4.3 Schwarzschild-Geodäten

In der Schwarzschild-Raumzeit gilt $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Tatsächlich für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$

$$\begin{aligned}\sum_k \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right)\frac{\partial}{\partial x_k} f &= \left(\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_j}\partial_i\right) f \\ &= \left[\partial_i, \partial_j\right] f \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.9}$$

Das Linienelement ds^2 der Schwarzschild-Raumzeit (in den Schwarzschild-Koordinaten) ist

$$\begin{aligned}ds^2 &= \sum_{i=0}^{3} g_{ii} dx_i^2,\ mit \\ g_{00} &= -h(r),\ g_{11} = h^{-1}(r), \\ g_{22} &= r^2,\ g_{33} = r^2 \sin^2 \vartheta.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Nimmt man in der zweiten Gleichung von (4.3) für X, Y und Z alle Permutationen von ∂_i, ∂_j und ∂_k an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} &= g\left(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\right) + g\left(\partial_j, \nabla_{\partial_i}\partial_k\right) \\ &= g_{kk}\Gamma_{ij}^k + g_{jj}\Gamma_{ik}^j \\ \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} &= g_{kk}\Gamma_{ij}^k + g_{ii}\Gamma_{jk}^i \\ \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} &= g_{jj}\Gamma_{ki}^j + g_{ii}\Gamma_{kj}^i.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Daraus folgt für die **Christoffel-Symbole in den Schwarzschild-Koordinaten**

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{g_{kk}^{-1}}{2}\Big(- \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}\Big) \tag{4.12}$$

Es sei noch darauf hingewiesen, $(\Gamma_{ij}^{k})_{ijk}$ ist kein Tensor, d.h. definiert keine koordinatenunabhängige lineare Abbildung. Nachdem wir die Christoffel-Symbole der Schwarzschild-Raumzeit in den Schwarzschild-Koor-dinaten bestimmt haben, leiten wir die Geodätengleichungen her. Es seien (x_0, x_1, x_2, x_3) Koordinaten des $\mathbb{R}^4$ und

$$\gamma = \{(x_0(\tau), x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau)) : \tau \in \mathbb{R}\}$$

eine Geodäte und

$$\begin{aligned}\gamma' &= x_0'\partial_0 + x_1'\partial_1 + x_2'\partial_2 + x_3'\partial_3 \\ &= \sum_{i=0}^{3} \frac{dx_i}{d\tau}\partial_i\end{aligned}$$

die Tangente in $(x_0(\tau), x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\nabla_{\gamma'}\gamma' &= \sum_i x_i'\nabla_{\partial_i}\gamma' \\ &= \sum_{i,j} x_i'\nabla_{\partial_i}x_j'\partial_j \\ &= \sum_{i,j} x_i'\frac{\partial}{\partial x_i}x_j'\partial_j + \sum_{i,j} x_i'x_j'\nabla_{\partial_i}\partial_j \\ &= \sum_k \Big[\sum_i x_i'\frac{\partial x_k'}{\partial x_i} + \sum_{i,j} x_i'x_j'\Gamma_{ij}^{k}\Big]\partial_k \\ &= \sum_k \Big[x_k'\frac{d^2x_k}{d\tau^2}\frac{d\tau}{dx_k} + \sum_{i,j} x_i'x_j'\Gamma_{ij}^{k}\Big]\partial_k\end{aligned} \tag{4.13}$$

Da γ eine Geodäte ist, verschwinden alle Koeffizienten der tangentialen Koordinatenvektoren ∂_k:

$$\frac{d^2x_k}{d\tau^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \frac{dx_i}{d\tau}\frac{dx_j}{d\tau}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{4.14}$$

Man beachte, (4.14) ist die Geodätengleichung für ein beliebiges Koordinatensystem im $\mathbb{R}^4$ Nach dem Einsetzen von (4.12) für die Christoffel-Symbole erhalten wir die Geodätengleichungen in den Schwarzschild-Koordinaten:

