Über dieses Buch

Albert Einstein hat die *Allgemeine Relativitätstheorie* (ART), seine Theorie der Schwerkraft, 1915 erstmals veröffentlicht. Zu seiner Zeit und auch heute noch gilt die ART insbesondere wegen der mathematisch anspruchsvollen Darstellungen als schwer verstehbar. Zwar ist es schon lange nicht mehr so, wie man es anekdotisch dem britischen Astronomen Sir Arthur Stanley Eddington zuschreibt, der in den 1920er Jahren auf die Frage eines Journalisten, ob es richtig sei, dass es nur drei Menschen auf der Welt gäbe, die die Allgemeine Relativitätstheorie verstanden hätten, mit der Gegenfrage: Wer ist der dritte? geantwortet haben soll. Heute ist die ART eine Standardvorlesung in einem Physikstudium, allerdings wird sie üblicherweise erst im Haupt- bzw. Masterstudium angeboten. D.h. diejenigen, die sich erstmals mit der ART auseinander setzen, sind im Regelfall fortgeschrittene Physikstudenten, die schon fünf bis sechs Semester lang studiert haben und dabei die Grundgebiete der Physik (Mechanik, Elektrodynamik, Spezielle Relativitätstheorie, Quantenmechanik und Statistische Physik) gelernt sowie die dafür benötigten mathematischen Kenntnisse aufgebaut haben. Und das ist auch der Grund dafür, dass die allermeisten Lehrbücher über die Allgemeine Relativitätstheorie nur für Leser verstehbar sind, die dieses Vorwissen in Physik und Mathematik bereits erworben haben.

Hier wird ein komplett anderer Ansatz gewählt. An physikalischen und mathematischen Vorkenntnissen wird als Minimum nur das vorausgesetzt, was man in der Oberstufe von Gymnasien bzw. in Fachoberschulen lernt. Alles, was zum Verständnis der Allgemeinen Relativitätstheorie an weiterem Wissen erforderlich ist, wird behutsam und detailliert eingeführt. Mit genügend Lernwillen und Durchhaltevermögen können auch diejenigen naturwissenschaftlich Interessierten die Inhalte des Buches verstehen, die keinen Leistungskurs in Physik oder Mathematik absolviert haben bzw. deren Schulzeit schon weiter zurückliegt. Auch Physikstudenten, die sich erstmals mit der ART beschäftigen, finden hier einen leichten und ausführlich beschriebenen Zugang in die Thematik.

Das Buch bietet den einfachst möglichen Einstieg in die **quantitative** ART, d.h. es beschreibt die Theorie auch in ihrer mathematischen Formulierung, also in einer Form ähnlich der, in der Einstein sie veröffentlicht hat. Der Leser muss sich daher mit einer ganzen Reihe von physikalischen Phänomenen und mathematischen Techniken auseinander setzten, um dahin zu gelangen, dass er die Inhalte von Einsteins Gravitationstheorie auch formelmäßig versteht.

Entstehung

Der Autor ist kein ausgewiesener Experte der ART, also keiner, der - wie die meisten Autoren von Büchern über die Relativitätstheorie - damit aufwarten kann, dass er die Inhalte der Theorie in einer Reihe von Jahren in Vorlesungen an Universitäten vermittelt hat. Ich bin zwar studierter Mathematiker, habe mich aber nach dem Studium und Promotion für einen beruflichen Weg außerhalb von Universitäten entschieden und dann knapp 30 Jahre lang „in der Industrie" gearbeitet, und zwar in Arbeitsgebieten, die nichts mit Physik oder höherer Mathematik zu tun hatten. Was mich allerdings mein ganzes berufliches Leben begleitet, ist das Interesse an naturwissenschaftlichen, speziell physikalischen Fragestellungen.

Und so ist dieses Werk entstanden, weil ich mich im fortgeschrittenen Alter noch einmal intensiv mit der Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie beschäftigen wollte. Ich wollte diese Theorie in einer Tiefe verstehen, die über einen populärwissenschaftlichen Rahmen hinausgeht. Also habe ich mich auf die Suche nach für mich geeigneter Literatur begeben, musste aber schnell feststellen, dass es bislang zwei völlig verschiedene Ansätze zur Vermittlung der Inhalte der Theorie gibt. Zum einen existiert eine Vielzahl von Büchern und Artikeln, die in Alltagssprache versuchen, die grundlegenden Ideen und Konzepte sowie mögliche Folgen der Theorie darzustellen. Diese Erklärungsansätze kommen in Regel ohne Formeln aus, bleiben also qualitativ beschreibend, sind aber zum Teil sehr gut darin, die physikalischen Hintergründe und möglichen Anwendungsbereiche zu vermitteln. Die andere Kategorie bilden die Lehrbücher und Fachaufsätze, die man als fortgeschrittener Physikstudent parallel zu den Vorlesungen zur Hand nimmt und durcharbeitet. Diese Lehrbücher sind oftmals in einer „modernen", sehr abstrakten Formelsprache formuliert und waren für mich anfangs überwiegend unverständlich. Mit anderen

Worten: es gab für mich kein geeignetes Buch, das ich hernehmen konnte, um im Selbststudium die Allgemeine Relativitätstheorie auch quantitativ zu durchdringen. Ich war darauf angewiesen, aus einer Vielzahl unterschiedlicher Lektüren, die aus populärwissenschaftlichen Darstellungen, aus meist englischsprachigen physikalischen Lehrbüchern sowie aus im Internet verfügbaren Vorlesungsskripten und Lehrmaterialien bestanden, die für mich passenden Passagen herauszusuchen und durchzuarbeiten. Daneben habe ich als Gasthörer Vorlesungen zur Relativitätstheorie besucht und dadurch mein angelesenes Wissen weiter ausgebaut.

