1 Mathematische Grundlagen

Lehrziele

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels sollen die Studierenden

- die Grundzüge und den Sinn der Mengenlehre verstehen,
- die wichtigsten Begriffe und Verbindungen der Aussagenlogik beherrschen,
- in der Lage sein, die grundlegenden arithmetischen Rechenregeln und -gesetze sicher anzuwenden,
- das Umgehen mit dem Summen- und Produktzeichen sicher beherrschen,
- in der Lage sein, Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion durchzuführen,
- mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen sicher umgehen können,
- in der Lage sein, Äquivalenzumformungen durchzuführen,
- lineare Gleichungen und quadratische Gleichungen sicher lösen können,
- befähigt sein, nichtlineare Gleichungen aufzulösen, ggf. unter Anwendung des Horner-Schemas oder der Polynomdivision,
- in der Lage sein, Ungleichungen zu lösen.

1.1 Mengen und Zahlenmengen

Wie gemischt auch immer die Erinnerungen und Gefühle an die Mengenlehre aus der Schulzeit sein mögen: Es ist unbestritten, dass die Mengenlehre[1] ein wichtiges Instrumentarium bereit stellt, mit dessen Hilfe oft umfangreiche und komplizierte Problemstellungen und deren Lösungen kompakt und übersichtlich dargestellt werden können. Deshalb wollen wir uns an dieser Stelle mit den wichtigsten Sachverhalten noch einmal vertraut machen.

1.1.1 Mengen und Mengenbeziehungen

a) Begriff und Darstellung von Mengen

Definition

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter unterschiedlicher Objekte (Dinge). Von jedem Objekt muss eindeutig angebbar sein, ob es zur entsprechenden Menge gehört oder nicht. Die einzelnen Objekte, aus denen eine Menge zusammengesetzt ist, heißen **Elemente** dieser Menge.

Mengen werden üblicherweise mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnet (A, B, C,…). Für die Aufzählung verwendet man in der Regel „geschweifte" Klammern „{" bzw. „}". Das Symbol „$\in$" steht für die Elementdarstellung, gelesen „ist Element der Menge…". Ist ein Element nicht in einer Menge enthalten, verwendet man das Symbol „$\notin$", gelesen „ist nicht Element der Menge …".
Man kann Mengen angeben durch **Aufzählen**, durch **graphische Darstellung** oder durch **Beschreibung**.

Bemerkungen und Beispiele:

i) (Aufzählung) Die ersten 5 Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11 bilden die Menge: „Menge der ersten 5 Primzahlen". Bezeichnen wir diese Menge mit A, so können wir als Aufzählung schreiben: $A = \{2,3,5,7,11\}$. Es gilt beispielsweise $7 \in A$, d.h. die Zahl (also das Element) 7 ist Element der Menge A, also Element der ersten 5 Primzahlen. Dagegen gilt beispielsweise $6 \notin A$, d.h. 6 ist nicht Element von A.

ii) (graphische Darstellung) Für die graphische Darstellung verwendet man sogenannte **Venn-Diagramme**. Bezogen auf die Menge $A = \{2,3,5,7,11\}$ sähe es folgendermaßen aus:

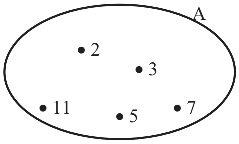


Abbildung 1.1: Venn-Diagramm am Beispiel

1 Die Mengenlehre wurde begründet von dem deutschen Mathematiker Georg Cantor (1845–1918).

iii) (Beschreibung) Mit „Menge der am heutigen Tag geschlossenen Ehen in Nordrhein-Westfalen“ liegt eine beschreibende Darstellung einer Menge vor. Es wäre hingegen sehr mühevoll, jedes Element dieser Menge einzeln aufzuzählen.
iv) Die Menge „Fußballfans von Borussia Mönchengladbach“ ist keine Menge nach Cantor, da nicht eindeutig angebbar ist, ob ein Element („Fußballfan“) zu der Menge gehört oder nicht (ob man sich selbst als Fan sieht oder als solcher von seiner Umwelt wahrgenommen wird, ist subjektiv und nicht objektiv entscheidbar).
v) In der Statistik, insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wird Ihnen die Mengenlehre wieder begegnen. Sie wird dort insbesondere angewandt zur Verdeutlichung von Ereignissen und deren Wahrscheinlichkeiten.