Lemma 2 (Geodätengleichugen) *Es sei* $(\mathbb{R}^4, g)$ *eine Schwarzschild-Raumzeit mit den Schwarzschild-Koordinaten* $x_0 = t,\ x_1 = r,\ x_2 = \vartheta,\ x_3 = \varphi$ *und mit dem Schwarzschild-Metrik-Tensor* $g = diag(g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33})$*, wobei* $g_{00} = -h(r)$*,* $g_{11} = h^{-1}(r)$*,* $g_{22} = r^2$ *und* $g_{33} = r^2 \sin^2\vartheta$*. Dann lauten die Geodätengleichungen*

$$\frac{d}{d\tau}\Big[g_{kk}\Big(\frac{dx_k}{d\tau}\Big)\Big] = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k}\Big(\frac{dx_i}{d\tau}\Big)^2, \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{4.15}$$

Da alle g_{ii} von t und φ unabhängig sind, folgt aus (4.15) für $k = 0$ und $k = 3$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\Big[-h\frac{dt}{d\tau}\Big] &= 0 \ \mathit{und} \\ \frac{d}{d\tau}\Big[r^2\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{d\tau}\Big] &= 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Das bedeutet für jede Geodäte existieren zwei Konstanten E - genannt Energie der Geodäte - und L - genannt Drehimpuls der Geodäte - so, dass

$$\begin{aligned} h(r)\frac{dt}{d\tau} &\equiv E, \\ r^2\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{d\tau} &\equiv L. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Nur g_{33} hängt von ϑ ab. Deshalb gibt die Geodätengleichung (4.15) für $k = 2$

$$\frac{d}{d\tau}\left[r^2 \frac{d\vartheta}{d\tau}\right] = r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \tag{4.18}$$

Fügt man (4.17) und (4.18) zusammen, so erhält man die **Bewegungsgleichungen** einer Geodäte:

Lemma 3 (Bewegungsgleichungen) *Es seien $(\mathbb{R}^4, g)$ eine Schwarzschild-Raumzeit, $(t, r, \vartheta, \varphi)$ die Schwarzschild-Koordinaten dieser Raum-Zeit und γ eine Geodäte. Dann existieren Konstanten E und L so, dass*

$$\begin{aligned} h(r)\frac{dt}{d\tau} &\equiv E, \\ r^2 \sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{d\tau} &\equiv L, \\ \frac{d}{d\tau}\left[r^2 \frac{d\vartheta}{d\tau}\right] &= r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Nun zu einer weiteren sehr wichtigen - in der Literatur bekannten (siehe z.B. [1]) - Eigenschaft einer einzelnen Geodäte. Es sei γ eine Geodäte der Schwarzschild-Raumzeit $(\mathbb{R}^4, g)$ in Schwarzschild-Koordinaten $(t, r, \vartheta, \varphi)$.

Definition 14 (äquatorial beginnend) *Die Geodäte γ heißt äquatorial beginnend relativ zu den Schwarzschild-Koordinaten, falls für einen Anfangswert $\tau = 0$*

$$\vartheta(0) = \frac{\pi}{2} \quad \textit{und} \quad \frac{d\vartheta}{d\tau}(0) = 0.$$

Jeder Kurve $\mathbb{R} \supset (a, b) \to \mathbb{R}^4$ wird eine **Eigenzeit** τ zugeordnet. Nämlich, die ab einem Startpunkt so gemessene Bogenlänge, dass

$$d\tau^2 = -ds^2. \tag{4.20}$$

Wir setzen im Weiteren ohne besonderen Hinweis immer voraus, dass die Geodäte nach der Eigenzeit parametrisiert ist. Eine Geodäte mit $\vartheta \equiv \frac{\pi}{2}$ genügt der dritten Bewegungsgleichung (4.19). Ist die Geodäte äquatorial beginnend, so wird die Lösung als Randwertaufgabe eindeutig. Mit anderen Worten,

Lemma 4 (Äquatorialebene) *Eine äquatorial beginnende Geodäte γ liegt immer in der "Äquatorialebene"*

$$\{(t, r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times_r S^2 : \vartheta \equiv \frac{\pi}{2}\}.$$

Das heißt äquatorial beginnende Geodäten liegen im Raumteil in der Äquatorialebene.

Die Projektion einer Geodäte in den Raumteil wird das **Orbit** der Geodäte genannt. Das Orbit einer äquatorial beginnenden Geodäte ist immer eine ebene Figur. Dies war eine kurze Zusammenstellung bekannter, für uns im Weiteren wichtiger, Eigenschaften von Geodäten.

