DUDEN

Prüfungstraining

Mathematik

Realschulabschluss

Originalklausuren plus Lösungen immer aktuell online

Inhaltsverzeichnis

Rechnen mit Zahlen und Größen

1 Rechnen mit natürlichen Zahlen

1.1 Grundbegriffe – Rechengesetze

Die Zahlen 0; 1; 2; 3; 4; … bilden die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger n + 1.
Mit Ausnahme der Zahl 0 hat auch jede natürliche Zahl n einen Vorgänger n – 1.
Manchmal wird die Zahl 0 nicht als natürliche Zahl angesehen.

Kommutativgesetze

(1) $a + b = b + a$ (Addition) $317 + 484 = 484 + 317 = 801$
(2) $a \cdot b = b \cdot a$ (Multiplikation) $78 \cdot 94 = 94 \cdot 78 = 7332$

Assoziativgesetze

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Addition) $36 + (24 + 11) = (36 + 24) + 11 = 71$
(2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Multiplikation) $32 \cdot (15 \cdot 8) = (32 \cdot 15) \cdot 8 = 3840$

Distributivgesetze

(1) $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$ $6 \cdot (10 + 5) = 6 \cdot 10 + 6 \cdot 5 = 60 + 30 = 90$
(2) $(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$ $196 : 4 = (200 - 4) : 4 = 200 : 4 - 4 : 4 = 49$

Vorrangregeln

(1) In Klammern wird zuerst gerechnet.
(2) Potenzieren geht vor „Punktrechnung".
(3) „Punktrechnung" (Multiplizieren; Dividieren) geht vor „Strichrechnung" (Addieren; Subtrahieren).

$(8 + 2)^2 : 20 - 5$
$= 10^2 : 20 - 5$
$= 100 : 20 - 5$
$= 5 - 5 = 0$

1. Löse folgende Aufgaben im Kopf.
a) 73 + 27 b) 100 – 39 c) 45 + 84 + 35 d) 135 – 35 – 18
e) 114 + 53 f) 245 – 46 g) 112 + 78 + 9 h) 84 – 52 – 14
i) 64 + 68 j) 71 – 59 k) 72 + 34 + 66 l) 136 – 45 – 64

2. Löse folgende Aufgaben schriftlich.
a) 458 + 792 b) 14 871 – 936 c) 2 348 + 7 609 + 10 733
d) 6 612 + 13 619 e) 5 900 – 1 713 f) 37 844 – 11 813 – 2 047
g) 58 971 + 64 008 h) 74 766 – 23 851 i) 9 822 – 4 613 + 5 037

3. Löse die folgenden Aufgaben schriftlich unter Verwendung entsprechender Rechengesetze.
a) 735 + (125 + 938) b) 4 071 + (516 + 3 929) c) 607 + (393 + 2 816)
d) (631 – 426) + 1 369 e) (827 + 34) – 646 f) (5 555 – 123) – 322
g) $(12 \cdot 6) \cdot 4$ h) $(9 \cdot 18) \cdot 2$ i) $(12 \cdot 15) \cdot 8$

4. Löse folgende Aufgaben im Kopf.
a) $24 \cdot 4$ b) $144 : 12$ c) $5 \cdot 32 \cdot 2$ d) $126 : 2$
e) $17 \cdot 9$ f) $91 : 13$ g) $18 \cdot 4 \cdot 5$ h) $275 : 25$
i) $8 \cdot 35$ j) $96 : 24$ k) $4 \cdot 37 \cdot 250$ l) $176 : 16$

5. Löse folgende Aufgaben schriftlich.

a) $731 \cdot 74$ b) $9102 : 74$ c) $81 \cdot 25 \cdot 47$ d) $594 : 198$
e) $19092 : 86$ f) $(124 \cdot 6308) : 83$ g) $38046 : 51$ h) $(2465 : 29) \cdot 77$

6. Rechne schriftlich und überprüfe mit dem Taschenrechner.

a) $(324 + 248) \cdot 137$ b) $324 + 248 \cdot 137$ c) $324 + 248 + 137$
d) $324 \cdot (248 + 137)$ e) $324 \cdot 248 + 137$ f) $324 \cdot 248 - 137$

7. Löse folgende Aufgaben. Beachte die Vorrangregeln.

a) $3 \cdot (5 + 8) - 4$ b) $3 \cdot 5 + 8 - 4$ c) $3 \cdot (5 + 8 - 4)$
d) $(2 + 6)^2 \cdot 8$ e) $(2^2 + 6^2) \cdot 8$ f) $2^2 + (6 \cdot 8)^2$

8. Schreibe mit Klammern. Rechne dann aus.

a) $19 \cdot 8 - 8 \cdot 8$ b) $11 \cdot 13 - 13$ c) $95 : 6 - 5 : 6$
d) $125 - 25 \cdot 3$ e) $86 - 172 : 2$ f) $444 : 2 - 111$

9. Löse folgende Aufgaben im Kopf. Beachte die Vorrangregeln.

a) $8 + 8 : 8 - 8$ b) $12 \cdot 3 - 15 : 5$ c) $1 + 2 + 3 + 4 \cdot 0$ d) $75 : 25 - 3$
e) $19 \cdot 5 - 50 : 10$ f) $2 + 3 \cdot 18$ g) $169 : 13 - 7$ h) $2 \cdot (8 + 5) - 16$
i) $2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5$ j) $5^2 + 6^2$ k) $8^2 - 7^2$ l) $15^2 + 75$
m) $(3^2 + 2^3) \cdot 2$ n) $\sqrt{3^2 + 4^2}$ o) $\sqrt{3^2} + \sqrt{4^2}$ p) $\sqrt{(3 + 4)^2}$

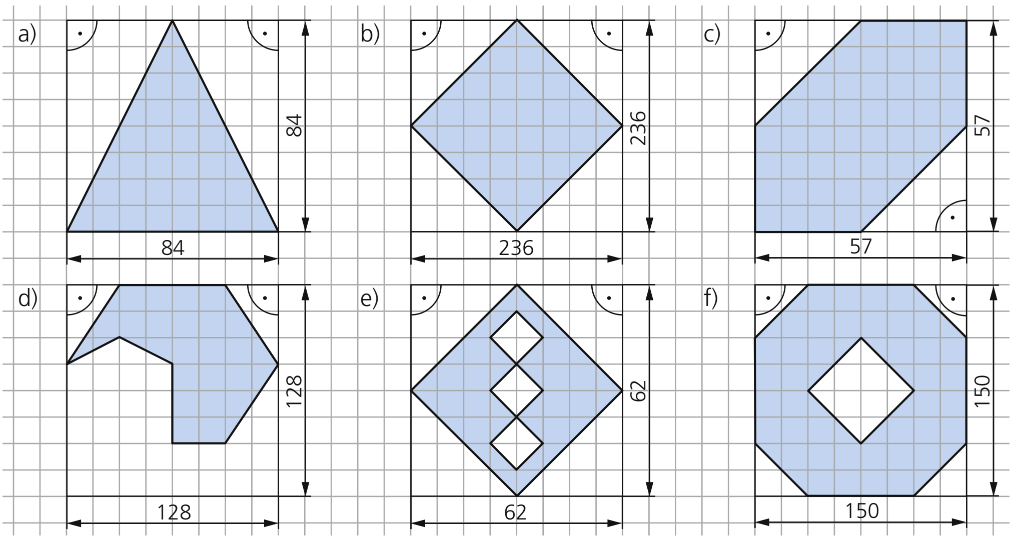
10. Subtrahiert man von einer natürlichen Zahl n die Zahl 97 und multipliziert die dabei entstandene Differenz mit 48, so erhält man die Zahl 4272. Ermittle die Zahl n.

11. Das Fünfzehnfache einer natürlichen Zahl ist genau so groß wie das Zehnfache dieser Zahl vermehrt um 25. Wie heißt diese Zahl?

12. Ermittle die Summe aller geraden natürlichen Zahlen, die kleiner als 100 und gleichzeitig durch 7 teilbar sind. Prüfe, ob die Summe dieser Zahlen durch 49 teilbar ist.

13. Die Summe von drei natürlichen Zahlen sei 21. Addiert man die kleinste und die größte dieser Zahlen, erhält man das Doppelte der dritten Zahl. Wie können die drei Zahlen heißen?