Wir wollen noch zwei spezielle Mengen definieren:

Definition

Die Menge, in der alle betrachteten Elemente enthalten sind, wird als **Grundmenge G** bezeichnet. Eine Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge**.

Für die leere Menge schreibt man entweder $\{\}$ oder $\varnothing$.

Beispiele:
i) A sei die Menge der ersten 8 Buchstaben unseres Alphabets. Dann ist die Grundmenge die Menge der Buchstaben unseres Alphabets: $G = \{A,B,C,...,X,Y,Z\}$ und für A gilt: $A = \{A,B,C,D,E,F,G,H\}$.
ii) Die Menge A=Menge der Primzahlen zwischen 23 und 29 ist die leere Menge, also $A=\{\}$, da die Zahlen 24, 25, 26, 27 und 28 alle keine Primzahlen sind.
iii) Die Menge der „vollkommenen Zahlen“ zwischen 10 und 20 ist leer.[2]

b) Mengenbeziehungen

Wir wollen uns im folgenden die Beziehungen zwischen zwei oder mehreren Mengen ansehen.

i) Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen A und B heißen **gleich**, geschrieben A=B, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Beispiel: Für die Mengen $A = \{1,3,5\}$, $B = \{5,3,1\}$ und $C = \{17^0, \sqrt[3]{27}, 15-10\}$ gilt: A=B=C

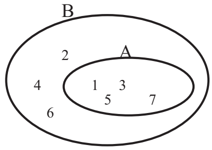
ii) Teilmengen

Die Menge A heißt Teilmenge der Menge B, wenn jedes Element der Menge zugleich auch Element von B ist.
Schreibweise: $A \subset B$

2 Für alle Freunde der Zahlen ein wenig Zahlentheorie am Rande: Unter einer **vollkommenen Zahl** versteht man eine Zahl, die gleich der Summe ihrer Teiler (einschließlich der 1, aber ohne die Zahl selbst) ist. Hiervon gibt es nicht besonders viel. Die erste vollkommene Zahl ist die 6 (=1+2+3). Die nächste vollkommene Zahl ist 28 (=1+2+4+7+14). Für den Fall, dass Sie sich selbst auf die Suche machen: Die nächsten vollkommenen Zahlen sind 496 und 8 128.

Bemerkungen und Beispiele:

i) Für die Mengen $A = \{1,3,5,7\}$ und $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ gilt: $A \subset B$.



ii) Die Menge der Stürmer in einer Fußballmannschaft ist eine Teilmenge der gesamten Mannschaft.

iii) Sei $A = \{x|x \text{ ist eine Stadt in Nordrhein-Westfalen}\}$
$B = \{y|y \text{ ist eine Stadt in Deutschland}\}$
$C = \{z|z \text{ ist eine Stadt in Asien}\}$
Dann gilt: $A \subset B$, aber $A \not\subset C$ und $B \not\subset C$.

iv) Man vereinbart, dass die leere Menge {} Teilmenge jeder Menge ist.

v) Jede Menge ist auch Teilmenge von sich selbst.

iii) **Potenzmenge**

Die Menge P(A) aller Teilmengen M einer gegebenen Menge A heißt Potenzmenge der Menge A, geschrieben: $P(A) = \{M | M \subset A\}$

Beispiel: Es sei $A = \{1,2,3\}$
Dann ist $P(A) = \{\{\ \},\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

Hat die Menge A n Elemente, dann besitzt die Potenzmenge P(A) 2^n Elemente, d.h. 2^n verschiedene Teilmengen. Die leere Menge {} und die Menge A sind hierbei entsprechend der Eigenschaft einer Teilmenge mitgezählt.
Im obigen Beispiel besitzt die Potenzmenge der Menge A mit n=3 Elementen $2^3 = 8$ Elemente.

