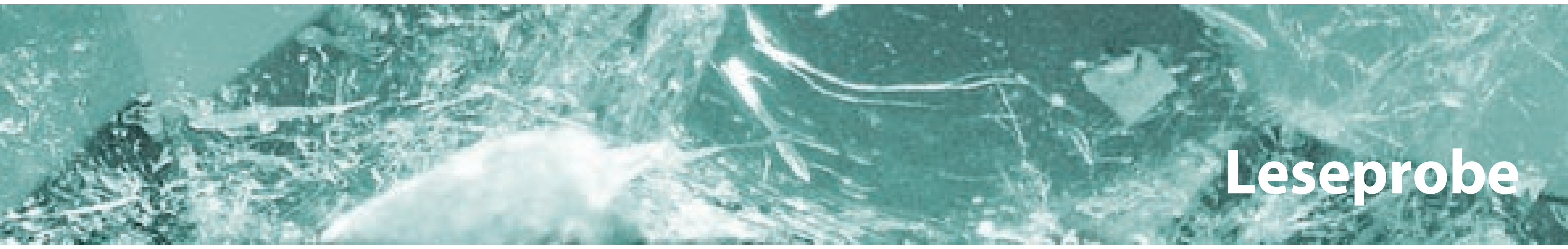

Hartl

Wirtschaftsmathematik

WIRTSCHAFTSMATHEMATIK

Studienbrief 2-030-0801

4. Auflage 2010

HDL
HOCHSCHULVERBUND DISTANCE LEARNING

Impressum

Verfasser: Prof. Dr. sc. Friedrich **Hartl**

Professor für Wirtschaftsmathematik/Statistik
im Fachbereich 3, Wirtschaftswissenschaften I
an der Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin

Der Studienbrief wurde auf der Grundlage des Curriculums für den Studienschwerpunkt „Wirtschaftsmathematik“ verfasst. Die Bestätigung des Curriculums erfolgte durch den

Fachausschuss für das modulare Fernstudienangebot Betriebswirtschaftslehre,

dem folgende Mitglieder angehören:

Prof. Dr. Arnold (FH Gießen-Friedberg), Prof. Dr. Götze (FH Stralsund), Prof. Dr. Heger (HTW Berlin), Prof. Dr. Hofmeister (FH Erfurt), Prof. Dr. Nullmeier (em.; HTW Berlin), Prof. Dr. Pumpe (Beuth Hochschule für Technik Berlin), Rosemann M. A. (Ostfalia Hochschule), Prof. Dipl.-Ök. Schindler (HS Merseburg), Prof. Dr. C.-D. Witt (em.; HS Wismar), Prof. Dr. Schwill (FH Brandenburg), Prof. Dr. M. Strunz (HS Lausitz), Prof. Dr. H. Strunz (Westsächsische HS Zwickau), Prof. Dr. Tippe (TH Wildau (FH)).

4. durchgesehene Auflage 2010 ISBN 978-3-86946-038-3

Redaktionsschluss: Juli 2010 Studienbrief 2-030-0801

Service-Agentur des HDL
(Hochschulverbund Distance Learning)

Leiter: Dr. Reinhard Wulfert

c/o Agentur für wissenschaftliche Weiterbildung und Wissenstransfer e. V.
Magdeburger Straße 50, 14770 Brandenburg

Tel.: 0 33 81 - 35 57 40 E-Mail: kontakt-hdl@aww-brandenburg.de
Fax: 0 33 81 - 35 57 49 Internet: http://www.aww-brandenburg.de