Die Geodäte γ sei nicht äquatorial beginnend, d.h. es existiert kein Wert $\tau = \tau_0$ für den $\vartheta(\tau_0) = \pi/2$ und $\vartheta'(\tau_0) = 0$. Nach geeigneter Rotation s des Bezugssystems der räumlichen Kugelkoordinaten des Schwarzschild-Koordinatensystems kann erreicht werden, dass im rotierten Koordinatensystem die Geodäte äquatorial beginnend ist. Tatsächlich denkt man sich eine Gerade durch den Koordinatenursprung und einem Startpunkt auf dem Orbit $\vec{\gamma}$, so ist die gesuchte Ebene durch Rotation um diese Gerade dann erreicht, wenn die Richtung (Tangente) im Startpunkt in der Ebene liegt. In der Literatur (siehe z.B. [1]) wird hieraus geschlussfolgert, jede Geodäte liegt im Raumteil in einer Ebene durch den Koordinatenursprung. Hierbei wird aber nicht berücksichtigt, mit der Rotation des Koordinatensystems ändern sich die Geodätengleichungen und damit die Bewegungsgleichungen. Dies haben wir im Abschnitt 2.3 gesehen, die Christoffel-Symbole bilden keinen Tensor. **Es bedarf zur Bekräftigung dieser Aussage einer zusätzlichen Bretrachtung**.

Gegeben sei eine Geodäte γ in den Schwarzschild-Koordinaten $(t, r, \vartheta, \varphi)$. Wir nehmen an die Geodäte γ ist bezüglich der Ebene

$$\begin{aligned} O_\gamma = \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times_r S^2 : \\ \sin\theta \sin\vartheta \cos(\varphi - \phi) + \cos\theta \cos\vartheta = 0\}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

äquatorial beginnend, d.h. $\gamma(0) \in O_\gamma$ und der Tangentialvektor an den Startpunkt liegt in dieser Ebene. Der Vektor $(1, \theta, \phi)$ ist die Normale der Ebene O_γ. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen $\theta \neq \pi/2$. Wenn es keinen solchen Startpunkt gäbe, läge das Orbit $\vec{\gamma}$ bereits in einer Ebene, die senkrecht auf der xy-Achse stünde. Es sei $\{(r(\varphi), \vartheta(\varphi), \varphi) : \varphi \in \mathbb{R}\}$ eine vorläufig beliebige glatte Kurve in O_γ. Differentation der Ebenengleichung unter erneutem Einsatz der Ebenengleichung ergibt auf γ

$$\begin{aligned} &\big[\sin\theta \cos\vartheta \cos(\varphi - \phi) - \cos\theta \sin\vartheta\big] \frac{d\vartheta}{d\varphi} = \sin\theta \sin\vartheta \sin(\varphi - \phi) \\ &- \big[\cos\theta \cos^2\vartheta + \cos\theta \sin^2\vartheta\big] \frac{d\vartheta}{d\varphi} = \sin\theta \sin^2\vartheta \sin(\varphi - \phi) \\ &- \cos\theta \; d\vartheta = \sin\theta \sin^2\vartheta \sin(\varphi - \phi) \; d\varphi \end{aligned} \tag{4.22}$$

Die Funktion $\vartheta = \vartheta(\varphi)$ ist indirekt mit der Ebenengleichung von O_γ definiert. Deshalb könnte ϑ nur dann Null werden, wenn die Ebene O_γ die z-Achse schneiden würde. Dann müsste O_γ die z-Achse enthalten und es wäre $\theta = \pi/2$, was den

Voraussetzungen widerspräche. Mit $r = r(\tau)$ aus der Geodätengleichung von γ und dem Drehmoment L der Geodäte bestimmen wir die Funktion $\varphi = \varphi(\tau)$ als Lösung der Differentialgleichung

$$d\varphi = \frac{L}{r^2(\tau)\sin^2\vartheta(\varphi(\tau))}d\tau \tag{4.23}$$

Offensichtlich ist diese einfache Differentialgleichung integrierbar. Die Lösung wird durch die Vorgabe des Anfangswertes aus dem Startpunkt der Geodäte γ eindeutig, sie sei $\varphi(\tau)$. Dann bezeichnen wir $\vartheta(\varphi(\tau))$ wieder mit $\vartheta = \vartheta(\tau)$. Aus (4.22) folgt dann