Das vorliegende Buch soll den von mir beschrittenen Weg zur Aneignung der grundlegenden Inhalte der Allgemeinen Relativitätstheorie deutlich abkürzen und die bestehende Lücke zwischen den populärwissenschaftlichen und den „hochwissenschaftlichen" Darstellungen schließen.

Da ich seit einigen Jahren an einer Fachhochschule Mathematik für angehende Ingenieure lehre, weiß ich ziemlich genau, welche physikalischen und mathematischen Vorkenntnisse jemand mitbringt, der ein solches Studium anfängt. Und daher war es mein Bestreben, das Niveau so zu wählen, dass Menschen mit ähnlichem Wissensstand dort andocken können, wo das Buch anfängt. Trotzdem sei darauf hingewiesen, dass das Durchlesen/Durcharbeiten für die allermeisten Leser sehr anstrengend sein wird, auch wenn die Anfangsvoraussetzungen eher gering sind. Denn das Buch nimmt zügig Fahrt auf und dringt schnell in Bereiche ein, die normalerweise in der Schule nicht mehr behandelt werden.

Gegenstand

Dieses Buch beschäftigt sich mit der Schwerkraft, auch *Gravitationskraft* genannt. Die Schwerkraft ist eine der vier sogenannten *physikalischen Fundamentalkräfte* (neben der Schwerkraft sind das die *elektromagnetische Kraft* sowie die *schwache* und *starke Kernkraft*) und zeichnet sich dadurch aus, dass sie überall gegenwärtig ist, d.h. man kann die Schwerkraft nicht ausschalten. Sie sorgt dafür, dass sich Galaxiehaufen bilden, dass die Sterne in unserer Milchstrasse nicht auseinander fliegen, dass die Planeten um die Sonne und der Mond um die Erde kreisen, dass der Apfel vom Baum fällt, usw.

Was hat die Schwerkraft mit der Relativitätstheorie zu tun? Sie wissen vielleicht schon, dass es zwei grundverschiedene Relativitätstheorien gibt, die beide von Einstein entwickelt wurden. Die sogenannte *Spezielle Relativitätstheorie* (SRT), die Einstein 1905 veröffentlichte, räumt auf mit unserem intuitiven, dem gesunden Menschenverstand folgenden Verständnis von Raum und Zeit. Sie ist - wie wir im dritten Teil darstellen werden - in der mathematischen Formulierung in ihren grundlegenden Konzepten auf Mittelstufenniveau verständlich, trotzdem erfordert sie ein komplettes, der normalen Anschauung entgegen gerichtetes Umdenken über die Zeit und den Raum und ist wahrscheinlich eher aus diesem Grunde vielen Menschen bis heute unverständlich geblieben.

Die Allgemeine Relativitätstheorie baut auf zwei Fundamenten auf. Zum einen ist das die sogenannte Newtonsche Gravitationstheorie, die schon im 17. Jahrhundert von Isaac Newton entwickelt wurde und in den darauf folgenden Jahrhunderten die Grundlage für alle himmelsmechanischen Berechnungen (z.B. Umlaufbahnen der Planeten, Entdeckung neuer Planeten) und für erdbezogene Phänomene (z.B. Sonnen- und Mondfinsternisse, Entstehung der Gezeiten, Jahreszeitenwechsel) darstellte. Zum anderen baut die ART auf der Speziellen Relativitätstheorie auf, ist aber in einer mathematischen Sprache formuliert, die es bislang verhinderte, dass sie einem größeren Interessentenkreis zugänglich gemacht werden konnte.

Das Buch folgt in seiner Diktion dem Ansatz eines Lehrbuches, da es den Anspruch hat, quantitative Aussagen zur Allgemeinen Relativitätstheorie zu machen. Deswegen finden sich auch eine Vielzahl von mathematischen Ausdrücken in den einzelnen Kapiteln, was bestimmt den einen oder anderen Leser zunächst abschrecken mag. Aber, und das sei betont, in diesem Buch wird immer der leichteste, damit oftmals längere Weg gewählt, der langsam und gemächlich in die trotzdem nicht zu unterschätzenden Höhen führt. Steilere Passagen und sonstige mögliche Abkürzungen, die in der Regel eine weiter ausgebildete Klettertechnik (sprich höhere Mathematik) erfordern, werden immer dort vermieden, wo es einen leichter gängigen Umweg gibt.

Grundsätzlich lassen wir uns in diesem Buch von den physikalischen Phänomenen leiten, versuchen also immer zunächst den physikalischen Inhalt zu verstehen, um dann im nächsten Schritt die entsprechenden mathematischen Darstellungen herauszuarbeiten. Bei der Herleitung der Formeln verfolgen wir den Anspruch, dass **jeder** Schritt verständlich ist, d.h. es wird ausführlich und detailliert dargestellt, wie sich Schlussfolgerungen und Umformungen ergeben. Schließlich interpretieren wir die in den abgeleiteten Formeln steckenden Informationen nochmals physikalisch, so dass sich ein weiter vertieftes Verständnis für den Zusammenhang von physikalischen Inhalten und mathematischen Darstellungen aufbauen kann.