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen 4

Einleitung 5

Literaturempfehlung 5

1 Quantitative Analyse von ökonomischen Funktionen 6

1.1 Ökonomische Funktionen 6

1.2 Differentialrechnung 7

1.2.1 Ableitungsfunktionen und Ableitungsregeln von Funktionen mit einer Variablen 9

1.2.2 Ableitungen höherer Ordnung 11

1.3 Analyse ökonomischer Funktionen unter Anwendung der Differentialrechnung 12

1.3.1 Untersuchung des lokalen Veränderungsverhaltens von ökonomischen Funktionen 14

1.3.1.1 Differentiale einer Funktion 15

1.3.1.2 Punktelastizität 18

1.3.2 Untersuchung des globalen Veränderungsverhaltens von Funktionen 22

1.3.2.1 Steigungsverhalten von f(x) im Intervall 22

1.3.2.2 Krümmungsverhalten von f(x) im Intervall 24

1.3.3 Bestimmung lokaler und globaler Extrema von differenzierbaren Funktionen einer Variablen 27

1.3.3.1 Bestimmungen des Betriebsoptimums, des Betriebsminimums und des Betriebsmaximums 28

1.3.4 Bestimmung der Stelle des Krümmungswechsels einer differenzierbaren Funktion 32

2 Lineare Wirtschaftsalgebra 34

2.1 Matrizenrechnung 34

2.1.1 Grundbegriffe, Definitionen 34

2.1.2 Spezielle Matrizen 35

2.1.3 Matrizenkalkül 37

2.1.3.1 Matrizenrelationen 37

2.1.3.2 Matrizenoperationen 38

2.1.3.3 Determinante einer quadratischen Matrix 43

2.2 Lineare Gleichungssysteme (LGS) 47

2.2.1 Grundbegriffe, Definitionen 47

2.2.2 Cramer-Regel zur Lösung eines eindeutig lösbaren LGS 48

2.2.3 Gaußscher Algorithmus mit vollständiger Elimination zur Lösung eines LGS 50

2.2.3.1 LGS mit eindeutiger Lösung 51

2.2.3.2 LGS mit unendlich vielen Lösungen 54

2.2.3.3 LGS hat keine Lösungen 55

2.2.3.4 LGS und inverse Matrix 56

2.3 Lineare Ungleichungssysteme (LUGS) 58

2.3.1 Grundbegriffe, Definitionen 58
2.3.2 Lösung eines normalen LUGS 58
2.3.2.1 Graphische Lösungen eines LUGS 59
2.3.2.2 Analytische Lösung eines LUGS 60
2.4 Ökonomische Anwendungsfälle 64
2.4.1 Teilebedarfsrechnung 64
2.4.2 Input-Output-Analyse 65

3 Extremwertbestimmung von Funktionen mit mehreren Variablen 69
3.1 Bestimmung lokaler Extrema von differenzierbaren Funktionen mit mehreren Variablen 69
3.1.1 Ableitungen von Funktionen $f(x_1, \ldots, x_n)$ mit n unabhängigen Variablen 70
3.1.2 Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Extrema 71
3.2 Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen 73
3.2.1 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungsgleichungen 73
3.2.2 Lineare Optimierungsaufgaben 76

Lösungen zu den Übungsaufgaben 84

Literaturverzeichnis 88

Sachwortverzeichnis 89

Abkürzungen

BV	Basisvariable
E	Erlös
G	Gewinn
HE	Hauptelement
GE	Geldeinheit
I-O-Modell	Input-Output-Modell
K	Kosten
LGS	Lineares Gleichungssystem
lim	Grenzwert (lat.: limes – Grenze)
LOP	Lineares Optimierungsproblem
LUGS	Lineares Ungleichungssystem
ME	Mengeneinheit
NBV	Nichtbasisvariable
NNB	Nichtnegativitätsbedingung
PE	Pivotelement
PS	Pivotspalte
PZ	Pivotziele

Einleitung

Was ist Wirtschaftsmathematik?

Es ist heute unbestritten, dass ein Großteil der komplexen Probleme der wirtschaftlichen Praxis ohne das Instrumentarium der Wirtschaftsmathematik nicht mehr zu lösen ist.

Die Wirtschaftsmathematik dient den Wirtschaftswissenschaften als Hilfsmittel zum Verständnis, zur Erklärung und zur Analyse von ökonomischen Zusammenhängen sowie bei der Entscheidungsfindung in Unternehmenssituationen.

Die Wirtschaftsmathematik umfasst wegen der Komplexität und Kompliziertheit der Wirtschaftsprozesse zahlreiche Gebiete der klassischen Mathematik. Aufgrund der vielen Anwendungsmöglichkeiten in den Wirtschaftswissenschaften spielen dabei die vier mathematischen Disziplinen „Differentialrechnung", „lineare Algebra", „Optimierungsrechnung" sowie „Finanzmathematik" eine besondere Rolle.

Der vorliegende Studienbrief „Wirtschaftsmathematik" und der Studienbrief „Finanzmathematik" (HARTL, 2008) beschreiben die notwendigen mathematischen Grundlagen dieser Disziplinen und ihre wichtigsten Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften.