$$-\cos\theta r^2\frac{d\vartheta}{d\tau} = L\sin\theta\sin(\varphi - \phi).$$

Diese Gleichung nach τ differenziert und (4.21) ergeben

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\tau}\left[r^2\frac{d\vartheta}{d\tau}\right]\ \cos\theta &= L\sin\theta\cos(\varphi-\phi)\ \frac{d\varphi}{d\tau} \\ \cos\theta\sin\vartheta\ \frac{d}{d\tau}\left[r^2\frac{d\vartheta}{d\tau}\right] &= L\ \frac{d\varphi}{d\tau}\cos\theta\cos\vartheta \end{aligned} \tag{4.24}$$

Für L setzen wir jetzt die nach L umgestellte Gleichung (4.23) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \cos\theta\sin\vartheta\ \frac{d}{d\tau}\left[r^2\frac{d\vartheta}{d\tau}\right] &= \cos\theta\sin\vartheta\ r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \\ \frac{d}{d\tau}\left[r^2\vartheta'\right] &= \frac{d}{d\tau}\left[r^2\vartheta'\right] \end{aligned} \tag{4.25}$$

Die so eindeutige konstruierte in O_γ liegende Kurve genügt also den Bewegungsgleichungen und fällt im Startpunkt mit dem Orbit $\vec{\gamma}$ der Geodäte zusammen. Also sind sie identisch. Es wurde also gezeigt (vgl. z.B. [1])

Lemma 5 (Geodäten-Orbit) *Es sei* $(\mathbb{R}^4, g)$ *eine Schwarzschild-Raumzeit. Dann liegt das Orbit einer beliebigen Geodäte* γ *in einer Ebene im Raumteil durch den Koordinatenursprung.*

Definition 15 (Orbitalebene) *Die mit* (4.21) *definierte Ebene* O_γ *im Raumteil der Schwarzschild-Raumzeit wird Orbitalebene der Geodäte* γ *genannt.*

Eine wichtige Gruppe von Geodäten sind die gebundenen Geodäten.

Definition 16 (Potential der Geodäte) *Es seien* $(\mathbb{R}^4, g)$ *eine Schwarzschild-Raumzeit mit dem Krümmungsparameter (Masse des Zentrums)* M *und* γ *eine Geodäte der Schwarzschild-Raumzeit mit dem Drehimpuls* L*. Die Funktion* $V : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$V(r) = \left(1 - \frac{L^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \tag{4.26}$$

wird Potentialfunktion der Geodäte γ *genannt.*

Mit Hilfe des Potentials können die Geodäten einfach klassifiziert werden.

Definition 17 (gebundene Geodäte) *Es seien* $(\mathbb{R}^4, g)$ *eine Schwarzschild-Raumzeit mit dem Krümmungsparameter (Masse des Zentrums)* M *und* γ *eine Geodäte der Schwarzschild-Raumzeit mit dem Drehimpuls* L *und der Energie* E*. Die Geodäte* γ *wird Geodäte mit gebundenem Orbit (oder einfach gebundene Geodäte) genannt, wenn nachfolgende Bedingungen erfüllt sind*

$$(i) \quad \min_{r\in\mathbb{R}^+}\{V(r)\} < E^2 < \min\left\{1, \max_{r\in\mathbb{R}^+}\{V(r)\}\right\}$$

$$(ii) \quad L^2 > 12M^2$$

$$(iii) \quad |\ \vec{\gamma}\ | > 2M$$

Die Aussage, jede einzelne gebundene Geodäte hat einen ebenen Orbit, verschärfen wir ganz wesentlich (siehe [9], [11]). Die Orbits **sämtlicher** gebundener Geodäten liegen in ein und derselben Ebene, in der Äquatorialebene der Schwarzschild-Koordinaten.