Adressaten

Für welchen Leserkreis ist dieses Buch geschrieben? Nun, das sind Menschen, die ein grundsätzliches Interesse an naturwissenschaftlichen, speziell physikalischen Fragen haben und die sich „in eine Sache verbeißen" können, die also eine große Leistungsbereitschaft und ein beträchtliches Durchhaltevermögen besitzen. Also z.B. Schüler, die beabsichtigen, ein naturwissenschaftliches oder technisches Studium aufzunehmen oder Studenten mit anderen Fachrichtungen als Physik. Insbesondere aber auch Physikstudenten, die sich erstmals mit der Allgemeinen Relativitätstheorie auseinander setzen und einen einfachen Einstieg dafür suchen. Oder, wie ich selbst, Menschen, die in ihrer Jugend vielleicht Ingenieurwissenschaft, Chemie, Mathematik o.ä. studiert haben und die Beschäftigung mit der Physik als ihr Hobby ansehen.

Voraussetzungen

Kommen wir nun zur Frage, was denn einer mitbringen muss, um unserem Ansatz, der natürlich auch nicht „bei Adam und Eva" anfangen kann, folgen zu können. Von der Relativitätstheorie, auch von der Speziellen, muss man nichts wissen. Alles, was zum Verständnis der Allgemeinen Relativitätstheorie aus der Speziellen notwendig ist, wird in diesem Buch ausführlich dargestellt. Da die Allgemeine Relativitätstheorie eine Erweiterung der Newtonschen Theorie über die Schwerkraft ist, ist es sehr hilfreich, wenn Grundkenntnisse aus der klassischen Newtonschen Mechanik (z.B. Energie, Gravitationsgesetz, Planetenbahnen) vorhanden sind bzw. schnell wieder reaktiviert werden können. Sollten Sie über die klassische Mechanik keinerlei Kenntnisse haben, so müssen Sie nicht unbedingt auf andere Bücher zurückgreifen. Denn in den Anfangskapiteln dieses Buches werden die grundlegenden Begriffe und Konzepte aus der Newtonschen Theorie, sofern sie für das weitere Verständnis notwendig sind, dargestellt. Mit anderen Worten: physikalische Grundkenntnisse sind hilfreich, aber nicht zwingend erforderlich.

Etwas anders verhält es sich mit den Vorkenntnissen in der Mathematik. Notwendig ist ein Wissenstand, der etwa dem mittleren Oberstufenniveau eines Gymnasiums bzw. einer Fachoberschule entspricht. Es wird vorausgesetzt, dass Sie Kenntnisse über Bruchrechnung, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Lösen von Gleichungen sowie einfache Geometrie und trigonometrische Funktionen (Sinus, Cosinus, Tangens usw.) haben. Darüber hinaus wäre es sehr hilfreich, wenn Sie wissen oder sich parallel schnell aneignen, wie man Grenzwerte von Funktionen berechnet, Funktionen in einer Variablen differenziert und integriert und welche Gesetze zur Differenzial- und Integralrechnung es gibt. Aus der Geometrie sollten Kenntnisse vorhanden sein, etwa wie man mit Vektoren im Raum rechnet, was Skalar- und Vektorprodukte, Matrizen sowie Determinanten sind und wie man damit rechnet. Aber auch für die mathematischen Voraussetzungen gilt das oben Gesagte: alle mathematischen Grundlagen, die über das gerade als notwendig Bezeichnete hinaus gehen, werden in diesem Buch, wenn auch kurz, dargestellt, so dass Sie grundsätzlich kein anderes Mathematikbuch zur Hand nehmen müssen. Darüber hinaus finden Sie im Anhang (Kapitel 25 auf Seite 571) diejenigen mathematischen Formeln und physikalischen Gesetze, die in diesem Buch zwar benutzt, aber nicht ausführlich hergeleitet oder erklärt werden, d.h. in diesem Anhang stehen die Dinge, die Sie „eigentlich" schon mitbringen sollten. Natürlich bleibt es Ihnen unbenommen, sich sowohl in die Physik wie auch in die Mathematik tiefer einzuarbeiten. Dazu gibt jeweils am Ende der einzelnen Teile des Buches zu den angesprochenen Themen dedizierte Literaturempfehlungen, die auch alle im *Literaturverzeichnis* am Ende des Buches zu finden sind.

Titel

Der Titel des Buches „Aufstieg zu den Einsteingleichungen" ist bewusst gewählt. Wir haben einen anstrengenden und langen Weg vor uns, der in Etappen aufgeteilt ist, die man erreichen muss, um dem jeweils nächsten Abschnitt folgen zu können. Man kann das Buch also nicht punktuell oder abschnittsweise lesen (es sei denn, man hat schon gute Kenntnisse über unseren Gegenstand). Es ist also so wie bei einer Bergbesteigung: zunächst muss das Basislager (Newtonsche Mechanik) erreicht werden. Im Basislager werden neue Klettertechniken (Vektor- und Tensorrechnung) gelernt und eingeübt, die dann zum Aufstieg ins Zwischenlager (Spezielle Relativitätstheorie) benötigt werden. Im Zwischenlager werden die Techniken perfektioniert (Ausbau der Vektor- und Tensorrechnung) und anschließend wird der Gipfel (Einsteingleichungen) ins Visier genommen und erstiegen. Den Gipfel unserer Unternehmung bilden also die Einsteingleichungen, in denen die Allgemeine Relativitätstheorie höchst komprimiert zusammengefasst ist. Um im Vorhinein schon einmal einen kurzen Blick darauf zu werfen, sie lauten