Literaturempfehlung

– EICHHOLZ, W./VILKNER, E. (2009): „Taschenbuch der Wirtschaftsmathematik".

  Das Taschenbuch ist ein komplettes Nachschlagewerk für die Wirtschaftsmathematik und sehr gut geeignet als schnell verfügbarer Informationspool.

– TIETZE, J. (2009): „Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik".

  Die Darlegung und Anwendung der mathematischen Instrumentarien ist sehr anschaulich und verständlich. Das Buch zeichnet sich durch einen umfangreichen Übungsteil aus.

– STRASSER, H. (1997): „Mathematik für Wirtschaft und Management".

  Die ausführliche verbale Darstellung der wesentlichen Gebiete der Wirtschaftsmathematik ist sehr gut für das Verständnis mathematischer Denkweisen geeignet.

Ableitungen höherer Ordnung werden durch das Ableiten der Ableitungsfunktion berechnet (siehe Tabelle 1.4):

Funktion	$f(x)$
1. Ableitung	$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$
2. Ableitung	$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$
3. Ableitung	$f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$

Tabelle 1.4 Die ersten drei Ableitungen der Funktion f(x)

In der Regel verwendet man bei einer quantitativen Analyse einer ökonomischen Funktion (Kurvendiskussion) die Aussagen von Ableitungswerten höchstens dritter Ordnung an der Stelle x_0.

In der folgenden Tabelle (Tab. 1.5) wird die Deutung der Ableitungen bis zur 3. Ordnung noch einmal zusammengefasst:

Ableitungswert	**Gibt an der Stelle x_0 an:**
$f'(x_0)$	die **Funktionssteigung** (wachsend, konstant oder fallend) der Funktion
$f''(x_0)$	**Änderung** der **Funktionssteigung** (rechts oder links gekrümmt)
$f'''(x_0)$	**Änderung** der **Funktionskrümmung** (von rechts nach links gekrümmt oder umgekehrt)

Tabelle 1.5 Deutung der ersten drei Ableitungen einer Funktion f(x) an der Stelle x_0

1.3 Analyse ökonomischer Funktionen unter Anwendung der Differentialrechnung

In diesem Abschnitt wollen wir das Veränderungsverhalten von ökonomischen Funktionen f(x) sowohl in der unmittelbaren beidseitigen Umgebung einer beliebigen Stelle x_0 (also lokal) als auch in einem Intervall $a \leq x \leq b$ (also global) untersuchen.

Den Betriebswirt interessieren insbesondere folgende Fragen in diesem Zusammenhang:

- Mit welcher Stärke verändert sich das Ergebnis einer ökonomischen Funktion f(x) absolut oder relativ (prozentual) bei absoluter oder relativer Veränderung von x_0?
- An welchen Stellen x_0 nimmt f(x) ihr relatives Maximum oder Minimum an, wo liegen die absoluten Maxima und Minima im Intervall?
- In welchen Intervallen wächst oder fällt eine Funktion?

▶ In welchen Intervallen ist die Funktionswertveränderung beschleunigt oder gebremst?

Wenn uns der Graph der Funktion f(x) vorliegt (siehe Bild 1.3) ist es relativ einfach, die obigen Fragen zu beantworten.