14. Berechne die Flächeninhalte der blauen Flächen. Die Maße sind in Millimeter angegeben.



1.2 Sach- und Anwendungsaufgaben

(1) Text gründlich lesen	Kim hat insgesamt 246 € eingesammelt. Es sind sechs 20-€-Scheine, acht 10-€-Scheine, drei 5-€-Scheine und sieben 1-€-Stücke. Der Rest sind 2-€-Stücke. Wie viele 2-€-Stücke sind es?
(2) Gesuchte und gegebene Größen festlegen	*ges.:* n (Anzahl der 2-€-Stücke) *geg.:* Gesamtbetrag = 246 €; Teilbeträge für 20-€-Scheine, für 10-€-Scheine, für 5-€-Scheine und für 1-€-Stücke
(3) Gleichung lösen	$6 \cdot 20\,€ + 8 \cdot 10\,€ + 3 \cdot 5\,€ + 7 \cdot 1\,€ + n \cdot 2\,€ = 246\,€ \Leftrightarrow n = 12$
(4) Lösung prüfen	$6 \cdot 20\,€ + 8 \cdot 10\,€ + 3 \cdot 5\,€ + 7 \cdot 1\,€ + 12 \cdot 2\,€ = 246\,€$
(5) Im Satz antworten	Kim hat zwölf 2-€-Stücke.

1. Eine Fläche von 2,89 ha wird in 90 Kleingärten eingeteilt. Jeder Kleingarten hat entweder eine Größe von 290 m^2 oder eine Größe von 360 m^2.
Wie viele Gärten jeder Art gibt es insgesamt auf der genannten Fläche?

2. Bei einem Landeswettbewerb von „Jugend forscht“ erhielt genau die Hälfte aller Teilnehmer einen Preis. Es gab nur erste, zweite und dritte Preise. Genau ein Achtel aller Teilnehmer erhielten einen ersten Preis, genau ein Sechstel aller Teilnehmer einen zweiten Preis.
Ermittle die Anzahl aller Teilnehmer an diesem Wettbewerb sowie die Anzahl der ersten, zweiten und dritten Preise, wenn noch bekannt ist, dass mindestens 20, aber weniger als 30 junge Forscher am Wettbewerb teilgenommen haben.

3. Vier Landwirtschaftsbetriebe A, B, C und D besitzen zusammen 104 Traktoren. Würde der Betrieb C fünf Traktoren an den Betrieb A und vier Traktoren an den Betrieb D abgeben, hätten alle vier Betriebe die gleiche Anzahl Traktoren. Wie viele Traktoren besitzt jeder Betrieb?

4. Eine Schulklasse führte eine Exkursion durch. Der Unkostenbeitrag betrug pro Schüler 15,00 €. Am Ende der Exkursion blieb insgesamt ein Restbetrag von 11,00 € übrig. Hätte jeder Schüler aber nur 14,00 € eingezahlt, würden am Ende 11,00 € fehlen.
a) Wie viele Schüler nahmen an der Exkursion teil?
b) Wie viel Euro bekam jeder Schüler am Ende der Exkursion zurück?

5. Finde die vier natürlichen Zahlen, die aus jeder der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen eine wahre Aussage machen, wenn man sie für a, b, c und d einsetzt.
(1) $48 : a = b$ (2) $24 : c = a$ (3) $56 - c \cdot d = 50$ (4) $a > c$ (5) $(a + b + c) : d = 6$

6. Welche natürlichen Zahlen n erfüllen die folgenden Ungleichungen?
a) $15 \leq 5n - 3 \leq 45$ b) $30 < 3 \cdot (3n + 2) < 60$ c) $22 > \frac{n}{3} \geq 10$ d) $3 < \frac{n+2}{2} < 15$

7. In der fünfstelligen natürlichen Zahl 52✶2✶ sollen an den mit Sternchen gekennzeichneten Stellen Ziffern so eingesetzt werden, dass die dadurch entstehende Zahl durch 36 teilbar ist.
Gib alle Möglichkeiten dafür an.

8. Tom und sein Vater sind zusammen 50 Jahre alt. Der Vater ist genau viermal so alt wie sein Sohn Tom. In wie vielen Jahren wird der Vater nur noch dreimal so alt wie Tom sein?

2 Rechnen mit gebrochenen Zahlen

2.1 Rechnen mit gemeinen Brüchen

Die Zahlen $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{3}$; … sind gemeine Brüche, die zur Menge $\mathbb{Q}^+$ gehören.

Kehrwert eines Bruches (reziproker Bruch)
Zähler und Nenner vertauscht ($a \neq 0$; $b \neq 0$)

$\frac{b}{a}$ ist der Kehrwert von $\frac{a}{b}$.

Erweitern und Kürzen ($a, b, n \in \mathbb{N}$; $b, n \neq 0$)

$\frac{a}{b} \overset{\cdot n}{=} \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ $\qquad$ $\frac{a}{b} \overset{:n}{=} \frac{a : n}{b : n}$

$\frac{7}{9} \overset{\cdot 8}{=} \frac{56}{72}$ $\qquad$ $\frac{24}{27} \overset{:3}{=} \frac{8}{9}$

Vergleichen

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, wenn $a \cdot d < b \cdot c$

$\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, da $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} < \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3}$, also $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$

$\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, $2 \cdot 4 < 3 \cdot 3$, also $8 < 9$

Addieren/Subtrahieren gleichnamiger Brüche

$\frac{a}{n} \pm \frac{b}{n} = \frac{a \pm b}{n}$; $\quad$ ($a, b, n \in \mathbb{N}$; $n \neq 0$)

$\frac{7}{8} + \frac{11}{8} = \frac{19}{8}$ $\qquad$ $\frac{14}{11} - \frac{5}{11} = \frac{9}{11}$

Addieren/Subtrahieren ungleichnamiger Brüche
gleichnamig machen, Zähler addieren bzw. subtrahieren

$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{23}{20}$ $\qquad$ $\frac{6}{7} - \frac{1}{3} = \frac{18}{21} - \frac{7}{21} = \frac{11}{21}$

Multiplizieren ($a, b, c, d \in \mathbb{N}$; $b, d \neq 0$)

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

$\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} = \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7} = \frac{24}{35}$ $\qquad$ $\frac{12}{7} \cdot \frac{21}{3} = \frac{\cancel{12}^{4} \cdot \cancel{21}^{3}}{\cancel{7}_{1} \cdot \cancel{3}_{1}} = \frac{12}{1} = 12$

Dividieren ($a, b, c, d \in \mathbb{N}$; $b, c, d \neq 0$)

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

$\frac{4}{9} : 2 = \frac{4}{9} : \frac{2}{1} = \frac{4 \cdot 1}{9 \cdot 2} = \frac{2}{9}$ $\qquad$ $\frac{5}{7} : \frac{10}{14} = \frac{\cancel{5}^{1} \cdot \cancel{14}^{2}}{\cancel{7}_{1} \cdot \cancel{10}_{2}} = 1$

Es gelten das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz.

1. Löse folgende Aufgaben im Kopf. Ermittle x.

a) $\frac{1}{2}$ von 50 km; 7 h; 212 kg; 15 min; 0,3 t $\quad$ b) $\frac{2}{3}$ von 360 g; 9 s; 48 dt; 150 ha; 3 m

c) $\frac{1}{3}$ von x sind 4 m $\quad$ d) $\frac{3}{4}$ von x sind 9 € $\quad$ e) $\frac{2}{5}$ von x sind 36 t $\quad$ f) $\frac{3}{5}$ von x sind 12 m

2. Vergleiche die folgenden Brüche und setze ein =-, >- oder <-Zeichen ein.

a) $\frac{4}{5}$ und $\frac{3}{4}$ $\quad$ b) $\frac{3}{7}$ und $\frac{6}{8}$ $\quad$ c) $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{8}$ $\quad$ d) $\frac{3}{8}$ und $\frac{2}{9}$ $\quad$ e) $\frac{8}{7}$ und $\frac{3}{2}$ $\quad$ f) $\frac{25}{10}$ und $\frac{5}{2}$

3. Rechne und kürze, wenn möglich.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ $\quad$ b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ $\quad$ c) $\frac{1}{8} + \frac{3}{2}$ $\quad$ d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ $\quad$ e) $\frac{3}{5} - \frac{1}{10}$ $\quad$ f) $\frac{5}{3} - \frac{2}{5}$

g) $\frac{3}{4} + \frac{4}{8}$ $\quad$ h) $\frac{5}{7} + \frac{9}{5}$ $\quad$ i) $\frac{2}{3} + \frac{7}{15}$ $\quad$ j) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$ $\quad$ k) $2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4}$ $\quad$ l) $\frac{123}{45} - \frac{45}{123}$

m) $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$ $\quad$ n) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ $\quad$ o) $\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$ $\quad$ p) $8 : \frac{3}{5}$ $\quad$ q) $\frac{1}{12} : 4$ $\quad$ r) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{3}$

s) $\frac{12}{5} \cdot \frac{7}{18}$ $\quad$ t) $\frac{2}{19} \cdot \frac{2}{19}$ $\quad$ u) $2\frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{5}$ $\quad$ v) $\frac{12}{17} : \frac{5}{34}$ $\quad$ w) $\frac{108}{33} : \frac{24}{22}$ $\quad$ x) $2\frac{1}{2} : \frac{18}{4}$

4. Gib x so an, dass wahre Aussagen entstehen.

a) $\frac{3}{4} + x = \frac{23}{20}$ $\quad$ b) $\frac{15}{8} - x = \frac{9}{16}$ $\quad$ c) $\frac{5}{6} \cdot x = \frac{10}{12}$ $\quad$ d) $\frac{1}{2} : x = \frac{1}{4}$ $\quad$ e) $x - \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$ $\quad$ f) $x : \frac{1}{4} = 2$

2.2 Rechnen mit Dezimalbrüchen

Umwandeln eines Bruches in einen Dezimalbruch
Zähler durch Nenner dividieren.