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Menge $\{a;b;c\}$. Bestimmen Sie die Potenzmenge!

b) Gegeben sei die Menge $\{a;b;c;d;e;f;g;h\}$. Aus wie viel Elementen besteht die Potenzmenge?

1.1.2 Mengenoperationen

Wir kennen Verknüpfungen von Zahlen z. B. durch Addition, Subtraktion etc. Ähnliche Aussagen lassen sich auch für **Mengen** machen.

i) **Durchschnitt zweier Mengen**

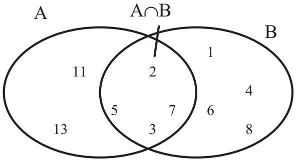
Unter dem **Durchschnitt** zweier Mengen (der **Schnittmenge**) versteht man die Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören.
Schreibweise: $A \cap B$
Es gilt: $A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$. Es liegt also hier die „und"-Verknüpfung vor, also „x in A" *und* „x in B". Das $\wedge$-Zeichen ist das mathematische Symbol für „und".
Ferner gilt für n Mengen (i=1,…n, n$\in \mathbb{N}$):

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x | x \text{ liegt in allen Mengen } A_i\}$$

Haben zwei Mengen A und B kein gemeinsames Element, d.h. es ist $A \cap B = \{\ \}$, dann heißen diese Mengen **disjunkt** oder auch elementfremd.

Beispiele:

i) $A = \{2,3,5,7,11,13\}$ und
$B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
$A \cap B = \{2,3,5,7\}$



ii) Grundmenge G = natürliche Zahlen = {1,2,3,4,5,6,...}. In G seien seien:
A = Menge der durch 3 teilbaren Zahlen = {3,6,9,12,15,21,24,27,30...}
B = Menge der durch 7 teilbaren Zahlen = {7,14,21,28,35...}
$A \cap B$ = {21,42,63,84,...} = Menge der durch 21 teilbaren Zahlen.

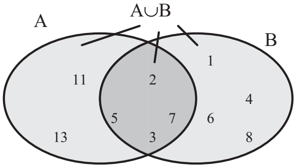
ii) **Vereinigung zweier Mengen**

Unter der **Vereinigungsmenge** der Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die entweder zu A oder zu B (oder zu beiden) gehören.
Schreibweise: $A \cup B$
Es gilt: $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$. Es gilt hier die „oder"-Verknüpfung, also „x in A" *oder* „x in B". Das $\vee$-Zeichen ist das mathematische Symbol für „oder".
Ferner gilt für n Mengen ($i = 1,\ldots n,\ n \in \mathbb{N}$):

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \text{ liegt in mindestens einer der Mengen } A_i\}$$

Beispiele:

i) A = {2,3,5,7,11,13}und
B = {1,2,3,4,5,6,7,8}
$A \cup B$ = {1,2,3,4,5,6,7,8,11,13}



ii) Grundmenge G = natürliche Zahlen = {1,2,3,4,5,6,...}. In G seien:
A = Menge der durch 3 teilbaren Zahlen = {3,6,9,12,15,18,21,24,27,30...}
B = Menge der durch 7 teilbaren Zahlen = {7,14,21,28,35...}
$A \cup B$ = {3,6,7,9,12,14,15,18,21,24,27,28,30,33,35,36,39,42,45,...}