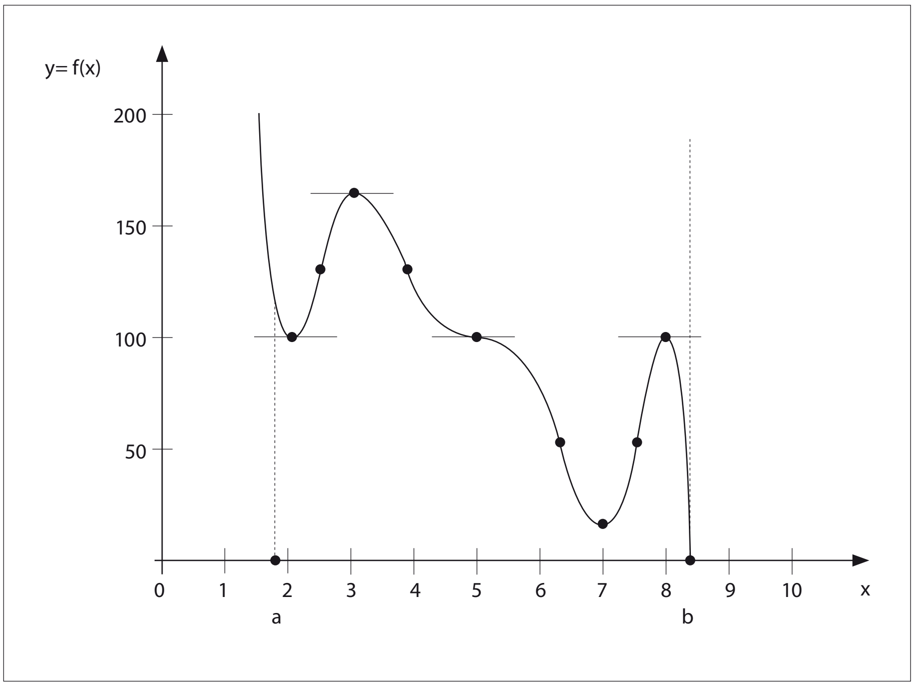

Bild 1.3 Graph einer Funktion f(x)

Es seien a = 1,8 und b = 8,4. So erkennen wir, wenn wir die Kurvenpunkte in Richtung wachsender x-Werte im Intervall $1{,}8 \le x \le 8{,}4$ verfolgen, zunächst ein unterschiedliches Steigungsverhalten:

Im Intervall $2 < x < 3$ wächst die Funktion zunächst monoton beschleunigt, dann nach dem zweiten Kurvenpunkt gebremst, in $3 < x < 7$ monoton fallend mit unterschiedlicher Geschwindigkeit, in $7 < x < 8$ wieder monoton steigend aber mit unterschiedlicher Kurvenkrümmung und schließlich in $8 < x < 9$ streng monoton beschleunigt fallend.

Punktuell können wir an den vier Stellen x = 2, x = 3, x = 7 und x = 8 an der nicht vorhandenen Kurventangentensteigung vier stationäre Punkte erkennen, die als lokale Extrema entweder Tief- oder Hochpunkte sind.

Zwischen diesen lokalen Extremwertstellen muss ein Krümmungswechsel stattfinden, dies erfolgt an den Wendestellen x = 2,5 und x = 7,5.

Dass eine stationäre Stelle nicht notwendigerweise auch eine Extremalstelle sein muss, erkennen wir bei x = 5. Diese Wendestelle ist eine sogenannte Sattelpunktstelle.

Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass sich die lokalen Maxima (Minima) im Bereich $1{,}8 \le x \le 8{,}4$ in ihrer Höhe unterscheiden. Durch Vergleich der lokalen Extrema mit sich und den Randbereichspunkten erkennen wir, dass bei x = 3 das globale Maximum und am rechten Rand, also bei x = 8,4 das absolute Minimum der Funktion f(x) mit dem Wert f(8,4) = 0 liegt. Diese Aussage bezieht sich nur auf das hier betrachtete Intervall.

Wie wir ohne Graph und nur mit Hilfe des mathematischen Instrumentariums eine Kurvendiskussion durchführen können, soll in den nächsten Abschnitten gezeigt werden.

1.3.1 Untersuchung des lokalen Veränderungsverhaltens von ökonomischen Funktionen

Die Wirtschaftsmathematik stellt verschiedene Maßzahlen (vgl. Tabelle 1.6) für die Stärke der **Veränderung des Funktionswertes f (x_0) bei lokaler Änderung der Einflussgröße** (unabhängige Variable) **von x_0 auf x_0 + Δx** bereit.