$\frac{3}{4} = 3:4 = 0{,}75$ $\qquad$ $\frac{1}{6} = 1:6 = 0{,}1666\ldots = 0{,}1\overline{6}$

Jeder endliche oder periodische Dezimalbruch lässt sich in einen gemeinen Bruch umwandeln.

$0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$ $\qquad$ $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$

Addieren und Subtrahieren
Werden Dezimalbrüche schriftlich addiert bzw. subtrahiert, schreibt man sie so untereinander, dass die Kommas untereinander stehen.

$7{,}14 + 0{,}8 + 20{,}123$ $\qquad$ $4{,}7 - 2{,}141 - 0{,}6$

$$\begin{array}{lr} & 7{,}140 \\ + & 0{,}800 \\ + & 20{,}123 \\ \hline & 28{,}063 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & 4{,}700 \\ - & 2{,}141 \\ - & 0{,}600 \\ \hline & 1{,}959 \end{array}$$

Multiplizieren
Dezimalbrüche werden miteinander multipliziert, indem man sie wie natürliche Zahlen multipliziert und im Ergebnis (von rechts beginnend) so viele Dezimalstellen abzählt, wie beide Faktoren zusammen besitzen, und dort das Komma setzt.

$0{,}8 \cdot 1 = 0{,}8$ $\qquad$ $3 \cdot 1 = 3$ $\qquad$ $6 \cdot 3 = 18$

$$\begin{array}{lr} \multicolumn{2}{l}{0{,}8 \cdot 0{,}9} \\ \hline & 00 \\ + & 72 \\ \hline & 0{,}72 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} \multicolumn{2}{l}{3{,}12 \cdot 0{,}9} \\ \hline & 000 \\ + & 2808 \\ \hline & 2{,}808 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} \multicolumn{2}{l}{6{,}24 \cdot 3{,}51} \\ \hline & 1872 \\ + & 3120 \\ + & 624 \\ \hline & 21{,}9024 \end{array}$$

Dividieren
Durch gleichwertiges Verschieben des Kommas im Dividend und im Divisor wird der Divisor ganzzahlig.
Das Komma im Ergebnis entspricht dem Komma im Dividenden.

Überschlag: $2:1 = 1$

$2{,}25:1{,}5 = 22{,}5:15 = 1{,}5$ (1 Stelle)

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 75 \\ 75 \\ \hline 0 \end{array}$$

1. Wandle in Dezimalbrüche um.
a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{7}{35}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{20}{10}$ g) $\frac{241}{1000}$

2. Wandle in gemeine Brüche um. Kürze, wenn möglich.
a) 0,8 b) 0,025 c) 0,125 d) 3,7 e) 4,25 f) $0{,}\overline{6}$ g) 0,55

3. Vergleiche die folgenden Brüche.
a) 0,7 und 0,71 b) $\frac{3}{5}$ und 0,6 c) 2,5 und $\frac{5}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ und 0,66
e) $\frac{1}{3}$ und 0,3 f) $0{,}\overline{3}$ und $\frac{1}{3}$ g) $\frac{2}{3}$ und $0{,}\overline{6}$ h) $0{,}\overline{6}$ und 0,6667

4. Rechne im Kopf.
a) $7{,}2 + 1{,}8$ b) $0{,}8 - 0{,}04$ c) $0{,}75 - \frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{5} - 0{,}3$ e) $\frac{3}{4} + 1{,}25$ f) $0{,}2 + \frac{1}{4}$

5. Rechne im Kopf.
a) $0{,}2 \cdot 0{,}3$ b) $14:0{,}5$ c) $0{,}72 \cdot 0{,}1$ d) $0{,}75:0{,}5$ e) $1{,}5 \cdot 1{,}5$ f) $15{,}5:0{,}05$

6. Rechne folgende Aufgaben.
a) $(12 \cdot 0{,}5):1{,}5$ b) $8{,}4:(1{,}4 \cdot 0{,}5)$ c) $\frac{12{,}2 \cdot 0{,}2}{0{,}4}$ d) $1{,}2 - 0{,}6 \cdot 0{,}75$

7. Rechne folgende Aufgaben.
a) $(18{,}4 - 1{,}6) \cdot 4$ b) $18{,}4 - 1{,}6 \cdot 4$ c) $1{,}\overline{3} \cdot 15$ d) $\frac{3}{5}:1{,}2$
e) $3{,}7 \cdot (4{,}5 - 3{,}8)^2 + \frac{16{,}2 + 2{,}16}{18{,}0} - 2{,}6 \cdot 4{,}8 + 10$

2.3 Gemischte Aufgaben – Sachaufgaben

1. Rechne und kürze soweit wie möglich.

a) $\frac{3}{7} + \frac{1}{8}$ b) $\frac{5}{12} - \frac{2}{9}$ c) $0{,}5 + \frac{1}{6}$ d) $2{,}72 - \frac{45}{100}$ e) $1\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$ f) $2\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2}$

g) $3{,}5 - 1\frac{2}{3}$ h) $0{,}76 + \frac{7}{5}$ i) $2{,}4 + \frac{1}{4} - 0{,}2$ j) $3\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 0{,}5$ k) $\left(\frac{1}{2} - 0{,}25\right) : 1\frac{3}{4}$

2. a) Subtrahiere vom Produkt der Zahlen 0,25 und $\frac{1}{4}$ die Zahl $\frac{1}{16}$.

b) Dividiere $\frac{5}{6}$ durch die Summe von $\frac{2}{3}$ und 0,5.

c) Multipliziere die Summe aus 1,4 und $\frac{3}{10}$ mit $\frac{9}{4}$.

3. Finde für x und y solche Zahlen, dass wahre Aussagen entstehen. Gib immer zwei Lösungen an, eine mit gemeinen Brüchen und eine mit Dezimalbrüchen.

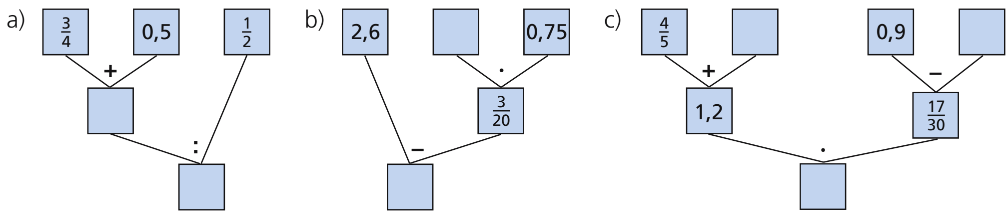
a) $x + y = \frac{5}{6}$ b) $x - y = \frac{1}{5}$ c) $x \cdot y = 0{,}24$ d) $x : y = 0{,}5$

e) $x + y = 4x$ f) $x - y = \frac{y}{2}$ g) $x \cdot y = \frac{1}{y}$ h) $x : y = x^2$

4. a) Berechne die Hälfte des Vierfachen von $\frac{1}{8}$.

b) Berechne das Doppelte von der Hälfte des Fünffachen von 0,8.

5. Vervollständige die folgenden Rechenbäume. Schreibe den jeweils zu berechnenden Term auf.



6. Ein Draht mit einer Länge von 300 m ist 30,150 kg schwer. Wie viel Dezitonnen würden 1 km des gleichen Drahtes wiegen?

