auf beiden Seiten Mehrheiten für die folgenden Elemente und damit die folgenden beiden allgemeinen Bedingungen:

$$w_1 + w_4 + w_5 \succ w_2 + w_3 + w_6$$

und

$$w_2 + w_3 + w_6 \succ w_1 + w_4 + w_5$$

welche einerseits notwendige Bedingungen sind, sich aber andererseits als nicht hinreichende Bedingungen erweisen werden, wenn die Anzahl der Wähler zunimmt (Siehe hierzu Kapitel 4.).

Tabelle 4: Teilbedingungen für die beiden Typen der zirkulären Triade

Typ 1 $Z_r = \overline{abca}$	Typ 2 $Z_l = \overline{acba}$
$\langle a,b \rangle \rightarrow$ $w_1 + w_4 + w_5 \succ w_2 + w_3 + w_6$	$\langle a,c \rangle \rightarrow$ $w_1 + w_4 + w_5 \succ w_2 + w_3 + w_6$
$\langle b,c \rangle \rightarrow$ $w_1 + w_3 + w_4 \succ w_2 + w_5 + w_6$	$\langle c,b \rangle \rightarrow$ $w_2 + w_5 + w_6 \succ w_1 + w_3 + w_4$
$\langle c,a \rangle \rightarrow$ $w_4 + w_5 + w_6 \succ w_1 + w_2 + w_3$	$\langle b,a \rangle \rightarrow$ $w_3 + w_4 + w_6 \succ w_1 + w_2 + w_5$

Die bisherigen Erkenntnisse lassen sich zusammenfassend und verallgemeinernd auch wie folgt formulieren: eine zirkuläre Triade Z ergibt sich dann, wenn im Fall von $n = 3$ Optionen $\langle a,b,c \rangle$ und $p = 3$ Wählern aus den $n! = s = 6$ individuellen Ordnungen als kollektive Ordnung ein Tripel $\langle V_i, V_j, V_k \rangle \Rightarrow Z$ gebildet wird mit der Eigenschaft, dass jede Option je einmal an erster, zweiter und dritter Stelle in einer der individuellen Ordnungen steht. [8]

2.2 Der Möglichkeitsbereich für Tripel individueller Ordnungen

2.2.1 Kombinationen mit Wiederholung

Wenn in einem Tripel von individuellen Ordnungen $\langle V_i, V_j, V_k \rangle$ für jedes der drei Elemente $n! = s$ individuelle Ordnungen zur Verfügung stehen, $i, j, k = 1,2,...,s$, dann ist die Menge der möglichen Tripel kombinationstheoretisch bestimmt durch den *Binomialkoeffizienten*

8 Diese Formulierung ist hilfreich bei der Definition einer strikten kollektiven Ordnung $\langle V_i, V_j, V_k \rangle \Rightarrow S$. Zum einen, weil es dann genügt, die genannte Eigenschaft als nicht existent anzunehmen. Zum anderen, weil damit der Bezug zu der von Black (1958) eingeführten Bedingung von der sogenannten Eingipfeligkeit hergestellt wird. Siehe hierzu weiter oben Kapitel 1.

$$C^w(n,p) = \binom{s+p-1}{p}. \qquad (1)$$

Das hochgestellte *w* Steht für *Wiederholung*, d.h. eine bestimmte Ordnung, z.B. V_1, kann von mehr als einem Wähler *p* gewählt werden, deshalb könnte ein Tripel z.B. auch $\langle V_1, V_1, V_1 \rangle$ lauten.

Der Klammerzusatz (*n,p*) bezeichnet die Abhängigkeit der Menge der möglichen Kombinationen von der Anzahl *n* der Kandidaten und damit von der Anzahl *s* der Elemente, welche zu kombinieren sind, sowie von der Anzahl *p* der Elemente (Auswahl genannt), welche eine Kombination enthalten soll. Eine Kombination muss mindestens 3 Elemente und kann höchstens *n* Elemente enthalten, daher gilt;

$$3 \leq p \leq n.$$

Im Fall von $n = 3$ muss also auch $p = 3$ sein, d.h. alle Kombinationen sind Tripel. D.h. *p* bezeichnet 3-elementige Tripel von individuellen Ordnungen $\langle V_i, V_j, V_k \rangle$ mit $i, j, k = 1,2,...,s$.

Insgesamt gibt es genau 56 Tripel als *Kombinationen mit Wiederholung*:

$$C^w(3,3) = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56.$$

Eine vollständige Übersicht über die 56 Möglichkeiten der Kombination der sechs individuellen Ordnungen gibt Tabelle 5

Die 56 Kombinationen bzw. Tripel setzen sich zusammen aus 54 Kombinationen bzw. Tripel, welche die kollektiven Ordnungen S_1 bis S_6 ergeben, und zwar (spaltenweise) jeweils neun Mal, und aus zwei zirkulären Triaden, d.h. $Z_r = \overline{abca}$ und $Z_l = \overline{acba}$.

Im linken Teil der Tabelle 5 sind den sechs Spalten für die kollektiven Ordnungen S_1 bis S_6 zeilenweise diejenigen Tripel von individuellen Ordnungen, V_1 bis V_6 zugeordnet, welche die im Kopf einer Spalte aufgeführte kollektive Ordnung herstellen.

Zeilenweise werden anstelle der ausführlicheren Schreibweise, z.B. der Ordnung $\langle V_1, V_2, V_3 \rangle$, der Einfachheit halber nur die Zahlenindizes verwendet, d.h. $\langle V_1, V_2, V_3 \rangle$ wird zu 123. Die Zeileneinteilung richtet sich nach der Anfangsziffer: in der ersten Zeile werden diejenigen Tripel eingetragen, welche mit der Anfangsziffer 1 beginnen, die zweite Zeile enthält diejenigen Tripel, welche mit der Anfangsziffer 2 beginnen, usw. bis zur sechsten Zeile, welche nur das Tripel 666 enthält.

Durch die Vorgabe des jeweils ersten Elements der Tripel ist in den in Spalte 9 aufgeführten Binomialkoeffizienten das untere Element *r* um 1 kleiner, d.h. es gilt $(r-1)$, da ja im Grunde nur noch Paare von individuellen Ordnungen gebildet