Maßzahl		Bemerkung
Differenz	$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	**absolute** Veränderung der Funktion
relative Differenz	$\frac{\Delta x}{x_0}$	relative oder prozentuale Veränderung der Einflussgröße in Bezug auf x_0
relative Differenz	$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)} = \frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)}$	relative oder prozentuale Veränderung der Funktion in Bezug auf f (x_0)
Differenzenquotient	$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$	**durchschnittliche** Veränderung der Funktion,
Bogenelastizität	$\frac{\frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{\Delta x}{x_0}}$	Verhältnis der relativen Veränderung der abhängigen und der unabhängigen Veränderlichen (Einflussgröße)
1. Ableitung	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0)$	gibt die Änderung des Funktionswertes in der unmittelbaren beidseitigen Umgebung von x_0 an
Differential	$df = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot dx$	gibt die Änderung der Ordinate der Kurventangente im Punkt P_0 zwischen x_0 und $x_0 + \Delta x$
relative Änderungsrate	$\rho_f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$	gibt die Änderung des Funktionswertes in Bezug zum Funktionswert in der unmittelbaren beidseitigen Umgebung von x_0 an.
Punktelastizität	$\varepsilon_{f,x} = \frac{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}{x_0}$	Grenzwert der Bogen-Elastizität ($\Delta x \to 0$), gilt nur für einen bestimmten Punkt der Funktion

Tabelle 1.6 Maßzahlen der Veränderung

Näher wollen wir nun auf die Maßzahlen eingehen, welche die Ableitung von f an der Stelle x_0 verwenden. Hierzu gehören die zwei grundlegenden Maße der sogenannten Marginalanalyse, das Differential df und die Punktelastizität $\varepsilon_{f,x}$.

1.3.1.1 Differentiale einer Funktion

Definition

Es sei f eine differenzierbare Funktion an der Stelle x_0. Unter dem **Differential df** der Funktion an der Stelle x_0 zum Zuwachs dx versteht man eine lineare Funktion, die das Steigungsverhalten der Funktion f an der Stelle x_0 repräsentiert:

$$df = f'(x_0) \cdot dx$$

Das Differential df ist immer dann von Nutzen, wenn bei hinreichend kleiner Schrittweite dx von x_0 die **absolute** Änderung Δf der Funktion f bestimmt werden soll. Es gilt die Abschätzungsformel für Δf:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df\,(x) = f'(x_0)\,dx$$

Merksatz

Das Differential $df = f'(x_0)\,dx$ gibt an, um wie viel Einheiten sich f (x) näherungsweise absolut verändert, wenn die unabhängige Variable x, ausgehend von x_0 um dx Einheiten verändert wird.

Beispiel

B 1.3 geg.: Die Gesamtkostenfunktion K(x) einer Ein-Produkt-Unternehmung ist $K(x) = 0{,}08\,x^3 - 3\,x^2 + 40\,x + 100$, wobei x die Produktionsmenge [ME] mit dem konkreten Wert $x_0 = 20$ ist.

ges.:
a) Kostenänderung mittels Differential dK, wenn x_0 um 2 ME erhöht wird,

b) Kostenänderung mittels Differential dK, wenn x_0 um 1 ME vermindert wird,

c) beide Kostenänderungen über ΔK!

Lösung.: Mittels Differential: $d\,K(x) = K'(x_0)\,dx$,

a) Da $K'(x) = 0{,}24\,x^2 - 6\,x + 40$ und $K'(20)=16$ sowie $dx = 2$ folgt $dK = 16 \cdot 2 = 32$, d. h., die Kosten nehmen bei einer Steigung von 20 auf 22 ME um ca. 32 GE zu.

b) Da $dx = -1$ folgt $dK = 16\cdot(-1)=-16$. Das heißt, die Produktionskosten sinken um 16 GE, wenn die Produktion von 20 auf 19 abgesenkt wird.

c) $\Delta K = f(20 + 2) - f(20) = 379{,}84 - 340 = 39{,}84$ und

$\Delta K = f(20 - 31) - f(20) = 325{,}72 - 340 = -14{,}28$.

Die Funktionswertveränderung einer Funktion $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ mit n Variablen, bei der nur die Variable x_i um dx_i Einheiten geändert wird und alle übrigen Variablen konstant bleiben sollen, kann näherungsweise durch den Wert des i-ten partiellen Differentials von f bestimmt werden.

Definition

Unter dem **i-ten partiellen Differential** einer Funktion f $(x_1, \ldots, x_n)$ versteht man den Ausdruck

$$df_{x_i} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \cdot dx_i \quad .$$

Den speziellen, partiellen Ableitungswert $\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{i_0}}$ erhalten wir, wenn f $(x_1, \ldots, x_n)$ nach der Variablen x_i unter Konstanthaltung der übrigen Variablen x_j $(j \neq i)$ ableitet wird und dann die betrachtete Stelle x_{i_0} eingesetzt wird.