7. Drei Hubschrauber gleichen Typs können maximal jeweils 15 000 kg befördern. Um einen Auftrag auszuführen, wurde der 1. Hubschrauber zu $\frac{1}{3}$, der 2. Hubschrauber zu $\frac{7}{8}$ und der 3. Hubschrauber zu $\frac{3}{5}$ der maximalen Tragfähigkeit beladen. Wie viel Tonnen wurden insgesamt befördert?

8. Eine Gruppe von Sportlern unternimmt eine 3-Tage-Radtour. Am 1. Tag schaffen sie ein Drittel der Gesamtstrecke, am 2. Tag 150 km und am 3. Tag das restliche Viertel der Gesamtstrecke.

a) Welche Strecke wurde an den drei Tagen insgesamt zurück gelegt?

b) Wie viel Kilometer wurden am ersten Tag bzw. am dritten Tag geschafft?

9. Ein Bohrer schafft 240 Umdrehungen pro Minute. Wie lange dauert das Durchbohren eines 4 cm dicken Brettes, wenn der Bohrer bei jeder Umdrehung $\frac{1}{4}$ mm tiefer in das Holz eindringt?

10. Ein Klassenzimmer, das 8,20 m lang und 6,40 m breit ist, soll einen neuen Belag bekommen.

a) Wie viel Quadratmeter Belag sind erforderlich, wenn mit 12 % Verschnitt gerechnet wird?

b) Berechne den Kaufpreis, wenn 8,90 € für 1 m^2 zu zahlen sind und 3 % Rabatt gewährt wird.

11. Ein rechteckiges Zimmer mit einer Länge von 7,25 m und einer Breite von 5,80 m soll mit quadratischen Teppichfliesen (3 dm × 3 dm) ausgelegt werden. Eine Fliese kostet 4,25 €.

a) Wie viele Fliesen sind mindestens erforderlich?

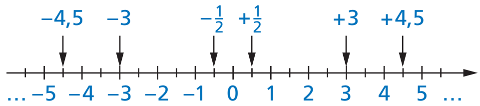
b) Wie viel Euro sind zu zahlen, wenn ein Rabatt von 5,5 % gewährt wird?

3 Rechnen mit rationalen Zahlen

3.1 Grundbegriffe

Die Zahlen $+4$; $+\frac{2}{3}$; $+0{,}88$; 0; $-\frac{1}{2}$; $-0{,}\overline{3}$; $-1\frac{3}{4}$ … sind rationale Zahlen.
Natürliche Zahlen, gebrochene Zahlen und ganze Zahlen sind gleichzeitig rationale Zahlen.

Von zwei rationalen Zahlen ist diejenige größer, die auf der Zahlengeraden weiter rechts liegt.



Zahlen, die auf der Zahlengeraden den gleichen Abstand zum Nullpunkt haben, heißen Gegenzahlen.

Gegenzahlen:
-3 und 3; M$-4{,}5$ und $4{,}5$; $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$

Der absolute Betrag einer Zahl (kurz: Betrag) gibt den Abstand der Zahl zum Nullpunkt an.

Schreibweise:
$|-5| = 5$; $|0| = 0$; $|+4{,}3| = 4{,}3$

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn } a \geq 0 \\ -a, & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

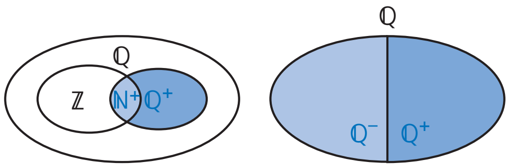
Für alle rationalen Zahlen a gilt: $-(-a) = a$

Menge der natürlichen Zahlen ohne 0 $\mathbb{N}^*$

Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Menge der gebrochenen Zahlen $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{B}$

Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$



$\mathbb{N}^+ \subset \mathbb{Q}^+$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

1. Vergleiche die folgenden Zahlen.
a) 14 und 8 b) −7 und 4 c) $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{3}$ d) 0,5 und −0,4 e) $\frac{3}{8}$ und $-\frac{2}{7}$
f) −5,6 und −5,66 g) 0 und −14 h) −20 und −2 i) −8,7 und 0,43 j) −15,5 und 0

2. Ordne die Zahlen nach der Größe. Beginne mit der kleinsten Zahl.
a) −8; 4; 12; 0; −10; −1; 7; −2
b) 4,2; −3,8; −0,7; 6,4; 10,5; −2,1; 0; −8,4
c) $-\frac{1}{2}$; 0; −0,4; $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{10}$; 0,2; $-\frac{2}{5}$; −3
d) $-\frac{1}{3}$; −0,3; $\frac{2}{3}$; $-0{,}\overline{6}$; 0; 0,33; $\frac{1}{3}$; 0,6

3. Berechne den Wert des Terms $|a| - |b| + |-c|$.
a) $a = 12$; $b = -8$; $c = 3$
b) $a = -12$; $b = 8$; $c = -3$
c) $a = 7{,}5$; $b = 2{,}5$; $c = 14$
d) $a = -7{,}5$; $b = -2{,}5$; $c = -14$
e) $a = -\frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{3}$; $c = 0$
f) $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{3}$; $c = -1\frac{1}{2}$

4. Welche ganzen Zahlen liegen zwischen den folgenden beiden Zahlen?
a) zwischen 0 und 4,9
b) zwischen −4 und 4
c) zwischen −148 und −153
d) zwischen −4,2 und 3,3

5. Gib jeweils alle Mengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^+$ und $\mathbb{Q}$) an, der folgende Zahlen angehören.
a) −4; 1; 2,0; $-1\frac{1}{2}$; $3{,}\overline{3}$; $-\frac{4}{2}$
b) 1,8; $0{,}\overline{4}$; $\frac{1}{3}$; 9,0; 128,7; $-2\frac{1}{2}$

3.2 Rechnen mit rationalen Zahlen

Addieren und Subtrahieren

Klammern werden zuerst aufgelöst. $+(+2) = 2;\ +(-2) = -2;\ -(+2) = -2;\ -(-2) = 2$

gleiche Vorzeichen:

- Ergebnis erhält das gemeinsame Vorzeichen der Zahlen
- Beträge der Zahlen addieren

$24 + 17 = 41$ $\quad -0{,}8 - 0{,}7 = -1{,}5$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ $\quad -\frac{3}{5} - \frac{6}{5} = -\frac{9}{5}$

verschiedene Vorzeichen:

- Ergebnis erhält das Vorzeichen von der Zahl mit dem größeren Betrag
- kleineren Betrag vom größeren Betrag subtrahieren

$-6{,}3 + 1{,}8 = -4{,}5$ $\quad 41 - 29 = 12$

$-5{,}2 + 7{,}4 = 2{,}2$ $\quad 28{,}7 - 40 = -11{,}3$

Multiplizieren und Dividieren (Divisor ungleich 0)

gleiche Vorzeichen:

- Ergebnis erhält das Vorzeichen Plus
- Beträge der Zahlen berechnen

$(-2) \cdot (-5) = 10$ $\quad (-12) : (-4) = 3$

$(-0{,}5) \cdot (-0{,}9) = 0{,}45$ $\quad \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{3}$

verschiedene Vorzeichen:

- Ergebnis erhält das Vorzeichen Minus
- Beträge der Zahlen berechnen

$-18 \cdot 6 = -108$ $\quad (-12) : 4 = -3$

$(-0{,}5) \cdot 0{,}9 = -0{,}45$ $\quad 1{,}21 : (-1{,}1) = -1{,}1$

Es gelten das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz.

