# Vorwort

Die *Lineare Algebra* ist ein lebendiger und aktiver Bereich der Mathematik. Sie ist grundlegend sowohl für die reine als auch für die angewandte Mathematik, für die Informatik, für Natur-, Wirtschafts-, Sozial- und Ingenieurswissenschaften. Sie verfügt über viele und tiefgehende theoretische Ergebnisse und ist verantwortlich für stetig anwachsende Algorithmen von Computersimulationen.

Vorlesungen zur *Linearen Algebra* gehören zu den Pflichtveranstaltungen der mathematischen Grundausbildung von allen Studierenden der ingenieurwissenschaftlichen, wirtschaftwissenschaftlichen, naturwissenschaftlichen, mathematischen sowie informations- und kommunikationstechnischen Fachrichtungen an Fachhochschulen, Hochschulen und Universitäten. Hintergrund dieses Buches ist die Unterstützung einer Vorlesung *Lineare Algebra*. Das Buch kann aber auch zum Selbststudium und als Wiederholungslektüre zur Prüfungsvorbereitung eingesetzt werden. Auch soll es Anregung sein und den Weg eröffnen zur weitergehenden und vertieften Beschäftigung mit Theorie, Algorithmen, Konzepten, Methoden, Modellen, Anwendungen und Querverbindungen der *Linearen Algebra*. Die Themen reichen von Vektoren, Matrizen, Geometrie, Vektorräumen, linearen Abbildungen, linearen Gleichungen, Determinanten, Eigenwerten, Eigenvektoren, linearer Ausgleichsrechnung, Koordinatentransformationen bis zur Singulärwertzerlegung.

Ich habe versucht, immer wieder Anwendungen und Mathematische Modelle der *Linearen Algebra* aufzuzeigen, da ich den Anwendungsbezug der Mathematik für sehr bedeutsam erachte; er ist aber nicht das Maß aller Dinge. Es gibt Themen, die sich einer kurzfristigen Anwendbarkeit entziehen, jedoch von grundsätzlicher Bedeutung sind und gerade wegen ihrer Zweckfreiheit eine wesentliche Komponente der mathematischen Bildung (auch für Anwender) ausmachen.

Zentrale Gleichungen der *Linearen Algebra* sind lineare Gleichungssysteme $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ und Eigenwertgleichungen $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$. Es ist einfach faszinierend, wie viel man über diese beiden Gleichungen sagen (und lernen) kann. Viele Anwendungen sind diskret und nicht kontinuierlich, digital anstatt analog und linearisierbar anstatt unberechenbar und chaotisch. Dann aber sind Matrizen und Vektoren die geeigneten Objekte und die *Lineare Algebra* die richtige Sprache; an die Stelle von kontinuierlichen Funktionen treten Vektoren. Vier Hauptaufgaben der *Linearen Algebra*, die ich in diesem Buch besprechen möchte, habe ich im Anhang A aufgeschrieben.

Die Methoden der *Linearen Algebra* eignen sich zur Beschreibung einer großen Zahl von Phänomenen der Natur-, Ingenieur-, Gesellschafts- und Wirtschaftswissenschaften. Man spricht von einer Mathematischen Modellierung der Phänomene. Die *Linearen Algebra* ist ein mächtiges Modellierungswerkzeug. Beispiele, die ganz oder zu einem großen Teil mit Methoden der *Linearen Algebra* modelliert werden können, sind: Elektromagnetische Schwingkreise, das Biegen von Balken, das Pendel, die Bewegung des Kreisels, die Drehung des Kreisels um seine Achsen, die Spektren von Molekülen und Atomen, die Darstellung, Bearbeitung und Kompression digitaler Bilder, Wichtigkeit von Internetseiten, Produktionsplanung, Lineare Regression, mechanische Schwingungen, usw.

Ein wesentliches Konzept der *Linearen Algebra* ist der Vektor. Vektoren sind mathematische Abstraktionen von Pfeilen. Entscheidend wichtig für die *Lineare Algebra* und ihren großen Erfolg ist Folgendes: Das Bild der Pfeile und wie damit umzugehen ist, kann auf verscheidene Situationen angewendet werden. Verschiedene mathematische Objekte können als Vektoren interpretiert und mit ihnen gerechnet werden wie mit Pfeilen. So können beispielsweise als Vektoren interpretiert werden: Gruppe von Zahlen, Polynome, Matrizen, Funktionen, usw. Immer wird gleich gerechnet. Das ist am Anfang gewöhnungsbedürftig, da zum Beispiel das Additionszeichen $+$ immer gleich geschrieben wird, aber immer wieder anders gemeint ist. Es ist wichtig und sinnvoll dies gleich zu schreiben, macht aber zu Beginn das Verstehen nicht gerade leicht.