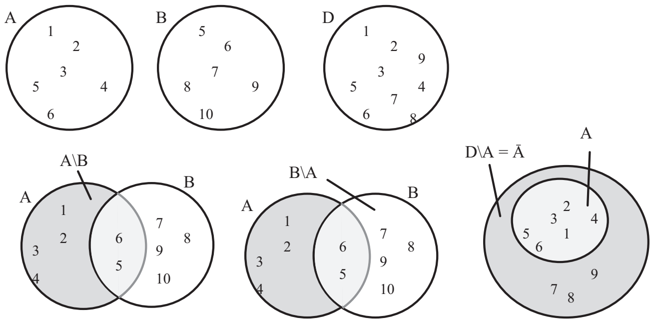
iii) **Differenz- und Komplementärmenge**

Unter der **Differenzmenge** der Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die **zu A, aber nicht zu B** gehören.
Schreibweise: A / B (gelesen „A ohne B") $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Falls A eine Teilmenge von B ist, so bezeichnet man die Differenzmenge B\A auch als die **Komplementärmenge** von A bezüglich B. Sie besteht aus denjenigen Elementen, die zu B, aber nicht zu A gehören.
Schreibweise: $C_B A$ $C_B A := \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$, falls $A \subset B$

Immer möglich ist die Komplementbildung bezüglich der Grundmenge G, hier wird zumeist das Symbol $\overline{A}$ verwendet.
Schreibweise: $\overline{A}$ $$\overline{A} = C_G A = G \setminus A = \{x \mid x \in G \wedge x \notin A\}$$

Beispiele:

i) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$
$B = \{5,6,7,8,9,10\}$
$D = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, A \subset D$
$A \setminus B = \{1,2,3,4\}$ Differenzmenge
$B \setminus A = \{7,8,9,10\}$ Differenzmenge
$C_D A = D \setminus A = \{7,8,9\}$ Komplementärmenge



ii) G = Kinder einer Schulklasse
A= Menge (Anzahl) der Mädchen in dieser Klasse, $A \subset G$
$\overline{A}$ = Menge (Anzahl) der Jungen in dieser Klasse

Wir wollen abschließend noch einige Gesetze und Rechenregeln der Mengenalgebra zusammenfassen. Wie an anderer Stelle schon einmal erwähnt, werden Sie einige dieser Regeln in der Statistik im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung wieder sehen.

	Regel	**Name**	**Beispiel**	**Formel**
			Es seien $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ $B = \{5,6,7,8,9,10\}$ $C = \{2,4,6,8,10,12\}$ $G = \mathbb{N}$ (natürliche Zahlen)	
1.	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	Kommutativgesetze	$A \cap B = \{5,6,7\} = B \cap A$ $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = B \cup A$	(1.1)
2.	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Assoziativgesetze	$\underbrace{(A \cap B)}_{\{5,6,7\}} \cap C = \{6\} = A \cap \underbrace{(B \cap C)}_{\{6,8,10\}};$ $\underbrace{(A \cup B)}_{\{1,2,3,\ldots,8,9,10\}} \cup C = \{1,2,3,\ldots,8,9,10,12\}$ $= A \cup (B \cup C)$	(1.2)