1. Rechne im Kopf.

a) $-7 + 28$ b) $-4 - 11$ c) $17 - 24$ d) $36 - 19$ e) $-3 + (-7)$ f) $-16 + (-8)$

g) $29 + (-37)$ h) $-21 + (-39)$ i) $3{,}8 - 5{,}2$ j) $7{,}2 - 4{,}9$ k) $-2{,}6 - 3{,}4$ l) $-0{,}7 - 0{,}8$

m) $-\frac{2}{5} + \frac{1}{100}$ n) $\frac{5}{8} - \frac{1}{4}$ o) $-\frac{1}{3} - \frac{4}{9}$ p) $-\frac{4}{5} + \frac{12}{15}$ q) $\frac{4}{5} - \frac{12}{15}$ r) $-\frac{4}{5} - \frac{12}{15}$

2. Rechne aus.

a) $(-71) - (-184) + 276 - 98$ b) $45{,}96 + 181{,}8 - (-74{,}09) - 231{,}1$

c) $-34{,}8 + 62{,}92 - 14{,}06 - (-91{,}6)$ d) $3471 - (-2429) + (-5817) - 4906$

3. Rechne im Kopf.

a) $-8 \cdot 12$ b) $-7 \cdot (-13)$ c) $15 \cdot (-9)$ d) $-19 \cdot (-8)$ e) $-27 \cdot (-3)$ f) $-45 \cdot 4$

g) $18 \cdot (-6)$ h) $8 \cdot (-14)$ i) $-81 : (-9)$ j) $-144 : 12$ k) $15 : (-0{,}5)$ l) $-122 : (-2)$

4. Berechne die folgenden Terme für $a = -4$ und $b = 9$ im Kopf.

a) $3a + 2b$ b) $2 \cdot |a| - b$ c) $a^2 + b^2$ d) $a^3 - \sqrt{b}$ e) $-|-a| - |b|$

5. Rechne aus.

a) $-16{,}9 \cdot (24{,}7 - 31{,}5)$ b) $-37{,}1 - 8{,}9 \cdot (-7{,}6)$

c) $(14{,}6 - 9{,}23)^2 + 8{,}75$ d) $-5{,}72 + [-2{,}1 + (-4{,}6) \cdot 2{,}8]$

6. Rechne folgende Aufgaben.

a) $\frac{(-48) + (-232)}{4 \cdot (-35)}$ b) $\frac{36 \cdot (-4)}{(-12)^2}$ c) $\frac{(-8)^2 + (-6)^2}{(-5) \cdot \sqrt{25}}$ d) $\frac{\frac{18}{42}}{\frac{3}{49}}$

7. Rechne folgende Aufgaben.

a) $(1{,}7 - 2{,}3) \cdot 5$ b) $25{,}6 \cdot 12 + 4{,}4 \cdot 12$ c) $(-8{,}9)^2 - 8{,}9^2$ d) $\frac{1}{6} - \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1$

3.3 Große und kleine Zahlen – Zehnerpotenzen

Sehr große und sehr kleine Zahlen können mithilfe von Zehnerpotenzen dargestellt werden.

Darstellungsform: a,bcd… $\cdot 10^n$
($1 \leq |a| < 10$ und $a \in \mathbb{Z}$; b, c, d … Ziffern von 0 bis 9; $n \in \mathbb{Z}$)

Lichtgeschwindigkeit:
$v \approx 300\,000\,\frac{km}{s} = 3 \cdot 10^5\,\frac{km}{s}$

Durchmesser des Wasserstoffatoms:
$d \approx 0{,}000\,000\,053$ mm $= 5{,}3 \cdot 10^{-8}$ mm

1. Schreibe mit abgetrennten Zehnerpotenzen.
a) Afrika hat eine Größe von 30 100 000 km². b) Ein Tropfen Blut hat rund 5 000 000 Zellen.
c) Licht hat eine Wellenlänge λ zwischen 0,000 000 39 m und 0,000 000 78 m.
d) Der Durchmesser eines Blutkörperchens beträgt rund 0,000 72 cm.
e) Ein Virus ist ungefähr 0,000 000 19 cm lang.

2. Gib die ungefähren Entfernungen der folgenden Himmelskörper zur Erde in Kilometer an.
Beachte: 1 Lichtjahr = 1 Lj = $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km; 1 Astronomische Einheit = 1 AE = $1{,}496 \cdot 10^8$ km
a) Saturn (9,54 AE) b) Rigel im Sternbild Orion (825 Lj) c) Pluto (39,4 AE)

3. Vereinfache die folgenden Terme.
a) $\frac{10^7}{10^9} \cdot 10^{-5}$ b) $\frac{7{,}5 \cdot 10^6}{2{,}5 \cdot 10^4}$ c) $\frac{4{,}8 \cdot 10^8 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-5}}{2{,}4 \cdot 10^4}$ d) $\frac{3{,}4 \cdot 10^3 + 6{,}6 \cdot 10^3}{10^4}$

4. Berechne im Kopf.
a) $3{,}2 \cdot 10^2$ b) $4 \cdot 10^{-1}$ c) $1{,}8 \cdot 10^3$ d) $5{,}2 \cdot 10^0$ e) 10^{-3} f) $2{,}2 \cdot 10^{-2}$
g) $10^5 \cdot 10^3$ h) $10^{-3} \cdot 10^5$ i) $2 \cdot 10^4 \cdot 10^2$ j) $10^{-8} \cdot 10^{-2}$ k) $10^{-8} : 10^{-2}$ l) $10^5 : 10^{-3}$

3.4 Rationale Zahlen – irrationale Zahlen

Zahlen, die in der Form $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$; $b \neq 0$) dargestellt werden können, sind *rationale Zahlen.* In der Dezimalbruchdarstellung erhält man immer endliche oder periodische Dezimalbrüche.

$0{,}7 = \frac{7}{10}$ $0{,}\overline{6} = 0{,}66666\ldots = \frac{2}{3}$
$-2{,}88 = -\frac{72}{25}$ $-0{,}\overline{13} = -0{,}1313\ldots = \frac{13}{99}$

Irrationale Zahlen können nicht in der Form $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$; $b \neq 0$) dargestellt werden. In der Dezimalbruchdarstellung erhält man immer unendliche, nicht periodische Dezimalbrüche.

$\pi = 3{,}141\,492\,653\ldots$
$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,5\ldots$
$\sqrt{17} = 4{,}123\,105\,6\ldots$

Alle rationalen Zahlen und alle irrationalen Zahlen bilden die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

1. Berechne ohne Taschenrechner.
a) $\sqrt{\frac{49}{225}}$ b) $\sqrt{0{,}25}$ c) $\sqrt{-109}$ d) $\sqrt{81} - \sqrt{361}$

2. Ordne die folgenden Zahlen, beginne mit der kleinsten Zahl.
a) $\sqrt{49}$; $\sqrt{6{,}25}$; π; $0{,}8^2$ b) $\sqrt{\frac{49}{64}}$; $\sqrt{0{,}91}$; $\sqrt{\frac{4}{9}}$; $\sqrt{\pi^2}$; $\sqrt{3{,}14}$ c) $\sqrt{8}$; $\sqrt{1{,}9}$; $\sqrt{\frac{16}{25}}$; $\sqrt{0}$; $-\sqrt{25}$

3. a) Löse die Ungleichung $6x - (7 - x) < 4 \cdot (2x - 1) - 4$ für $x \in \mathbb{Q}$. Gib deren Lösungsmenge an.
b) Welche der Zahlen $-2{,}2$; 0; π; $-\frac{3}{4}$; $-5{,}6$; $(\sqrt{2})^4$ gehören nicht zur Lösungsmenge?

3.5 Potenzieren – Radizieren

Potenzieren und Radizieren (Wurzelziehen) sind Umkehroperationen. ($a \geq 0$; $b \geq 0$; $n \in \mathbb{N}$; $n \neq 1$)

$a^n = b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{b} = a$

$18^2 = 324 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{324} = 18$

$3^4 = 81 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[4]{81} = 3$

Potenzen a^2 mit $a \in \mathbb{N}$ heißen Quadratzahlen.

Potenzen a^3 mit $a \in \mathbb{N}$ heißen Kubikzahlen.

Wurzeln $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ heißen Quadratwurzeln.

Wurzeln $\sqrt[3]{a}$ heißen Kubik- oder 3. Wurzeln.

$a^1 = a$	$\sqrt[n]{1} = 1$
$a^0 = 1$	$\sqrt[n]{0} = 0$
$a^{-1} = \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$	$(\sqrt{b})^2 = b$ $(b > 0)$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$	$\sqrt[n]{b^n} = b$ $(b > 0)$

1. Gib alle rationalen Zahlen a an, für die gilt:

a) $a^2 = 121$ b) $a^3 = -125$ c) $a^4 = 81$ d) $a^3 = \frac{27}{64}$

e) $\sqrt{144} = a$ f) $\sqrt{\frac{81}{64}} = a$ g) $\sqrt{-9} = a$ h) $\sqrt{108} = a$

i) $\sqrt{3\,600} = a$ j) $\sqrt{-4^2} = a$ k) $a^5 = 1\,024$ l) $a^3 = 27\,000$

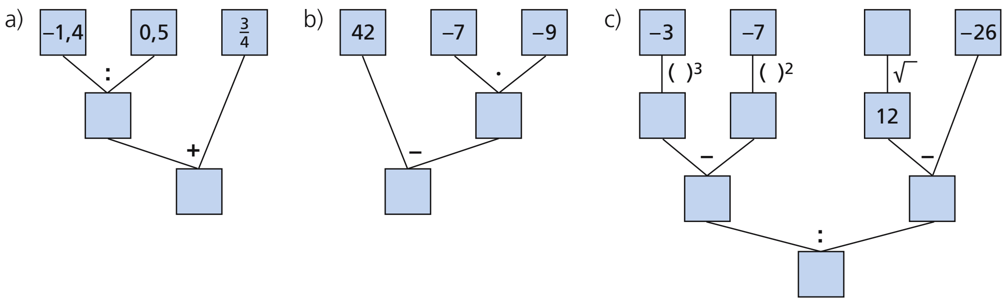
2. Gib die Ergebnisse mit zwei Stellen nach dem Komma an.

a) $\sqrt{12^2 + 6^2}$ b) $\sqrt{4 \cdot 7}$ c) $\sqrt{\frac{27{,}4}{8}}$ d) $\sqrt{2{,}8 \cdot 5{,}9}$

e) $\sqrt[3]{8^2}$ f) $\sqrt[3]{25^2 - 4^3}$ g) $\sqrt[4]{5^2 \cdot 3^3}$ h) $\sqrt[3]{\frac{1\,000}{125}}$

3.6 Gemischte Aufgaben – Sachaufgaben

1. Vervollständige die folgenden Rechenbäume. Schreibe den jeweils zu berechnenden Term auf. Achte dabei auf notwendige Klammern.