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\, R = 8\pi\, G\, T_{\mu\nu},$$

bestehen also aus nur wenigen Ausdrücken, und trotzdem kann man ein ganzes Buch darüber schreiben um mitzuteilen, was sie letztendlich bedeuten. Wieso eigentlich Einsteingleichungen, wo doch nur eine Gleichung da steht? Das liegt an der komprimierten Schreibweise: die (tiefer gestellten) Indizes μ (griechischer Buchstabe My) und ν (griechischer Buchstabe Ny) können **jeweils** die vier Werte $\mu, \nu = t, x, y, z$ (was das genau bedeutet, wird später klar werden) annehmen. D.h. der Ausdruck $\mu\nu$ steht für alle möglichen Kombinationen der t, x, y, z, also $\mu\nu = tt$ oder $\mu\nu = tx$ oder $\mu\nu = ty$ oder auch $\mu\nu = zz$, usw. Ausführlicher geschrieben lauten die Gleichungen damit

$$\begin{aligned}
R_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt}\, R &= 8\pi\, G\, T_{tt} \\
R_{tx} - \frac{1}{2} g_{tx}\, R &= 8\pi\, G\, T_{tx} \\
R_{ty} - \frac{1}{2} g_{ty}\, R &= 8\pi\, G\, T_{ty} \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\
R_{zz} - \frac{1}{2} g_{zz}\, R &= 8\pi\, G\, T_{zz}.
\end{aligned}$$

Es gibt also zunächst $4 \cdot 4 = 16$ einzelne Gleichungen, die aber teilweise das gleiche aussagen, letztlich bleiben 10 unabhängige Gleichungen übrig.

Wenn wir den Gipfel erreicht haben, bleibt noch etwas Zeit, uns insbesondere anzuschauen, welche quantitativen Konsequenzen die Allgemeine Relativitätstheorie hat, d.h. wo sie sich von ihrem Vorgänger der Newtonschen Gravitationstheorie so sehr unterscheidet, dass sie beobachtete

Phänomene erklären kann, für die die Newtonsche Theorie keine Antworten hat. Das ist ein sehr weites Feld, man denke etwa an die verschiedenen kosmologischen Modelle, mit denen man unser gesamtes Universum beschreiben kann oder an die Darstellung schwarzer Löcher oder an den Nachweis von Gravitationswellen. Alles Themen, über die man wiederum ganze Bücher schreiben kann. In diesem Buch beschränken wir uns im wesentlichen auf die „klassischen" Themen, d.h. auf physikalische Phänomene in unserem Sonnensystem. Wir diskutieren die historisch früheste Lösung der Einsteingleichungen, die sogenannte *Schwarzschildlösung* und beschreiben damit z.B. die Periheldrehung des Merkurs, die Lichtablenkung im Schwerefeld der Sonne sowie als moderne Anwendung die GPS Navigation. In den letzten Abschnitten untersuchen wir einige Eigenschaften von schwarzen Löchern und gehen damit über unser Sonnensystem hinaus zu den wohl rätselhaftesten Objekten im Universum.

Aufbau

Dieses Buch besteht aus vier Teilen. Im ersten Teil werden die Grundelemente der Newtonschen Mechanik (u.a. Fallgesetze, Impuls, Kraft, Arbeit und Energie, Drehbewegungen) eingeführt. Es folgt eine ausführliche Darstellung des Newtonschen Gravitationsgesetzes inklusive der Herleitung der möglichen Bahnen von Planeten und Kometen im Sonnensystem. Damit wird die Grundlage für ein vertieftes Verständnis der wichtigsten mit der Newtonschen Schwerkraft verbundenen physikalischen Phänomene gelegt.

Im zweiten Teil wird die für das Verständnis der Relativitätstheorie zwingend notwendige *Vektor- und Tensorrechnung* eingeführt, allerdings für den einfachsten Fall der zweidimensionalen flachen Ebene. Dieser Teil ist überwiegend mathematisch geprägt.

Im dritten Teil werden drei Themenbereiche behandelt. Als erstes werden die Phänomene der Speziellen Relativitätstheorie mit möglichst einfachen mathematischen Mitteln vorgestellt, danach erfolgt eine weitere Vertiefung der Tensorrechnung und abschließend wird die neu gelernte, erweiterte Tensorrechnung auf die bereits erzielten Ergebnisse der SRT angewendet, was zu einer neuen Formulierung der physikalischen Gesetze in der SRT führt.

Der vierte Teil beginnt mit einer Beschreibung physikalischer Phänomene unter dem Einfluss einer Gravitationswirkung, wodurch die Notwendigkeit einer Erweiterung sowohl der Newtonschen Gravitationstheorie als auch der Speziellen Relativitätstheorie erkennbar wird. Danach wird die Tensorrechnung so weiterentwickelt und verallgemeinert, dass die neuen Gesetze der Allgemeinen Relativitätstheorie, d.h. insbesondere die Einsteingleichungen formuliert werden können. Abschließend werden einige Konsequenzen der Einsteinschen Theorie im Sonnensystem und bei schwarzen Löchern behandelt.