	Regel	Name	Beispiel	Formel
3.	$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$	Distributivgesetze	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $\underbrace{\{1,\ldots,7\}}_{A}\cup\underbrace{\{6,8,10\}}_{B\cap C}=\underbrace{\{1,2,\ldots,9,10\}}_{A\cup B}\cap\underbrace{\{1,\ldots,8,10,12\}}_{A\cup C}$ $=\{1,2,3,4,5,6,7,8,10\}$ $\underbrace{\{1,\ldots,7\}}_{A}\cap\underbrace{\{5,6,7,8,9,10,12\}}_{B\cup C}=\underbrace{\{5,6,7\}}_{A\cap B}\cup\underbrace{\{2,4,6\}}_{A\cap C}=\{6\}$	(1.3)
4.	$A/(B\cap C) = (A/B)\cup(A/C)$ $A/(B\cup C) = (A/B)\cap(A/C)$ $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$	De Morgansche Regeln	$\underbrace{\{1,\ldots,7\}}_{A}\setminus\underbrace{\{6,8,10\}}_{B\cap C}=\underbrace{\{1,2,3,4\}}_{A\setminus B}\cup\underbrace{\{1,3,5,7\}}_{A\setminus C}=\{1,2,3,4,5,7\}$ $\underbrace{\{1,\ldots,7\}}_{A}\setminus\underbrace{\{2,4,5,6,7,8,9,10,12\}}_{B\cup C}=\underbrace{\{1,2,3,4\}}_{A\setminus B}\cap\underbrace{\{1,3,5,7\}}_{A\setminus C}=\{1,3\}$ $\underbrace{\{11,12,13,\ldots\}}_{\overline{A\cup B}}=\underbrace{\{8,9,10,11,\ldots\}}_{\overline{A}}\cap\underbrace{\{1,2,3,4,11,12,13,\ldots\}}_{\overline{B}}$ $\underbrace{\{1,2,3,4,8,9,10,11,\ldots\}}_{\overline{A\cap B}}=\underbrace{\{8,9,10,11,\ldots\}}_{\overline{A}}\cup\underbrace{\{1,2,3,4,11,12,13,\ldots\}}_{\overline{B}}$	(1.4)

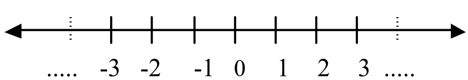
Aufgabe 2:
Bilden Sie Durchschnitt $A\cap B$, Vereinigung $A\cup B$ und Differenz $A\setminus B$ folgender Mengen:

a) A = {3;4;6;7;8}, B = {2;4;5;6;7}
b) A = {a;b;c}, B = { }
c) A = { }, B = {1;3;5;7}

Aufgabe 3:
Gegeben sind folgende Mengen: Grundmenge G = {1,3,5,7,9,11,13,15}, A = {1,3,5,9}, B = {9,11,13,15}. Belegen Sie anhand des Beispiels die Gültigkeit folgender Aussage: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$!

1.1.3 Zahlenmengen

Nachdem wir uns in den obigen Abschnitten mit Mengen allgemein befasst haben, betrachten wir nun eine besonders wichtige Kategorie von Mengen, die **Zahlenmengen**. In der Mathematik unterscheidet man verschiedene Zahlenmengen, die sinnvoll aufeinander aufgebaut sind. Alle diese Mengen haben unendlich viele Elemente, dennoch sind diese Mengen unterschiedlich „groß". Man kann sich gedanklich alle Zahlen auf einem Zahlenstrahl untergebracht vorstellen.



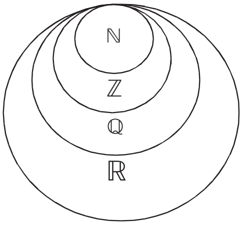
Das einfachste und grundlegendste Zahlensystem sind die **natürlichen Zahlen** (1, 2, 3,.....). Schließt man die 0 und die negativen Zahlen mit ein, so bezeichnet man diese Menge als **ganze Zahlen**. Für die meisten Berechnungen reichen jedoch die ganzen Zahlen nicht aus, denn eine Zahl wie etwa 0,5 (= $\frac{1}{2}$) oder $\frac{2}{3}$ ist nicht in der Menge der ganzen Zahlen enthalten. Hierfür benötigen wir eine neue Zahlenmenge, die wir als