2. a) Gib die kleinste ganze Zahl an, die die Ungleichung $x + 3 \geq -8$ erfüllt.
b) Gib die größte ganze Zahl an, die die Ungleichung $x - 8 < -1$ erfüllt.

3. Bilde die Summe und das Produkt aller ganzen Zahlen zwischen –4 und 4.

4. Gib jeweils drei Zahlen an, die die Ungleichung erfüllen.

a) $7 + x < 7$ b) $x + (-8) > -8$ c) $\frac{x}{2} - 5 < 0$ d) $8 - 2x^2 > -4$

5. Gib jeweils alle ganzen Zahlen an, die die folgenden Ungleichungen erfüllen.

a) $-4{,}1 < x < 8{,}4$ b) $-2{,}6 > x > -11$ c) $-5{,}5 \leq x \leq -1{,}2$ d) $-5 \geq x \geq -6$

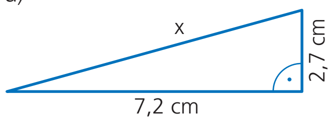
6. Ermittle die Werte der Terme für a = 6 und a = –6. Vereinfache vorher, wenn nötig.
a) $(7a + 1) \cdot (3a - 4)$ b) $(7a + 1) \cdot 3a - 4$ c) $7a + 1 \cdot (3a - 4)$ d) $7a + 1 \cdot 3a - 4$

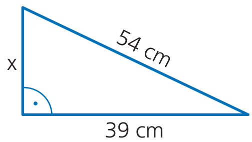
7. Berechne die Seitenlängen der folgenden Quadrate aus ihren Flächeninhalten.
a) $A = 2\,704\text{ mm}^2$ b) $A = 0{,}9604\text{ dm}^2$ c) $A = 22{,}09\text{ m}^2$ d) $A = 84{,}2\text{ cm}^2$

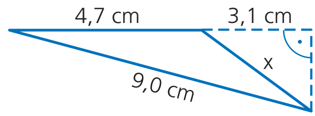
8. Berechne den Radius der Kreise aus ihren Flächeninhalten auf zwei Stellen nach dem Komma.
a) $A = 50\text{ m}^2$ b) $A = 738\text{ cm}^2$ c) $A = 0{,}76\text{ dm}^2$ d) $A = 4\,716\text{ mm}^2$

9. Berechne die Längen der Grundseiten der folgenden geraden quadratischen Pyramiden aus deren Volumen und Höhen auf eine Stelle nach dem Komma.
a) $V = 72\text{ cm}^3$; $h = 4{,}2$ cm b) $V = 381\text{ mm}^3$; $h = 16$ mm c) $V = 9{,}8\text{ m}^3$; $h = 80$ cm

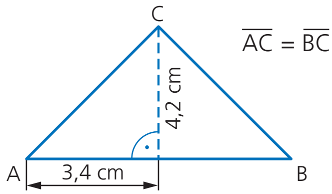
10. Berechne jeweils die fehlende Seitenlänge x für folgende Dreiecke.

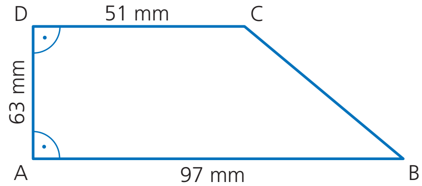
a)


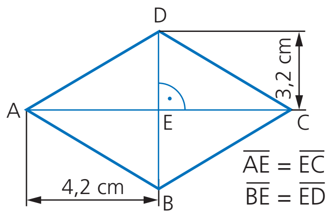
b)


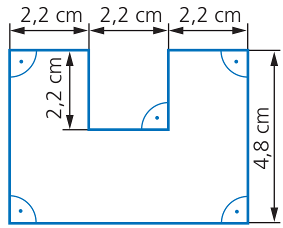
c)


11. Berechne jeweils den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figuren.

a)


b)


c)


d)


12. Nach der Eichordnung soll ein zylindrisches Fünflitermaß doppelt so hoch wie weit (Innendurchmesser) sein. Ermittle die Maße eines solchen Gefäßes.

13. Ein Radsportler fährt an einem windstillen Tag auf einer geradlinig verlaufenden Straße bis zu einem 60 km entfernt liegenden Ort und ohne Pause sofort wieder zurück. Er benötigt für die gesamte Strecke $3\frac{1}{2}$ Stunden. Am nächsten Tag verringert sich die Durchschnittsgeschwindigkeit des Sportlers auf der Hinfahrt durch Gegenwind um $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Sie wird aber auf der Rückfahrt um $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ größer. Welche Zeit benötigt der Sportler am zweiten Tag für die Gesamtstrecke?

14. Die Längenänderung fester Körper ist umso größer, je länger der Körper und je größer die Temperaturänderung ist. So ändert sich beispielsweise die Länge eines 1 m langen Kupferdrahtes bei einer Temperaturänderung um 1 Grad um $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ cm.
a) Eine Freileitung aus Kupfer hat bei einer Temperatur von 10 °C eine Länge von 12,84 km. Wie lang ist die gleiche Leitung bei einer Temperatur von 35 °C?
b) Wie wirkt sich ein Temperatursturz von 18 Grad auf die Leitung aus?
c) Mit welchen technischen Mitteln lassen sich solche Längenänderungen ausgleichen?

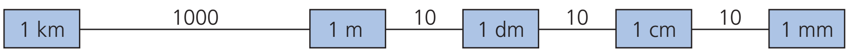
4 Rechnen mit Größen

4.1 Ausgewählte Größen und ihre Einheiten

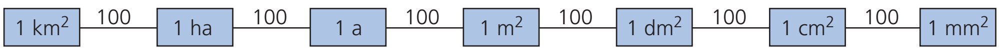
Größen werden durch Maßzahl (Zahlenwert) und Maßeinheit (Einheit) dargestellt.

Die Strecke hat eine *Länge* von *7,248 km.*
Die *Zeit* für eine Pause beträgt *15 min.*
Das *Volumen* der Flüssigkeit beträgt *1,5 Liter.*

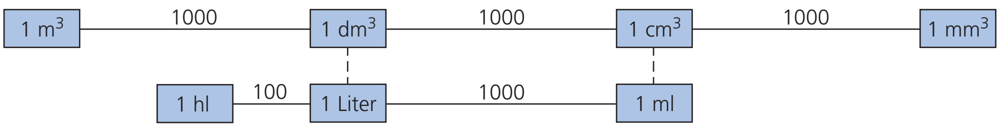
Längeneinheiten:



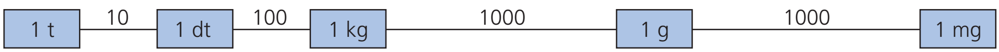
Flächeneinheiten:



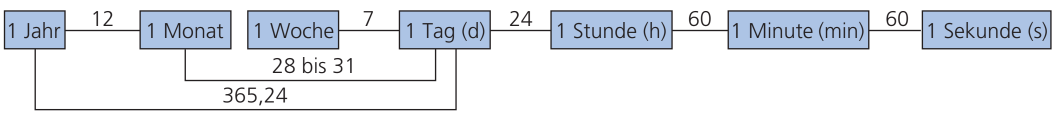
Volumeneinheiten:



Masseeinheiten:



Zeiteinheiten:



1. Gib in der kleineren Einheit an.

a) 6 km 720 m	b) 17 dm^2 5 cm^2	c) 5 min 24 s	d) 9 t 7 dt
e) 4 d 10 h	f) 3 dm^3 7 cm^3	g) 9 ha 38 a	h) 25 m 7 dm
i) 71 m^3 38 dm^3	j) 8 min 20 s	k) 34 g 50 mg	l) 18 km^2 56 ha

2. Wandle in die in Klammern stehenden Einheiten um.

a) 7,3 kg in (g)	b) 45 mm in (cm)	c) 9,6 hl in (Liter)	d) 45 min in (h)
e) 14,6 t in (dt)	f) 700 cm^3 in (dm^3)	g) 0,93 m in (mm)	h) 28 Liter in (dm^3)
i) $2\frac{1}{2}$ d in (h)	j) 1450 a in (ha)	k) 0,05 cm^2 in (mm^2)	l) 720 s in (min)

3. Schreibe mit Komma und nur mit der in Klammern angegebenen Einheit.

a) 8 m^3 170 dm^3 in (m^3)	b) 36 km 27 m in (km)	c) 19 ha 8 a in (ha)
d) 4 h 30 min in (h)	e) 2 Liter 165 ml in (Liter)	f) 15 cm 7 mm in (cm)
g) 5 m^2 720 cm^2 in (m^2)	h) 9 m 20 mm in (m)	i) 14 t 54 kg in (t)

4.2 Rechnen mit Näherungswerten

Addieren und Subtrahieren

Das Ergebnis sollte so viele Dezimalstellen haben, wie der Ausgangswert mit der geringsten Anzahl von Dezimalstellen aufweist.

1,234 m + 22,7 m + 12,63 m = 36,564 m

Da 22,7 eine Stelle nach dem Komma hat, darf das Ergebnis auch nur eine Stelle nach dem Komma haben. *Ergebnis:* 36,6 m

Multiplizieren und Dividieren

Der Näherungswert mit der geringsten Anzahl von Stellen gibt an, an welcher Stelle (von links gezählt) das Ergebnis gerundet werden sollte. Nullen links von der ersten von Null verschiedenen Ziffer werden nicht mitgezählt.

$122{,}50\ \text{m} \cdot 12{,}3\ \text{m} = 1\,506{,}75\ \text{m}^2$

Ergebnis: $1\,510\ \text{m}^2$, denn 12,3 hat drei Stellen.

$0{,}08\ \text{g} : 1{,}25\ \text{cm}^3 = 0{,}064\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Ergebnis: $0{,}06\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, denn 0,08 hat eine Stelle. Die Nullen werden nicht mitgezählt.

1. Berechne jeweils mit sinnvoller Genauigkeit. Alle Angaben sind Messwerte.

a) $1{,}04\ \text{cm} \cdot 0{,}48\ \text{cm}$ b) $10{,}0\ \text{m} \cdot 8{,}04\ \text{m}$ c) $4{,}21\ \text{dm} \cdot 0{,}421\ \text{dm}$
d) $0{,}012\ \text{mm} \cdot 1{,}20\ \text{mm}$ e) $4{,}283\ \text{m} \cdot 0{,}82\ \text{m} \cdot 0{,}03\ \text{m}$ f) $0{,}40\ \text{m} \cdot 14{,}0\ \text{m} \cdot 1{,}4\ \text{m}$

2. Berechne jeweils mit sinnvoller Genauigkeit. Alle Angaben sind Messwerte.

a) 4,8 m + 14,03 m + 0,4 m – 11,9 m b) 4,5 kg – 0,03 kg – 1,25 kg + 5,8 kg
c) 0,025 km + 84,2 m + 182,4 dm – 1,8 m d) $210\ \text{m}^2 - 1{,}4\ \text{a} + 3{,}5\ \text{dm}^2 - 5{,}0\ \text{m}^2$

3. Ermittle das Luftvolumen eines Zimmers, dessen Länge mit 8,6 m; dessen Breite mit 6,7 m und dessen Höhe mit 2,10 m gemessen wurde.

4. Die Diagonalen eines Rhombus (einer Raute) sind 4,8 cm und 6,05 cm lang. Berechne Umfang und Flächeninhalt des Rhombus.

4.3 Proportionale und umgekehrt proportionale Zusammenhänge

Zwei Größen x, y sind (direkt) proportional zueinander, wenn die Quotienten einander entsprechender Werte gleich sind.

$k = \frac{y}{x}$ (Proportionalitätsfaktor k konstant)

Zwei Größen x, y sind indirekt (umgekehrt) proportional zueinander, wenn die Produkte einander entsprechender Werte gleich sind.

$k = y \cdot x$ (k konstant)

Wie schwer ist ein 5,5 m langer Balken, wenn ein 2,0 m langer der gleichen Sorte 14,4 kg wiegt?

$\frac{x}{5{,}5\ \text{m}} = \frac{14{,}4\ \text{kg}}{2{,}0\ \text{m}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{14{,}4\ \text{kg} \cdot 5{,}5\ \text{m}}{2{,}0\ \text{m}} \approx 40\ \text{kg}$

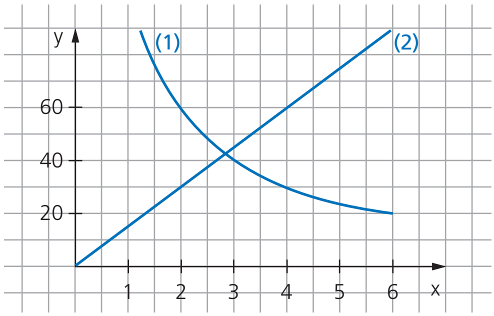
Ein Auto fährt 240 m mit $60\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in 4 s. (v = konstant)
Wie schnell müsste es fahren, um die gleiche Strecke in 3,5 s zu schaffen?

$60\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4\ \text{s} = x \cdot 3{,}5\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{60\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4\ \text{s}}{3{,}5\ \text{s}}$

$x = 68{,}5714\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 70\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

1. Wie viele Arbeiter müssen eingesetzt werden, wenn ein Auftrag, für den 6 Arbeiter 12 Tage benötigt werden, bereits in 9 Tagen erledigt sein soll und alle Arbeiter die gleiche Tagesleistung haben?

2. Gegeben sind die beiden Graphen (1) und (2).
a) Gib jeweils 4 Zahlenpaare (x | y) an.
b) Prüfe, ob die dargestellten Zusammenhänge direkt oder indirekt proportional sind.
c) Gib für x und y jeweils zwei mögliche physikalische Größen an.
d) Formuliere mit den in Aufgabe c) gewählten Größen je eine Textaufgabe.
e) Gib die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Graphen näherungsweise an.



3. Ein Schiff legt bei gleichbleibender Geschwindgkeit in 15 Minuten 2,5 km zurück.
a) In welcher Zeit können 11 km zurückgelegt werden?
b) Wie viel Kilometer können in 2,5 h zurückgelegt werden?

4. Wenn sich der Durchmesser einer Kugel ändert, so ändert sich auch deren Oberflächeninhalt und deren Volumen. Untersuche den Zusammenhang zwischen Durchmesser und Oberflächeninhalt bzw. zwischen Durchmesser und Volumen einer Kugel.

4.4 Gemischte Aufgaben – Sachaufgaben

1. Welcher Zusammenhang besteht zwischen x und y? Gib Zahlen für x_1, x_2, y_1 und y_2 an.

a)

x	1	3	5	7	x_1	x_2
y	2,4	7,2	12	y_1	26,4	y_2

b)

x	1	3	5	7	x_1	x_2
y	84	28	16,8	y_1	5,25	y_2

2. Für Ingos Zimmer wurden 8 Rollen Tapete gekauft, die insgesamt 40,96 € gekostet haben. Beim Renovieren wurde festgestellt, dass noch 3 Rollen fehlen. Wie viel Euro kosten die benötigten 11 Rollen insgesamt?

3. An einer Tankstelle kosten 23 Liter Benzin 33,35 €. Ermittle den Preis für 1 Liter Benzin.

4. Peter hat 16 Fische, von denen er 4 verschenkt. Bisher hat eine Dose Fischfutter immer für etwa 30 Tage gereicht. Wie lange kann Peter jetzt füttern?

5. Ein Rechteck ist 9,0 cm lang und 6,0 cm breit. Jede Seite wird um dieselbe Strecke x so verlängert, dass ein um 250 cm^2 größeres Rechteck entsteht.
a) Um wie viel Zentimeter wurde jede Rechteckseite verlängert?
b) Gib die Seitenlängen nach der Verlängerung an.