Ein wichtiger Aspekt bei der Aneignung der quantitativen Beschreibung der Allgemeinen Relativitätstheorie besteht darin, die notwendigen (mathematischen) Techniken und Darstellungsweisen zu lernen, mit deren Hilfe die physikalischen Gesetze der ART formuliert sind. Wie gerade schon ausgeführt spielt dabei die Tensorrechnung eine entscheidende Rolle. Es gibt aber darüber hinaus auch (meist vorgelagerte) weitere Themen aus der Mathematik, die schon für die Formulierung der Newtonschen Mechanik bzw. der Speziellen Relativitätstheorie erforderlich sind. Wir unterscheiden bei den mathematischen Werkzeugen und Fertigkeiten zwei Kategorien:

1. Werkzeuge und Fertigkeiten, deren Kenntnisse der Leser (eigentlich) mitbringen sollte, werden relativ kurz dargestellt und jeweils als nummerierte *Bemerkung* mit der Überschrift „**Mathematische Grundlagen**:" eingeleitet sowie durch das Zeichen □ beendet.

2. Werkzeuge und Fertigkeiten, die neu zu erlernen und einzuüben sind, sind integrale Bestandteile des Buches und werden ebenfalls als nummerierte *Bemerkung* mit der Überschrift „**Mathematische Werkzeuge**:" gekennzeichnet. Sie werden detailliert hergeleitet sowie ausführlich beschrieben und eingeübt. Auch diese Abschnitte werden durch das Symbol □ beendet.

Werden im Text nicht hergeleitete Formeln benutzt, so wird unterstellt, dass diese dem Leser bekannt sind. Er kann sie aber im Anhang (Kapitel 25 auf Seite 571) nochmals nachschlagen. Auch die in diesem Buch benutzten physikalischen Konstanten (z.B die Lichtgeschwindigkeit c) bzw. realen physikalischen Größen (z.B. die Masse der Sonne in kg) sind einem Anhang (Kapitel 26 auf Seite 577) nachlesbar.

Alle mathematischen Hilfsmittel werden immer dort definiert, wo sie aus physikalischer Sicht zum ersten Mal zum Einsatz kommen. Das hat den Vorteil, dass die Mathematik eng bei der Physik bleibt und damit klar wird, aus welchen physikalischen Gründen man diese oder jene Mathematik braucht. Der Nachteil dieser Vorgehensweise liegt darin, dass dadurch die Mathematik nicht kompakt, nicht aus einem Guss vermittelt, sondern in kleinen Häppchen serviert wird.

Pädagogische Hinweise

Ich habe in diesem Buch darauf verzichtet, Detailberechnungen in Anhänge oder separate „Boxen" zu verschieben, da ich den Lesefluss nicht durch Hin- und Herblättern stören wollen. Die Detailberechnungen sind also im Text integriert und können unmittelbar nachvollzogen werden, wenn der Leser das möchte. Es besteht natürlich auch immer die Möglichkeit, die Details zu überspringen und mit den nächsten Schritten fortzufahren, auch wenn nach Ansicht des Autors eine solche Vorgehensweise kein tiefes Verständnis der Gedankengänge und entstehenden Strukturen erzeugt. Die ausführlichen Darstellungen jeder einzelnen Berechnung sollten dem Leser, wenn er diese nachvollziehen kann, ausreichende Sicherheit geben, dass er tiefer in den Stoff eingedrungen ist. Auch ist es ratsam zu versuchen, die ein oder andere Herleitung von Formeln und Gesetzen selbstständig vorzunehmen und anschließend mit denen im Buch zu vergleichen. Dieses Buch enthält deswegen auch keine Übungsaufgaben, an denen der Leser überprüfen kann, ob er die durchgearbeiteten Teile wirklich verstanden hat.

Beim Lesen von physikalischer Literatur habe ich es immer als lästig empfunden, zurückblättern zu müssen, wenn im Text auf ein sehr viel früheres Ergebnis, das ich nicht mehr vollständig parat hatte, verwiesen wurde. Deshalb sind in diesem Buch die Verweise auf lang zurückliegende Ergebnisse zwar angegeben, die entsprechenden Formeln werden überwiegend aber auch noch einmal an den Verweisstellen wiederholt, so dass ein Zurückblättern zumindest in den Fällen vermieden werden kann, wo eine Wiedererkennung des Früheren vorhanden ist. Wird auf einen Sachverhalt verwiesen, der im gleichen Kapitel hergeleitet wurde, dann findet in der Regel keine Wiederholung statt, da ich davon ausgehe, dass die Erinnerung daran noch frisch ist.

Um noch einmal auf die Analogie Bergsteigen zurückzukommen: auch das Tempo spielt bei einer Bergbesteigung eine Rolle. Ein berühmten Bergsteiger hat einmal auf die Frage eines Journalisten, wie er denn Berge besteige, schlicht mit „langsam" geantwortet. Und das sollten Sie auch beherzigen. Rechnen Sie damit, dass Sie im Schnitt etwa 2 Seiten pro

Tag lesen bzw. durcharbeiten können, d.h. dass Sie ein knappes Jahr Zeit brauchen werden, um die Expedition erfolgreich abzuschließen.

Physikalische Gesetze

Wenn wir im Folgenden über Gesetze sprechen, so ist damit, wie in den Naturwissenschaften üblich, immer eine Modellaussage gemeint. Ein *physikalisches Gesetz* ist eine Hypothese darüber, wie sich beobachtete oder auch noch nicht beobachtbare Phänomene im Rahmen einer physikalischen Theorie erklären lassen. Physikalische Gesetze können also **niemals** den Anspruch erheben, wahr zu sein. Man kann die Richtigkeit physikalischer Modelle nicht beweisen, man kann die Modelle nur falsifizieren, was in der Regel durch widersprüchliche experimentelle Befunde geschieht. Der wissenschaftliche Fortschritt besteht dann darin, eine Erweiterung der bisherigen Gesetze zu finden und diese dann wiederum durch Experimente oder richtige Vorhersagen zu plausibilisieren.