Die *Lineare Algebra* hat sich aus zwei unterschiedlichen Teilgebieten entwickelt: der (analytischen) Geometrie und dem Studium linearer Gleichungssysteme. Die *Lineare Algebra* ist ein faszinierendes Gebiet innerhalb der Mathematik mit großem Anwendungspotenzial. Sie lässt sich aus drei Blickpunkten betrachten. Erstens: *Geometrischer Blickpunkt.* Die (Analytische) Geometrie modelliert geometrische Objekte mithilfe der *Linearen Algebra.* Zweitens: *Arithmetischer Blickpunkt.* Modellieren und rechnen mit linearen Gleichungen und Matrizen sind für praktische Probleme, für Computermathematik (Numerische Mathematik) und für Computersimulationen von großer Bedeutung. Man denke nur an die Matrizenrechnung und MATLAB[1]. Drittens: *Algebraischer Blickpunkt.* In der strukturbetonten Theorie der Vektorräume (lineare Räume) tritt das Wesen der Mathematik als Strukturwissenschaft besonders hervor. Wir haben uns bemüht, in dieser Einführung alle drei Blickpunkte zur Geltung kommen zu lassen.

Dieses Lehr- und Übungsbuch ist aus einer Reihe von Mathematik-Vorlesungen für Ingenieure, Informatiker und Wirtschaftswissenschaftler hervorgegangen, die sich seit vielen Jahren gehalten gabe und noch immer halte. Es ist auch durch mein Büchlein [39] inspiriert. Es ist so angelegt, dass es in der vorgegebenen Reihenfolge, ohne Auslassungen, sicher aber mit häufigem Zurückblättern, bearbeitet werden kann. Die mathematischen Sätze sind kursiv geschrieben, durchnummeriert und (fast) jeder Satz mit einem Namen versehen. Eine Definition erkennt man nicht daran, dass davor *Definition* steht, sondern

[1]MATLAB ® ist eingetragenes Warenzeichen von The MathWork Inc.

daran, dass der zu definierende Begriff **fett** gedruckt ist. Definitionen und Sätze habe ich oft mit Bemerkungen und Kommentare versehen, um deren Bedeutungen gut zu verstehen. Wiederholungen sind kein Versehen, sondern Gewollt. An zahlreichen Beispielen können Sie die zentralen Begriffe und Methoden der *Linearen Algebra* trainieren. Jedes Kapitel beinhaltet Aufgaben, deren Musterlösungen am Ende abgedruckt sind. Die Aufgaben dienen zum Einüben und Vertiefen des Stoffes. Sie finden zwei Sorten von Aufgaben. Zum einen ganz einfache Kästchenaufgaben bzw. Richtig- oder Falsch-Aufgaben, diese dienen zur unmittelbaren Selbstkontrolle, und zum anderen die eigentlichen Aufgaben. Bei diesen habe ich mich bemüht, keine unnötigen Tricks einzubauen, sondern Ihnen Erfolgserlebnisse zu ermöglichen. Das Namen- und Stichwortverzeichnis ist recht ausführlich angelegt, um das Auffinden von Namen, Definitionen und Erläuterungen beim Zurückblättern oder bei der späteren Arbeit mit dem Buch zu erleichtern.

Ich habe mich bemüht, Bezeichnungen konsistent über das ganze Buch hinweg zu verwenden. Punkte, Mengen und lineare Abbildungen werden mit großen lateinischen Buchstaben $A$, $B$, $C$, $L$, $M$, usw. bezeichnet. Besonders wichtige Mengen, wie zum Beispiel die reellen Zahlen werden ebenfalls mit großen lateinischen Buchstaben geschrieben, darüber hinaus sind sie aber noch besonders gedruckt, zum Beispiel $\mathbb{R}$ für die Menge der reellen Zahlen. Reelle Zahlen sind kleine lateinische $a$, $b$, $c$, $\ldots$ oder griechische Buchstaben $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, usw. Vektoren und Matrizen sind **fett** und *kursiv* geschrieben; Vektoren sind kleine ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ usw.) und Matrizen sind große lateinische Buchstaben ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ usw.). Sind Abbildungen bzw. Funktionen Vektoren, so schreiben wir sie nicht fett. Beispiele sind mit dem ausgefüllten Quadratzeichen ■ und Beweise mit dem nicht ausgefüllten Quadratzeichen □ abgeschlossen. Gelegentlich rechnen wir mit MATLAB, dann verwenden wir die `Schreibmaschinenschrift`.