rationale Zahlen bezeichnen. Die rationalen Zahlen umfassen alle Brüche und damit auch die ganzen Zahlen (z. B. ist $1 = \frac{1}{1}$). Mit den rationalen Zahlen sind allerdings noch nicht alle denkbaren Zahlen erfasst. Der Zahlenstrahl ist noch immer „lückenhaft". Es gibt Zahlen, die sich nicht als Bruch darstellen lassen, z. B. die beiden Naturkonstanten π (= 3,14159...) und e (= 2,71828..., „Eulersche Zahl") oder etwa $\sqrt{3}$, diese Zahlen heißen irrational. Erweitert man die rationalen Zahlen um die irrationalen Zahlen, so erhält man die **reellen Zahlen**. Sie decken den Zahlenstrahl komplett ab, deshalb ist es sehr praktisch, wenn man für Berechnungen die reellen Zahlen zu Grunde legt, denn um etwaige „Lücken" braucht man sich dann nicht mehr zu sorgen. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass es noch eine weitere Zahlenmenge gibt, die die Menge der reellen Zahlen umfasst. Sie wird als die Menge der **komplexen Zahlen** bezeichnet und im Allgemeinen mit $\mathbb{C}$ abgekürzt. In der Menge der komplexen Zahlen lassen sich Ausdrücke berechnen – wie z. B. $\sqrt{-17}$ – die in der Menge der reellen Zahlen nicht definiert sind. Für die Wirtschaftsmathematik sind sie jedoch von untergeordneter Bedeutung, weshalb wir sie nicht weiter behandeln wollen.

Zusammenfassung:

Zahlen	**Begriff**	**Abk.**
1, 2,.3,....	Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$
... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3,...	Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$
Alle Brüche	Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$
Alle rationalen Zahlen plus alle irrationalen Zahlen (z. B. π, e, $\sqrt{2}$)	Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$

Für die behandelten Zahlenbereiche gilt somit: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Wir wollen uns zum Abschluss dieses Kapitels noch mit speziellen Mengen reeller Zahlen beschäftigen, nämlich mit den **Intervallen**.
Die Menge der reellen Zahlen, die einer Ungleichung $a \leq x \leq b$ bzw. $a < x < b$ bzw. $a \leq x < b$ bzw. $a < x \leq b$ genügen, nennt man **Intervall**.

Definition

Seien a und b $\in \mathbb{R}$ mit a < b. Dann heißen

a) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ **abgeschlossenes** Intervall von a bis b,
b) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ **offenes** Intervall von a bis b,
c) die Intervalle $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ und $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ **halboffene** Intervalle von a bis b. Insbesondere heißen
   c1) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ **rechtsoffen-linksabgeschlossenes** Intervall von a bis b,
   c2) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ **linksoffen-rechtsabgeschlossenes** Intervall von a bis b.

zu a) Beim abgeschlossenen Intervall werden die Endpunkte eingeschlossen. Das Intervall [2,5] umfasst alle reellen Zahlen von 2 bis 5 unter *Einschluss* der Zahlen 2 und 5.

zu b) Beim offenen Intervall werden die Endpunkte ausgeschlossen. Das Intervall (2,5) umfasst alle reellen Zahlen von 2 bis 5 unter *Ausschluss* der Zahlen 2 und 5. Gelegentlich verwendet man in der Literatur für ein offenes Intervall auch die Schreibweise]a, b[.

zu c) Beim halboffenen Intervall gehört jeweils nur ein Endpunkt zum Intervall. Es kann hier an Stelle der reellen Zahlen a oder b auch $\propto$ oder $-\propto$ gesetzt werden. Man spricht dann von einem **uneigentlichen** Intervall.

Beispiele: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$, $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$, $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

1.2 Aussagenlogik

1.2.1 Aussagen

Im Folgenden wollen wir uns mit den Grundbegriffen der Aussagenlogik vertraut machen. Sie sind – ebenso wie die Mengenlehre – grundlegend für das Verständnis weitergehender mathematischer Betrachtungen.
Die Logik ist die Lehre vom folgerichtigen Denken, d.h. sie befasst sich mit den Regeln des Schließens von gegebenen Aussagen auf neue, daraus ableitbare Folgerungen. Sie dient dazu, wissenschaftliche Sachverhalte exakt und widerspruchsfrei zu formulieren.
Wer hat nicht schon einmal den in der Umgangssprache geläufigen Satz verwendet „Ist ja logisch". In der Regel meint man, dass sich ein neuer Sachverhalt ergeben hat, der sich aus vorausgegangenen erschließt oder erschlossen hat. Ob es sich dabei jedes Mal um einen logischen Vorgang im Sinne der Aussagenlogik handelt, darf allerdings bezweifelt werden.