6. Der russische Mathematiker L. F. Magnizki (1669 bis 1738) stellte die folgende Aufgabe:
Ein Vater fragt den Lehrer seines Sohnes, wie viele Kinder er unterrichtet.
Der Lehrer antwortet: „Hätte ich noch einmal so viele Kinder, wie ich jetzt habe, und dann noch die Hälfte und dazu noch ein Viertel und dann noch deinen Sohn, so wären es genau 100."
Wie viele Schüler unterrichtet der Lehrer?

7. Von einem geraden Kreiszylinder sind der Inhalt der Grundfläche mit 78,5 cm^2 und der Inhalt der Mantelfläche mit 377,9 cm^2 bekannt. Ermittle aus diesen Angaben den Radius, den Durchmesser, die Höhe und das Volumen des Zylinders.

8. Tom und Ronny fahren mit ihren Rädern mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einem 4,0 km langen Rundkurs. Tom benötigt für eine Runde 10 min und Ronny 2 min weniger als Tom.
a) Berechne die Geschwindigkeiten von Tom und Ronny in Kilometer pro Stunde.
b) Wie groß ist der Rückstand von Tom zu Ronny nach 24 min?
c) Nach wie viel Minuten bzw. nach wie viel Kilometer erfolgt die erste Überrundung?

9. Ein 280 m langer Güterzug fährt mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von 56 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ durch einen 3,5 km langen Tunnel. Wie lange dauert die gesamte Durchfahrt von der Einfahrt der Lokomotive bis zum Verlassen des letzten Wagens?

10. Der Giebel eines Hauses hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks. Das Dreieck hat eine Seitenlänge von 10,40 m. Der Giebel soll einen Farbanstrich erhalten. Der Inhalt einer 12,50 € teuren Farbdose reicht für etwa 8 m^2 Fläche.
a) Berechne den Flächeninhalt des Giebels.
b) Wie viele Dosen müssen gekauft werden?
c) Prüfe, ob 70,00 € für den Kauf der Dosen ausreichen.

11. Das Schwimmbecken einen Hallenbades ist 50 m lang, 30 m breit und 2,20 m tief.
a) Wie viel Hektoliter Wasser müssen in das Becken eingelassen werden, damit es bis 80 cm unter dem Rand gefüllt ist?
b) Berechne die benötigte Zeit zum Füllen des Beckens bis 5 cm unter dem Rand, wenn 600 Liter pro Minute hineingepumpt werden.

12. Einem Kreis mit dem Radius r = 5,0 cm ist ein Rechteck mit den Eckpunkten A, B, C und D einbeschrieben. Eine Seitenlänge des Rechtecks ist so lang wie der Radius des Kreises.
a) Wie lang ist die zweite Rechteckseite?
b) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks.

13. Ein Würfel und eine Kugel haben den gleichen Rauminhalt von 8 cm^3.
a) Berechne die Oberflächeninhalte der beiden Körper und vergleiche diese?
b) Welcher Körper hat den größeren Oberflächeninhalt?

14. Beim Ausheben einer Baugrube wird der „Aushub“ über ein Förderband transportiert. Am Ende bildet sich ein kreisförmiger „Schüttkegel“, der eine Grundfläche mit einem Umfang von 36,5 m und eine Mantellinie von 6,5 m hat. Berechne die Höhe und das Volumen des Schüttkegels.

15. Aus einem zylinderförmigen Stahlrohling mit einer Länge von 60,0 cm und einem Durchmesser von 2,8 cm soll ein regelmäßiger Sechskant mit der gleichen Länge gefräst werden. Stahl hat eine Dichte von 7,8 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.
a) Wie viel Kilogramm Stahlspäne entstehen dabei als Abfall?
b) Gib den Anteil des Abfalls an der Masse des Rohlings in Prozent an.

16. Ermittle die Dichte eines Gegenstandes, dessen Masse mit 784,0 g und dessen Volumen mit 69,1 cm^3 gemessen wurden. Aus welchem Stoff könnte dieser Gegenstand sein?
Verwende zum Ermitteln des Stoffes ein Nachschlagewerk.

17. Ein Discounter gewährt seinen Kunden für gekaufte Waren einen Rabatt von 3,2 %.
Familie Müller, Familie König und Familie Nowitzki erhielten zusammen Gutschriften in Höhe von 199,68 €. Bei genauer Aufschlüsselung ist ersichtlich, dass Familie König doppelt so viel eingekauft hat wie Familie Müller, während Familie Nowitzki Waren im Wert von 1050 € erwarb.
a) Welchen Gesamtbetrag gaben alle Familien zusammen aus?
b) Wie viel Euro Rabatt bekam jede Familie gut geschrieben?

18. Ein Kirchturm hat die Form eines geraden Kreiskegels mit einem Durchmesser von 18,6 m und einer Höhe von 26,5 m. Der Turm soll mit Schieferplatten neu gedeckt werden, wobei für 1 m^2 Dachfläche 30 Platten benötigt werden. Jede Platte kostet 2,85 €.

a) Berechne die Größe der Dachfläche.

b) Wie viele Schieferplatten werden zum Decken des Turmes benötigt, wenn etwa 15 % Verlust eingerechnet werden müssen?

c) Ermittle die reinen Materialkosten für das Decken des Kirchturms.

19. In einem Angebot wird für 1 kg Rinderrouladen ein Preis von 5,99 € ausgewiesen. Die Waage zeigt 2 250 g an. Wie viel Euro müssten angezeigt werden?

20. Für 230 g Schnittkäse zahlt Frau Ümur 3,53 €. Berechne den Kilopreis für den Käse.

21. Ein geschlossener quaderförmiger Tank mit den Kantenlängen 80 cm, 55 cm und 35 cm ist mit 110 Liter Wasser gefüllt.

a) Wie hoch steht das Wasser im Tank, wenn er waagerecht auf seiner größten Seitenfläche steht?

b) Wie hoch steht das Wasser im Tank, wenn er waagerecht auf seiner kleinsten Seitenfläche steht?

c) Wie hoch steht das Wasser im Tank, wenn er waagerecht auf seiner „mittleren" Seitenfläche steht?

22. Zwei Bagger heben eine Baugrube von 25,0 m Länge, 16,0 m Breite und 3,0 m Tiefe aus. Einer der Bagger fällt durch Havarie für fünf Stunden aus. Seine Förderleistung ist um 3 $\frac{m^3}{h}$ größer als die Förderleistung des anderen Baggers, die 9 $\frac{m^3}{h}$ beträgt.
Wie lange dauert das Ausheben der Baugrube?

23. Aus Erdöl lassen sich anteilmäßig folgende Produkte herstellen:
31,5 % Dieselkraftstoff; 29,8 % Benzin; 18,2 % Heizöl; 4,2 % Bitumen; 4,0 % Schmieröle; 2,3 % gasförmige Kohlenwasserstoffe. Die restlichen 10 % sind Abfallstoffe.
Ein Land importierte von 2001 bis 2005 etwa 325 Mio. t Erdöl und von 2006 bis 2010 etwa 410 Mio. t.

a) Um wie viel Prozent stieg der Import von Erdöl im Zeitraum von 2006 bis 2010 im Vergleich zu 2001 bis 2005?

b) Wie viel Tonnen Erdöl werden benötigt, um 80 t Dieselkraftstoff herzustellen?

c) Wie viel Millionen Tonnen Benzin konnten von 2006 bis 2010 hergestellt werden, wenn der Bedarf nur aus den Importen gedeckt wurde?

d) Stelle die prozentualen Anteile in einem Kreisdiagramm dar.

***24.** Ein oben offener und zylinderförmiger Tank mit einer Höhe von 20,0 m und einem Innendurchmesser von 3,0 m wird mit Wasser gefüllt. Zwei Pumpen stehen dazu bereit. Pumpe (1) hat pro Minute eine Durchflussmenge von etwa 200 Liter und Pumpe (2) von etwa 100 Liter. Pumpe (1) füllt den Tank bis zur Hälfte allein, danach wird Pumpe (2) dazu geschaltet. 30 Minuten vor dem Überlaufen des Tanks werden beide Pumpen abgeschaltet.

a) Wie lange arbeitet Pumpe (1) allein?

b) Wie viel Kubikmeter Wasser hat Pumpe (1) bis zum Zuschalten der Pumpe (2) allein geschafft?

c) Wie lange arbeiten beide Pumpen gemeinsam?

d) Wie viel Liter Wasser wurden jeweils durch die Pumpen in den Tank befördert?

e) Ermittle die Anteile der durch beide Pumpen geförderten Wassermengen an der Füllmenge.

f) Wie viel Kubikmeter Wasser fehlen noch bis zum Überlaufen des Tanks?