Wir entwickeln die *Lineare Algebra* fast ausschließlich mit dem reellen Zahlenkörper $\mathbb{R}$ aus Gründen der Übersichtlichkeit und der Praxisnähe. Im Mittelpunkt stehen somit reelle Vektorräume, wobei diese fast immer endlich dimensional sind. Fast alles gilt analog auch im $\mathbb{K}^n$ mit beliebigem Zahlenkörper $\mathbb{K}$, ja überhaupt in jedem endlich dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{K}$. Statt $\mathbb{R}$ kann man oft auch einen anderen Zahlenkörper $\mathbb{K}$ zulassen und es kostet nicht viel Anstrengung, die bereits gewonnenen Ergebnisse zu übertragen bzw. entsprechend anzupassen. Ganz besonders stark orientieren wir uns an den vier Fundamentalräumen einer reellen Matrix.

In zunehmendem Maße werden sehr leistungsfähige mathematische Softwaresysteme (wie zum Beispiel MATLAB) bei der mathematischen Lösung naturwissenschaftlicher, technischer, wirtschaftswissenschaftlicher oder sonstiger Probleme in Praxis und Wissenschaft erfolgreich eingesetzt. Solche Systeme können bereits im Grundstudium (so auch in der *Linearen Algebra*) ein nützliches und sinnvolles Hilfsmittel sein und zum Beispiel zur Kontrolle beim Lösen von Aufgaben verwendet werden (Überprüfung der von Hand gerechneten Lösungen). Das System MATLAB gestattet es, Algorithmen in übersichtlicher

Form darzustellen und umzusetzen. Außerdem deckt es eigene Fehler gnadenlos auf. Computerexperimente in der Mathematik können Wege zur Erkenntnis sein.

Die *Lineare Algebra* gibt es als mathematische Disziplin schon lange Zeit, jedoch wurde die breite praktische Anwendung der bekannten Verfahren erst mit dem Siegeszug der Computerei in den letzten Jahren wirklich möglich. Gerade der Umgang mit großen Datenmengen, wie sie in der praktischen angewandten *Linearen Algebra* vorkommen, sind ein Vorzug der modernen Rechenleistungen. Aus diesem Grund und auf diesem Gebiet gibt es sehr viele und sehr gut konzipierte Softwarepakete (der Anwender hat die Qual der Wahl), die verwendete mathematische Modelle schnell und zuverlässig einsetzbar machen. So werden immer mehr Softwarekomplettlösungen angeboten, die aber leider die dahinterstehenden mathematische Modelle oft nicht mehr erkennen lassen. Dies ist nicht immer vorteilhaft. Für bestimmte Verfahren bestehen gewisse Kriterien, die beim Einsatz erfüllt sein müssen und bei Nichterfüllen zu Überraschungen, Verwunderungen oder Fehlern führen. Meist hat der Anwender auch mehrere Lösungsmöglichkeiten zur Verfügung, so dass auch die Vielfalt entsprechend eingeordnet werden muss. Wir wollen Erfahrungen und Tipps aufzeigen und weitergeben, um praktische Probleme effizient zu lösen.

Durch die über 800 Beispiele und gelösten Aufgaben wird das Verständnis des Lehrstoffes gefestigt. Um sich die *Lineare Algebra* zu erschließen, ist es ratsam, die Beispiele durchzuarbeiten und die Aufgaben zu lösen. Arbeiten Sie alleine und auch in Gruppen! Stellen Sie eigene Fragen und überlegen Sie sich Antworten! Unterhalten Sie sich über *Lineare Algebra*! Über 200 Bilder tragen zur weiteren Veranschaulichung wichtiger Definitionen, Sätze, Beispiele und Beweise bei. Über 20 Tabellen gestalten das Buch übersichtlich. Am Ende des Buches finden Sie nach dem Literaturverzeichnis ein Symbolverzeichnis sowie das griechische Alphabet.