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Das Weltbild der Gravitation vor Einstein

In diesem Teil gehen wir zurück und schauen uns an, was Einsteins Vorläufer über die Gravitation heraus gefunden haben. Wir tun das nicht nur aus historischem Interesse, sondern auch deswegen, weil zum einen in den alten Ansätzen schon sehr viel von dem Gedankengut drinsteckt, auf dem Einstein seine Allgemeine Relativitätstheorie aufgebaut hat. Zum anderen bietet die formelmäßige Beschreibung der sogenannten Newtonschen Mechanik und der frühen Gravitationsgesetze gute Gelegenheit, einige der grundlegenden mathematischen Konzepte, die wir auch in den späteren Kapiteln immer wieder brauchen werden, einzuführen und in physikalischen Gesetzen zu verankern.

Unserem Vorgehen entsprechend enthält der Teil I fast alle **mathematischen Grundlagen**, aber auch schon einige neue **mathematische Werkzeuge**, die im Schulunterricht normalerweise nicht mehr behandelt werden.

Was die Gravitation angeht, so fangen wir nicht ganz von vorne an, sondern überspringen die erdzentrischen Weltbilder von z.B. Aristoteles und Ptolemäus und landen im frühen 17. Jahrhundert. In dieser vornewtonschen Zeit gab es zwei getrennte Ansätze, die sich mit dem Phänomen der Schwerkraft beschäftigten, ohne dass den damaligen Forschern schon bewusst war, dass es sich um verschiedene Aspekte eines einzigen physikalischen Gesetzes handelt. Untersucht wurden einerseits die Bewegungen der Himmelskörper mit astronomischen Beobachtungen, die durch die Erfindung des Fernrohres in damals völlig neuer Qualität möglich wurden, und andererseits die Fallgesetze auf der Erde, im Wesentlichen motiviert durch ballistische Versuche mit Kanonenkugeln.

1. Die Keplerschen Gesetze

Nach Erfindung des Fernrohres gelang es den Astronomen, die Orte der Sonne, des Mondes, der Planeten und der Sterne wesentlich genauer zu bestimmen. Galileo Galilei (1564-1642) fand unter anderem vier „planetis", die den Jupiter umlaufen, und interpretierte sie als Monde des Jupiters, also als ein Planetensystem im Kleinen. Durch die vorliegenden Beobachtungsdaten gelang es schließlich Johannes Kepler (1571-1630) Gesetzmäßigkeiten zu finden, mit denen er den Stand der Planeten vorhersagen konnte. Er stellte fest, dass sich die Planeten nicht auf Kreisbahnen, wie im kopernikanischen Weltbild postuliert, sondern auf Ellipsenbahnen um die Sonne bewegen.

Bemerkung 1. **Mathematische Grundlagen: Ellipse I**

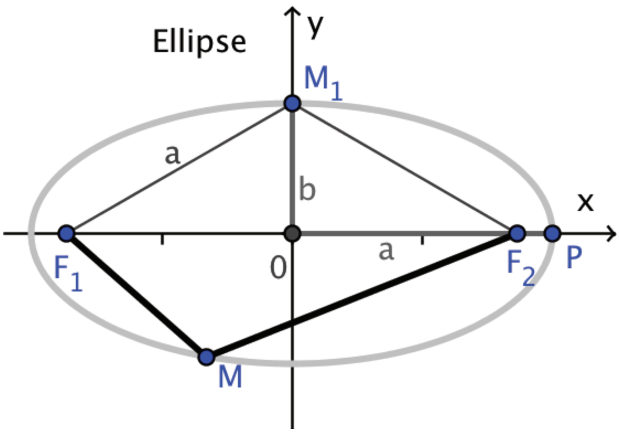

Abbildung 1.1.: Ellipse mit Halbachsen a und b

Eine *Ellipse* ist die Menge der (hellgrauen) Punkte, für die die Summe ihrer Distanzen zu den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 konstant ist.

D.h. für jeden beliebigen Punkt M auf der Ellipse ist die Summe der Strecken $\overline{F_1M}+\overline{F_2M}$ konstant. Der Abstand a von 0 bis P wird die *große Halbachse*, der Abstand b von 0 bis M_1 die *kleine Halbachse* genannt. Wir berechnen die Summe der Strecken vom Punkt P zu den beiden Brennpunkten und erhalten

$$\overline{PF_2}+\overline{PF_1}=\left(a-\overline{0F_2}\right)+\left(a+\overline{0F_1}\right)=2a,$$

da $\overline{0F_2}=\overline{0F_1}$ ist. D.h. die Summe der Strecken jedes Punktes auf der Ellipse zu den beiden Brennpunkten beträgt stets $2a$. Der Punkt M_1 hat den gleichen Abstand zu den beiden Brennpunkten, d.h. es gilt

$$\overline{M_1F_1}=\overline{M_1F_2}=a.$$

Wenn a und b gleich groß sind, dann fallen die beiden Brennpunkte zusammen und die Ellipse geht in einen Kreis über. □