Satz 1 (Orbits in der Äquatorialebene) *Es sei* $(\mathbb{R}^4, g)$ *eine Schwarzschild-Raumzeit. Das Orbit einer beliebigen gebundenen Geodäten liegt in der Äquatorialebene der Schwarzschild-Koordinaten.*

Beweis. Ist die Geodäte äquatorial beginnend, so liegt das Orbit der Geodäte gemäß Lemma 4: Äquatorialebene (siehe oben) in der Äquatorialebene. Verbleibt der Fall γ ist nicht äquatorial beginnend. Dann existiert - siehe oben Lemma 5: Geodäten-Orbit - die Orbitalebene

$$\begin{aligned} O_\gamma =& \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times_r S^2 : \\ & \sin\theta \sin\vartheta \cos(\varphi - \phi) + \cos\theta \cos\vartheta = 0\}, \end{aligned}$$

in der das Orbit enthalten ist. Wie bei der Herleitung des Lemma 5: Geodäten-Orbit folgt (siehe (4.23))

$$-r^2 \vartheta' \cos\theta = L \sin\theta \sin(\varphi - \phi) \tag{4.27}$$

Es sei $\vec{\gamma}'$ der Tangentialvektor des Orbit in den kartesischen Koordinaten des Bezugskoordinatensystems

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}' = & \frac{d}{d\tau}(r \sin\vartheta \cos\varphi)\ \partial_x + \\ & + \frac{d}{d\tau}(r \sin\vartheta \sin\varphi)\ \partial_y + \\ & + \frac{d}{d\tau}(r \cos\vartheta)\ \partial_z. \end{aligned}$$

Das Orbit $\vec{\gamma} \subset$ liegt vollständig in der Orbitalebene. Folglich liegt der Vektor

$$\Big(\frac{d}{d\tau}(r\sin\vartheta\cos\varphi),\ \frac{d}{d\tau}(r\sin\vartheta\sin\varphi),\ \frac{d}{d\tau}(r\cos\vartheta)\Big)$$

im Bezugskoordinatensystem in der Orbitalebene, d.h. in $\{(x,y,z) : xn_x+yn_y+zn_z = 0\}$, wobei $(n_x,n_y,n_z) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$ der Normalenvektor der Orbitalebene ist. Damit gilt unter Anwendung der Definitionsgleichung der Orbitalebene und unter Anwendung von (4.26)

$$\begin{aligned}
0 &= \sin\theta\cos\phi[r'\sin\vartheta\cos\varphi + r\vartheta'\cos\vartheta\cos\varphi - r\varphi'\sin\vartheta\sin\varphi]+\\
&\quad + \sin\theta\sin\phi[r'\sin\vartheta\sin\varphi + r\vartheta'\cos\vartheta\sin\varphi + r\varphi'\sin\vartheta\cos\varphi]+\\
&\quad + \cos\theta[r'\cos\vartheta - r\vartheta'\sin\vartheta] =\\
&= r'[\sin\theta\sin\vartheta(\cos\phi\cos\varphi + \sin\phi\sin\varphi) + \cos\theta\cos\vartheta]+\\
&\quad + r\vartheta'[\sin\theta\cos\vartheta(\cos\phi\cos\varphi + \sin\phi\sin\varphi) - \cos\theta\sin\vartheta]+\\
&\quad + r\varphi'\sin\theta\sin\vartheta(\sin\phi\cos\varphi - \cos\phi\sin\varphi) =\\
&= r\vartheta'[\sin\theta\cos\vartheta\cos(\phi-\varphi) - \cos\theta\sin\vartheta]+\\
&\quad + r\varphi'\sin\theta\sin\vartheta\sin(\phi-\varphi) =\\
&= -r\vartheta'[\cos^2\vartheta\cos\theta\sin^{-1}\vartheta + \cos\theta\sin\vartheta] + r\varphi'\sin\theta\sin\vartheta\sin(\phi-\varphi) =\\
&= -r\vartheta'\cos\theta\sin^{-1}\vartheta + r\varphi'\sin\theta\sin\vartheta\sin(\phi-\varphi)\\
0 &= -r^2\vartheta'\cos\theta + r^2\varphi'\sin\theta\sin^2\vartheta\sin(\phi-\varphi) =\\
&= \sin\theta\sin(\varphi-\phi)[L + r^2\varphi'\sin^2\vartheta]\\
0 &= L\sin\theta\sin(\varphi-\phi)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Da $L > 0$ bedeutet die letzte Gleichung aus (4.28)

$$\sin\theta = 0. \tag{4.29}$$

Dies bedeutet aber, dass die Orbitalebene O_γ die Äquatorialebene (xy-Ebene) ist.
q.e.d.