Das vorliegende Buch habe ich vollständig in LaTeX mit der Hauptklasse scrbook des KOMA-Script Pakets erstellt. Die Literaturhinweise wurden mit BibLaTeX und der Index mit *MakeIndex* erzeugt. Fast alle Bilder (Abbildungen) wurden mithilfe von PSTricks oder Matlab erstellt. Ohne diese schönen Tools wäre dies alles viel schwieriger gewesen. Falls ich ein Bild aus dem freien Onlinelexikon Wikipedia (`http://de.wikipedia.org`) übernommen habe, so habe ich dies jeweils in der Bildunterschrift erwähnt.

Für jede Anregung, nützlichen Hinweis oder Verbesserungsvorschlag bin ich dankbar. Sie können mich über Post oder E-Mail `gramlich@hs-ulm.de` erreichen. Auch nachdem das Buch in Druck gegangen ist, wird es weiterleben. So finden Sie auf meiner Homepage `www.hs-ulm.de/gramlich` eine ständig aktualisierte Fehlerliste zu diesem Buch, die `.bib`-Datei, in der die von mir angegebene Literatur steht und weitere interessante Links zur *Linearen Algebra*.

Ulm, im Frühling 2013 Günter M. Gramlich

# Inhaltsverzeichnis

**1. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen** **1**
1.1. Lineare Gleichungssysteme . . . 2
1.2. Lineare Systeme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten . . . 5
1.3. Matrizen . . . 10
1.4. Elementare Umformungen und Zeilenstufenformen . . . 12
1.5. Das Gauß- und Gauß-Jordan-Verfahren . . . 15
1.6. Zur Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme . . . 22
1.7. Lineare Systeme mit Parametern . . . 25
1.8. Mehr über Matrizen . . . 26
1.9. Operationen mit Matrizen . . . 29
1.10. Die Matrixform eines linearen Systems . . . 44
1.11. Lineare Systeme mit mehreren rechten Seiten . . . 45
1.12. Inverse Matrizen . . . 48
1.13. Inverse Matrizen und lineare Systeme . . . 56
1.14. Lineare Systeme, die einfach zu lösen sind . . . 59
1.15. Wie löst man lineare Systeme mit dem Computer? . . . 63
1.16. Dreieckszerlegung. LU-Faktorisierung . . . 66
1.17. Lösen linearer Gleichungssysteme in MATLAB . . . 74
1.18. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . 74
Aufgaben . . . 76

**2. Modelle und Anwendungen von linearen Gleichungssystemen und Matrizen** **89**
2.1. Produktionsprozesse . . . 90
2.2. Innerbetriebliche Leistungsverrechnung . . . 93
2.3. Matrizenmodelle und Stromgrößen . . . 95
2.4. Computergrafik . . . 97
2.5. Computertomographie . . . 98
2.6. Statistik: Korrelationsmatrizen . . . 102
2.7. Interpolation . . . 105
2.8. Bildverarbeitung . . . 107
2.9. Elektrische Netzwerke . . . 108
2.10. Randwertaufgaben . . . 110
2.11. Abrechnung beim Skat . . . 112
2.12. Matrizenmultiplikationen . . . 115

2.13. Stochastische Prozesse . . . 124
2.14. Zyklische Prozesse . . . 128
2.15. GOOGLE™, PageRank™ und die Wichtigkeit von Internetseiten . . . 129
2.16. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . 131
Aufgaben . . . 132

**3. Vektoren in der Ebene und im Raum 139**
3.1. Geometrische Vektoren . . . 140
3.2. Rechnen mit geometrischen Vektoren . . . 142
3.3. Geometrische Vektoren in physikalischen Kontexten . . . 149
3.4. Arithmetische Vektoren . . . 152
3.5. Rechnen mit arithmetischen Vektoren . . . 154
3.6. Arithmetische Vektoren in Anwendungen . . . 158
3.7. Zusammenhänge zwischen geometrischen und arithmetischen Vektoren . . . 159
3.8. Vektoren . . . 165
3.9. Schreibweisen und Vereinbarungen . . . 167
3.10. Anwendung: Stabkräfte eines belasteten Dreibeins . . . 168
3.11. Die Länge von Vektoren . . . 169
3.12. Das Skalarprodukt . . . 172
3.13. CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung. Dreiecksungleichung . . . 183
3.14. Das Kreuzprodukt . . . 185
3.15. Das Spatprodukt . . . 191
3.16. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . 193
Aufgaben . . . 194