Bemerkung 2. **Mathematische Grundlagen: x-y-Koordinatensystem**
In der Grafik taucht auch erstmals ein *Koordinatensystem* auf, das durch zwei senkrecht aufeinanderstehende Geraden, die man Achsen nennt, charakterisiert wird. Die x-Achse liegt horizontal und zeigt nach rechts (was durch einen Pfeil angedeutet wird), die y-Achse liegt vertikal und zeigt nach oben. Koordinatensysteme spielen bei unseren weiteren Ausführungen eine große Rolle. Erst sie gestatten es, zahlenmäßige Berechnungen z.B. zur Lage eines Punktes durchzuführen. Dazu stelle man sich vor, dass die x- und y-Achse in Einheiten (z.B. km) unterteilt sind, so dass man nach Festlegung des Nullpunktes (dort, wo sich die beiden Achsen schneiden) jeden anderen Punkt der x-y-Ebene (in unserem Beispiel die Umlaufebene des Planeten) durch Angabe einer x-Koordinate und einer y-Koordinate angeben kann. Liegt ein Punkt rechts von dem Nullpunkt, so ist seine x-Koordinate positiv, links entsprechend negativ. Liegt er oberhalb des Nullpunktes, so ist seine y-Koordinate positiv, unterhalb entsprechend negativ. Die Position eines Punktes wird durch das Koordinatensymbol (x, y) ausgedrückt, d.h. es ist üblich einen beliebigen Punkt auf der x-Achse ebenfalls mit x zu bezeichnen, gleiches gilt für y. Der Nullpunkt hat also die Koordinaten $(0, 0)$, wird in den Grafiken aber meist kurz durch „0" gekennzeichnet. □

1. Keplersches Gesetz
Alle Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen um die Sonne. Die Sonne steht in einem der beiden Brennpunkte der jeweiligen Ellipsenbahnen.

Keplers 1. Gesetz beruht zwar auf dem heliozentrischen Weltbild von Kopernikus, stellt die Sonne allerdings nicht mehr genau ins Zentrum, sondern etwas außerhalb davon. Schauen wir uns die Planetenbewegungen etwas genauer an:

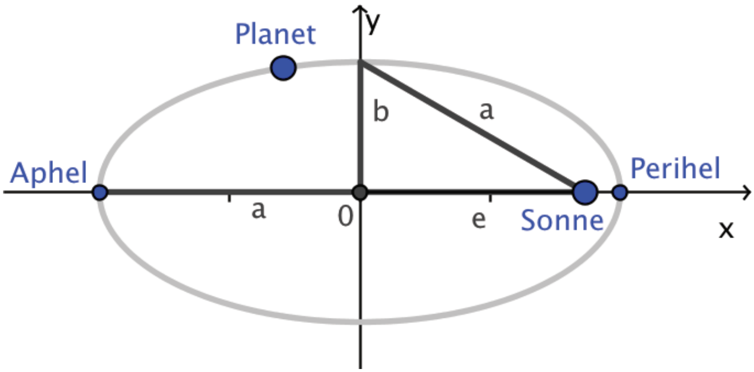

Abbildung 1.2.: Bahn eines Planeten

Die Grafik zeigt die elliptische Bahnkurve eines Planeten. Das *Perihel* ist der Punkt, in dem der Planet der Sonne am nächsten kommt. Der Punkt, in dem der Abstand zur Sonne am größten ist, heißt *Aphel*. Der Abstand e ist die Entfernung der Brennpunkte (in einem Brennpunkt befindet sich die Sonne) zum Mittelpunkt der Ellipse.

Um den Abstand der beiden Brennpunkte der Ellipse, die auf der x-Achse liegen, zum Nullpunkt zu berechnen, wenden wir den Satz des Pythagoras (siehe Anhang 25) auf das rechtwinklige Dreieck, was durch die Seiten (a, b, e) gebildet wird, an. Es gilt

$$e^2 + b^2 = a^2,$$

woraus

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

folgt. Damit ist die Position der Sonne klar, sie befindet sich immer im Punkt $(e, 0)$. Der zweite, in der Grafik nicht markierte Brennpunkt hat die Koordinaten $(-e, 0)$.

Die *numerische Exzentrizität*

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \tag{1.1}$$

gibt an, wie stark eine Ellipse von der Kreisbahn abweicht. Für die Kreisbahn gilt wegen $a = b$: $\varepsilon = 0$. Die Bahn der Erde hat eine kleine Exzentrizität von $0,017$, weicht also nur wenig von einer Kreisbahn ab, die Bahn des Merkurs besitzt unter den Planeten im Sonnensystem mit $0,205$ die größte Exzentrizität. Die Ellipsen in den Grafiken haben eine Exzentrizität von ca. $0,85$, sie sollen also eher übertriebene Anschauungsbeispiele sein als Abbildungen realer Planetenbahnen.

Bemerkung 3. **Mathematische Grundlagen: Ellipse** II

Wir wollen nun alle möglichen Positionen (x, y) eines Planeten bestimmen, der sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne bewegt.