Wir wollen uns in diesem Kapitel auf die wichtigsten Sachverhalte zur Aussagenlogik beschränken. Zuvor müssen wir allerdings klären, was im mathematischen Kontext überhaupt unter einer Aussage zu verstehen ist.

Definition

Unter einer **Aussage** versteht man einen Satz (in einer gewöhnlichen Sprache), der **entweder wahr (w) oder falsch (f)** ist.

Beispiele und Bemerkungen:

- Der Satz „Düsseldorf liegt am Rhein“ ist eine wahre Aussage.
- Der Satz „Der Kölner Dom hat den höchsten Kirchturm der Welt“ ist eine falsche Aussage.[3]
- Der Satz „Jeder dritte Kölner trinkt heimlich Altbier“ ist keine Aussage, denn der Wahrheitsgehalt ist nicht zweifelsfrei festzustellen.
- Für eine Aussage ist *nicht* erforderlich, dass wir die Antwort kennen, gefordert ist lediglich, dass sie entweder wahr oder falsch ist. So ist zum Beispiel der Satz „Deutschland wird im Jahre 2010 Fußballweltmeister“ eine Aussage. Sie ist entweder wahr oder falsch, obwohl wir den Wahrheitsgehalt heute noch gar nicht ermitteln können.
- Keine Aussage dagegen ist: „Deutschland wird mit Wahrscheinlichkeit 0,2 Fußballweltmeister im Jahre 2010“.

Aussagen können miteinander **verbunden** werden. Umgangssprachlich verknüpft man Aussagen durch „nicht“, „und“, „oder“, „wenn…dann…“, entweder…oder…“ etc. In der Aussagenlogik lassen sich alle Satz- und Gedankengebilde auf wenige Grundoperationen von höchstens zwei Aussagen zurückführen. Man unterscheidet in der Aussagenlogik zwischen folgenden Begriffen: **Negation**, **Konjunktion**, **Disjunktion**, **Implikation** und **Äquivalenz.**

1.2.2 Aussagenverbindungen

i) Negation (Verneinung, Symbol $\neg$, gelesen „nicht“) $\boxed{\neg A}$

Die Negation wird nur auf eine Aussage angewendet („einstellige“ Operation).
Die dazugehörige **Wahrheitstafel** ist rechts abgebildet.
Wenn also A wahr ist, dann ist $\neg A$ („nicht A“) falsch und umgekehrt.
Die doppelte Negation führt wieder zur ursprünglichen Aussage: $\neg(\neg)A = A$.

A	$\neg A$
w	f
f	w

Beispiele:

1. A: Das Auto ist schwarz. $\neg$A: Das Auto ist nicht schwarz.
   $\neg(\neg)A$: Das Auto ist nicht nicht schwarz, also ist das Auto schwarz.
   Die Negation „nicht schwarz“ sagt keineswegs, dass das Auto weiß ist. Es besagt nur, dass es eine andere Farbe als schwarz hat.

3 Der Kölner Dom ist bezogen auf die Kirchturmhöhe mit 157,4 Metern „nur“ die Nummer 3 in der Welt. Der höchste Kirchturm der Welt steht in Ulm. Das Ulmer Münster hat eine Höhe von 161,5 Metern. Die Kölner kontern jedoch gerne damit, dass „ihr“ Dom dafür 2 Kirchtürme hat, das Ulmer Münster nur einen. Dies soll hier aber nicht weiter vertieft werden.