**4. Geometrische Modelle in der Ebene und im Raum 203**
4.1. Darstellungen von Geraden . . . 203
4.2. Darstellungen von Ebenen . . . 209
4.3. Parameterdarstellungen als Funktionen. Beschreibung von Bewegungen . . . 215
4.4. Elementare Koordinatentransformationen . . . 216
4.5. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . 223
Aufgaben . . . 223

**5. Reelle Vektorräume und Unterräume 225**
5.1. Die Vektorraum-Definition . . . 225
5.2. Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ . . . 228
5.3. Der Vektorraum der geometrischen Vektoren . . . 229
5.4. Weitere Beispiele von reellen Vektorräumen . . . 230
5.5. Gedanken zu Vektoren und Vektorräumen . . . 231
5.6. Untervektorräume . . . 232
5.7. Der Nullraum und homogene lineare Gleichungssysteme . . . 236

5.8. Der Durchschnitt von zwei Unterräumen . . . . . 238
5.9. Linearkombinationen. Lineare Hülle . . . . . 239
5.10. Die vier Fundamentalräume einer Matrix . . . . . 243
5.11. Der Spaltenraum und lineare Gleichungssysteme . . . . . 243
5.12. Lineare Unabhängigkeit . . . . . 245
5.13. Basis und Dimension . . . . . 249
5.14. Die Struktur der Lösungsmenge von $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ . . . . . 254
5.15. Lineare Gleichungssysteme. Zeilen- und Spaltenbild . . . . . 257
5.16. Basen für die vier Fundamentalräume . . . . . 259
5.17. Die Dimensionen der vier Fundamentalräume . . . . . 264
5.18. Spaltenraum. Zeilenstufenform. Basisergänzungssatz . . . . . 267
5.19. Summe und direkte Summe zweier Unterräumen . . . . . 271
5.20. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . . 274
Aufgaben . . . . . 276

**6. Der Euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^n$ 285**
6.1. Die Orthogonalität der vier Fundamentalräume . . . . . 288
6.2. Lineare Gleichungssysteme . . . . . 294
6.3. Unlösbare lineare Systeme. Orthogonale Projektionen. Normalgleichungssysteme . . . . . 301
6.4. Orthogonal- und Orthonormalbasen . . . . . 312
6.5. QR-Faktorisierung . . . . . 321
6.6. Lösen von $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit QR-Faktorisierung . . . . . 325
6.7. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . . 327
Aufgaben . . . . . 329

**7. Lineare Ausgleichsrechnung 333**
7.1. Lösbarkeit und Beschreibung aller Lösungen . . . . . 338
7.2. Beste Approximationen in Unterräumen . . . . . 343
7.3. Lösen mit QR-Faktorisierung . . . . . 346
7.4. Bestimmung der Federkonstanten im HOOKEschen Gesetz . . . . . 350
7.5. Polynomiale Ausgleichsrechnung . . . . . 351
7.6. Approximation von Funktionen . . . . . 353
7.7. Anpassung von Kurven . . . . . 355
7.8. Reduktion der Dimension . . . . . 357
7.9. Approximation periodischer Daten . . . . . 360
7.10. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . . 363
Aufgaben . . . . . 364

**8. Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ und Matrizen 371**
8.1. Definition und Beispiele . . . . . 372

8.2. Eigenschaften linearer Abbildungen . . . 378
8.3. Verkettung linearer Abbildungen . . . 380
8.4. Kern und Bild linearer Abbildungen . . . 381
8.5. Natürliche Darstellungsmatrix . . . 382
8.6. Weitere Beispiele . . . 385
8.7. Lineare Abbildungen, Matrizen und die vier Fundamentalräume . . . 388
8.8. Verkettung und Matrizenmultiplikation . . . 389
8.9. Umkehrabbildung und Umkehrmatrix . . . 393
8.10. Beispiel: Reelle diskrete Fourier-Transformation . . . 396
8.11. Beispiel: Lineare Filter . . . 397
8.12. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . 398
Aufgaben . . . 400

**9. Modelle und Anwendungen von linearen Abbildungen und Matrizen 405**
9.1. Lineare Abbildungen in der Ebene (2D) . . . 405
9.2. Verschiebungen (Translationen) in der Ebene . . . 420
9.3. Homogene Koordinaten . . . 421
9.4. Verkettungen von Transformationen . . . 422
9.5. Lineare Abbildungen im Raum (3D) . . . 425
9.6. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . 435
Aufgaben . . . 435