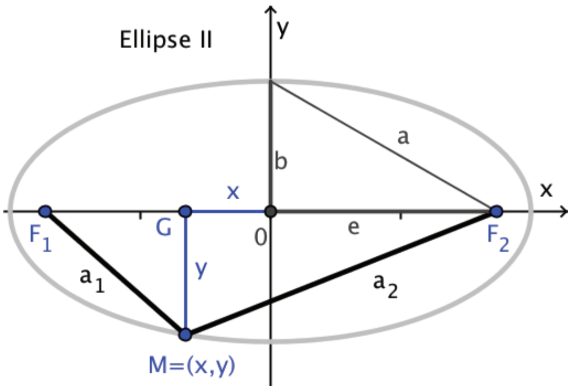

Abbildung 1.3.: Berechnung der Koordinaten des Planeten

In der Grafik ist ein Punkt M mit den Koordinaten x und y, also $M = (x, y)$ eingezeichnet, der von den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 den Abstand

$$a_1 + a_2 = 2a$$

hat. Wenden wir auf die rechtwinkligen Dreiecke (F_1, G, M) und (G, F_2, M) jeweils den Satz des Pythagoras an und beachten, dass

$$\overline{F_1G} = e - x$$

und

$$\overline{GF_2} = e + x$$

ist, so erhalten wir einerseits

$$y^2 = (a_1)^2 - (\overline{F_1G})^2 = (a_1)^2 - (e - x)^2$$

sowie andererseits

$$y^2 = (a_2)^2 - (\overline{GF_2})^2 = (a_2)^2 - (e + x)^2. \tag{1.2}$$

Gleichsetzen der beiden letzten Gleichungen ergibt

$$(a_2)^2 - (e + x)^2 = (a_1)^2 - (e - x)^2.$$

Ausmultiplizieren auf beiden Seiten resultiert in

$$(a_2)^2 - (e^2 + 2ex + x^2) = (a_1)^2 - (e^2 - 2ex + x^2).$$

Vereinfachen führt zu

$$(a_2)^2 - 2ex = (a_1)^2 + 2ex$$

und weiter zu

$$(a_2)^2 - (a_1)^2 = 4ex.$$

Wir benutzen für die linke Seite die dritte binomische Formel (siehe Anhang 25 auf Seite 571):

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

und erhalten

$$(a_2 + a_1)(a_2 - a_1) = 4ex.$$

Es war $a_1 + a_2 = 2a$, also folgt

$$2a \cdot (a_2 - a_1) = 4ex.$$

Und daraus

$$a_2 - a_1 = \frac{2ex}{a}.$$

Da $a_1 = 2a - a_2$ folgt

$$a_2 - (2a - a_2) = \frac{2ex}{a}$$

also letztlich

$$a_2 = \frac{ex}{a} + a. \tag{1.3}$$

Dies eingesetzt in (1.2) ergibt

$$\begin{aligned} y^2 &= (a_2)^2 - (e+x)^2 \\ &\underset{1.3}{=} \left(\frac{ex}{a} + a\right)^2 - (e+x)^2 \\ &= \left(\frac{e^2x^2}{a^2} + 2\,\frac{ex}{a}a + a^2\right) - \left(e^2 + 2ex + x^2\right) \\ &= \frac{e^2x^2}{a^2} + 2ex + a^2 - e^2 - 2ex - x^2 \\ &= \frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 + a^2 - e^2. \end{aligned}$$

Jetzt benutzen wir, dass $a^2 - e^2 = b^2$ ist, und erhalten

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 + b^2 \\ &= \frac{e^2x^2 - a^2x^2}{a^2} + b^2 \\ &= \frac{(e^2 - a^2)x^2}{a^2} + b^2 \\ &\underset{e^2-a^2=-b^2}{=} \frac{-b^2x^2}{a^2} + b^2. \end{aligned}$$

Man erhält also nach Division durch b^2

$$\frac{y^2}{b^2} = -\frac{x^2}{a^2} + 1.$$

und daraus schließlich die allgemeine Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.4}$$

Damit haben wir die Gleichung für alle möglichen Positionen (x, y) des Planeten in seiner Umlaufebene gefunden. D.h. alle Punkte (x, y), die die obige Gleichung erfüllen, bilden die Ellipsenbahn, wobei der Ursprung des Koordinatensystems im Mittelpunkt der Ellipse liegt. □

Über die Geschwindigkeit, mit der der Planet seine Ellipsenbahn durchläuft, macht das 1. Keplersche Gesetz keine Aussage. Kepler beobachtete, dass die Geschwindigkeit der Planeten größer wird, wenn sie sich der Sonne nähern, und kleiner, wenn sie sich von der Sonne entfernen. Im Perihel ist die Geschwindigkeit am größten, im Aphel ist sie minimal. Er fand auch einen quantitativen Zusammenhang:

2. Keplersches Gesetz (Flächensatz)
Die gerade Verbindung zwischen der Sonne und einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

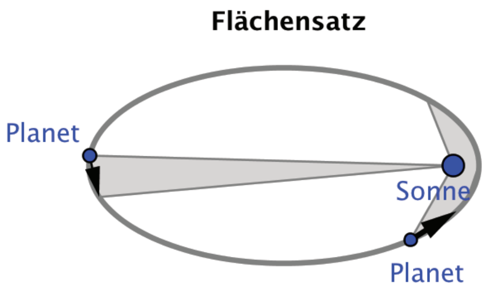

Abbildung 1.4.: 2. Keplersches Gesetz, Flächensatz

Die in der Grafik grau markierten Flächen sind also gleich, wenn der Planet die gleiche Zeit auf seiner Umlaufbahn benötigt, um diese Flächen zu generieren.

Schließlich stellte Kepler noch ein drittes Gesetz auf, dass die Abmessungen verschiedener Planetenbahnen mit den jeweiligen Umlaufzeiten verbindet:

3. Keplersches Gesetz
Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Bahnhalbachsen.