**10. Determinanten 439**
10.1. Die Determinante einer $(2, 2)$-Matrix . . . 439
10.2. Verallgemeinerung auf $(n, n)$-Matrizen . . . 442
10.3. Determinanten und lineare Gleichungssysteme . . . 446
10.4. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . 450
Aufgaben . . . 450

**11. Eigenwerte und Eigenvektoren 453**
11.1. Wie berechnet man Eigenwerte und Eigenvektoren? . . . 455
11.2. Diagonalisierung einer Matrix . . . 461
11.3. Warum eine Matrix diagonalisieren? . . . 465
11.4. Orthogonale Matrizen . . . 467
11.5. Symmetrische $(2, 2)$-Matrizen . . . 470
11.6. Diagonalisierung mit orthogonalen Matrizen . . . 473
11.7. Spektraldarstellung in dyadischer Form . . . 475
11.8. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . 478
Aufgaben . . . 480

**12. Modelle und Anwendungen von Eigensystemen 485**
12.1. Eigensysteme und Differenzialgleichungen . . . . . 486
12.2. Eigensysteme und Differenzengleichungen . . . . . 501
12.3. Eigensysteme und Kegelschnitte . . . . . 513
12.4. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . . 518
Aufgaben . . . . . 519

**13. Die Singulärwertzerlegung 521**
13.1. Hauptsatz und Berechnung der Singulärwertzerlegung . . . . . 521
13.2. Reduzierte Singulärwertzerlegung . . . . . 531
13.3. Lösen mit (reduzierter) SVD-Faktorisierung . . . . . 532
13.4. Dyadische Form der Singulärwertzerlegung . . . . . 533
13.5. Anwendung: Bildkompression . . . . . 536
13.6. Lineare Systeme und die Pseudoinverse . . . . . 538
13.7. Die rangdefekte lineare Ausgleichsaufgabe . . . . . 542
13.8. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . . 549
Aufgaben . . . . . 549

**14. Lineare Abbildungen von $V$ nach $W$ und Matrizen 553**
14.1. Definition und Beispiele . . . . . 553
14.2. Eigenschaften linearer Abbildungen . . . . . 556
14.3. Verkettung und Matrizenmultiplikation . . . . . 559
14.4. Kern und Bild . . . . . 560
14.5. Strukturgleichheit (Isomorphie) . . . . . 566
14.6. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . . 570
Aufgaben . . . . . 572

**15. Darstellungsmatrizen und Basiswechsel 575**
15.1. Koordinaten bezüglich einer Basis . . . . . 575
15.2. Basiswechsel . . . . . 580
15.3. Darstellungsmatrix . . . . . 589
15.4. Verkettung und Matrizenmultiplikation . . . . . 601
15.5. Veränderung der Darstellungsmatrix bei Basiswechsel . . . . . 602
15.6. Diagonalisierung, Faktorisierung und Basiswechsel . . . . . 606
15.7. Weitere Bemerkungen und Hinweise . . . . . 608
Aufgaben . . . . . 608

**A. Vier Hauptaufgaben der Linearen Algebra 611**

**B. Lineare Gleichungssysteme 613**

**Schlussbemerkungen und Hinweise 615**

**Musterlösungen der Aufgaben** **617**

**Literaturverzeichnis** **719**

**Symbole und Bedeutungen. Alphabet** **725**

**Namen- und Stichwortverzeichnis** **727**

# 1. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

*Computational mathematics is mainly based on two big ideas: Taylor series and linear algebra.*
LLOYD N. TREFETHEN

*Der Computer hat dazu beigetragen, das Studium der numerischen Analysis zu vertiefen und die Theorie der Matrizen aus ihrem fünfzigjährigen Schlaf zu erwecken.*
PHILIP J. DAVIS, REUBEN HERSH [22]

In vielen realen außermathematischen, aber auch innermathematischen Problemen treten *lineare Gleichungssysteme* auf; ihre Behandlung ist eines der wichtigsten Themen der *Linearen Algebra*. In der *Elektrotechnik* etwa führt die Anwendung der KIRCHHOFFschen Knotenregel für Schaltkreise auf lineare Gleichungssysteme, Bilanzaufgaben in *Technik* und *Ökonomie* werden mit linearen Systemen modelliert. Innerhalb der Mathematik werden Lösungen nichtlinearer Gleichungssysteme und Optimierungsaufgaben mit linearen Systemen gesucht (Quasi-NEWTON-Verfahren). *Interpolationen* und *Approximationen* von Kurven und Flächen mittels Spline- und anderer Funktionen führen auf lineare Systeme. Die *Integration* von Anfangswertaufgaben bei Systemen gewöhnlicher *Differenzialgleichungen*, die Diskretisierung von *Randwertaufgaben* bei gewöhnlichen und partiellen *Differenzialgleichungen* mittels *Differenzenverfahren* oder *finiter Elemente* oder das Lösen von *Anfangs- und Randwertaufgaben bei partiellen Differenzialgleichungen* führt über lineare Gleichungssysteme zur Lösung.

Zur sachgerechten Behandlung mathematischer Probleme der *Technik* und *Wirtschaft*, etwa zu Netzwerkberechnungen in der *Elektrotechnik* oder zur Berechnung von Fachwerken in der *Statik*, zur Lösung von *Transportproblemen* oder anderen *Optimierungsaufgaben*, zur qualitativen und quantitativen Diskussion *mechanischer dynamischer Systeme* bedient man sich der Matrizenrechnung. Matrizen sind mathematische Modelle für innermathematische und außermathematische Probleme, zum Beispiel für *Drehungen, Spiegelungen, Projektionen, lineare Abbildungen, digitale Bilder, lineare Gleichungssysteme, Graphen, innerbetriebliche Leistungsverflechtungen, Materialverflechtungen bei Stufenproduktionen, Kundenwanderungen, volkswirtschaftliche Verflechtungen, Trägheitsbeschreibungen starrer Körper*, usw.

## 1.1. Lineare Gleichungssysteme

Die Gleichung

$$2x - 5 = 3$$

ist eine lineare Gleichung, weil die Variable $x$ linear in ihr vorkommt. Löst man die Gleichung $2x - 5 = 3$ nach der Unbekannten $x$ auf, so erhält man die Lösung $x = 4$.

Allgemein ist eine **lineare Gleichung in einer Variablen** $x$ von der Form

$$ax = b,$$

wobei $a, b$ reelle Konstanten sind. Für $a \neq 0$ ist $x = b/a$ die Lösung.

**Satz 1.1.** *Wir betrachten die lineare Gleichung $ax = b$ mit reellen Konstanten $a$, $b$.*

*(a) Ist $a \neq 0$, dann ist $x = b/a$ die (eindeutige)[1] Lösung von $ax = b$.*
*(b) Ist $a = 0$, aber $b \neq 0$, dann hat $ax = b$ keine Lösung.*
*(c) Ist $a = 0$ und $b = 0$, dann löst jede reelle Zahl die Gleichung $ax = b$.*

*Für die Lösungsmenge $L$ von $ax = b$ gilt also: $L = \{b/a\}$, $L = \{\}$ oder $L = \mathbb{R}$.*

Wir betrachten zu diesem Satz gleich ein Beispiel.

**Beispiel 1.1.** Die Lösung der Gleichung $2x = 6$ ist $x = 3$. Die Gleichung $0x = 7$ hat keine Lösung. Die Gleichung $0x = 0$ hat jede reelle Zahl als Lösung, zum Beispiel ist $x = 4$ eine Lösung. ■

Bei der Lösung der Gleichung $ax = b$ sind drei Fälle zu unterscheiden: *Eindeutige Lösbarkeit*, *Unlösbarkeit* und *mehrdeutige Lösbarkeit*. Ausschließlich diese drei Fälle treten auch bei linearen Gleichungssystemen auf.

Eine **lineare Gleichung in $n$ Variablen** $x_1, x_2, \dots, x_n$ hat die Gestalt

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

wobei $a_1, a_2, \dots, a_n$ und $b$ gegebene reelle Konstanten sind. Die reellen Zahlen $a_i$ nennt man die **Koeffizienten** der Gleichung und $b \in \mathbb{R}$ ist die **rechte Seite** (**Absolutglied**) der Gleichung (Zur Schreibweise sei bemerkt, dass wir für die Variablen $x_1$, $x_2$, $x_3$ einer Gleichung auch $x$, $y$ oder $z$ schreiben. Kommen mehr als drei Unbekannte vor, so schreiben wir $x$ mit Index, also $x_1$, $x_2$ usw.).

[1] Das Wort eindeutig habe ich in Klammer gesetzt, weil es überflüssig ist, denn *die* Lösung drückt schon die Eindeutigkeit aus.