Für die Bestimmung des partiellen Ableitungswertes an der Stelle x_{i_0} gelten die gleichen Differentiationsregeln wie für das Ableiten einer Funktion mit nur einer Variablen. Diese werden nur auf die Variable x_i angewandt, wobei alle übrigen Variablen wie Konstante oder konstante Faktoren behandelt werden.

Merksatz

Man beachte, dass zur Kennzeichnung eines partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i}$ im Gegensatz zum „üblichen" Differentialquotienten anstatt des Buchstabens d, das Zeichen ∂ gewählt wird. Häufig wird der partielle Differentialquotient auch einfach durch f'_{x_i} oder nur durch f_{x_i} symbolisiert.

Sind wir an der Funktionswertveränderung der Funktion f $(x_1, \ldots, x_n)$ mit n Variablen bei gleichzeitigen geringfügigen Veränderungen der unabhängigen Variablen um $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ interessiert, so erweist sich das sogenannte totale Differential als zweckmäßig.

Definition

Unter dem **totalen Differential** einer Funktion f $(x_1, \ldots, x_n)$ versteht man den Ausdruck

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n \quad .$$

Beispiel

B 1.4 geg.: Eine Produktionsfunktion, die dem Output f die beiden Inputfaktoren x_1 und x_2 über die folgende Funktionsgleichung zuordnet:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1\sqrt{x_2} + (x_1 + x_2)^2 + 6\frac{x_1}{x_2} \quad .$$

Geben Sie

a) zunächst die beiden partiellen Ableitungsfunktionen $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$ sowie deren Werte an der Stelle $x_1 = 20$ und $x_2 = 30$ an!

b) den exakten absoluten Zuwachs Δf von f an, wenn x_1 von 20 auf 21 erhöht wird und x_2 unverändert bleibt!

c) den absoluten Zuwachs Δf von f über das Differential df_{x_1} an, wenn x_1 von 20 auf 21 erhöht wird und x_2 unverändert bleibt!

d) den exakten absoluten Zuwachs Δf von f an, wenn x_1 ausgehend von 20 um 1 % erhöht wird und x_2 unverändert bleibt!

e) den exakten absoluten Zuwachs Δf von f an, wenn x_2 von 30 auf 28 gesenkt wird und x_1 unverändert bleibt!

f) den absoluten Zuwachs von f über das Differential df_{x_2} an, wenn x_2 von 30 auf 28 gesenkt wird und x_1 unverändert bleibt!

g) den exakten absoluten Zuwachs Δf von f an, wenn x von 20 auf 21 erhöht und gleichzeitig x_2 von 30 auf 28 gesenkt wird!

h) näherungsweise den absoluten Zuwachs Δf von f über das totale Differential an!

Lösungen:

a) $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}$: $f(x_1,x_2)=4x_1\sqrt{x_2}+(x_1+x_2)^2+6\frac{x_1}{x_2}$ muss nach x_1 abgeleitet werden, wobei x_2 als Konstante oder konstanter Faktor aufgefasst wird, also

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}=4\cdot\sqrt{x_2}+2(x_1+x_2)+\frac{6}{x_2},\quad \frac{\partial f(20,30)}{\partial x_1}=122{,}109\ .$$

$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}$: $f(x_1,x_2)=4x_1\sqrt{x_2}+(x_1+x_2)^2+6\frac{x_1}{x_2}$ muss nach x_2 abgeleitet werden, wobei x_2 als Konstante oder konstanter Faktor aufgefasst wird, also

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}=2\cdot\frac{x_1}{\sqrt{x_2}}+2(x_1+x_2)-6\frac{x_1}{x_2^{\,2}},\quad \frac{\partial f(20,30)}{\partial x_2}=107{,}17$$

b) $\Delta f = f(21, 30) - f(30, 30)$, $\Delta f = 123{,}109$

c) $\Delta f\approx\frac{\partial f(20,30)}{\partial x_1}\cdot 1=122{,}109$

d) $\Delta f = f(20{,}2, 30) - f(20, 30)$, $\Delta f = 24{,}462$

e) $\Delta f = f(20, 29) - f(20, 30)$, $\Delta f = -210{,}572$

f) $\Delta f\approx\frac{\partial f(20,30)}{\partial x_2}\cdot(-2)=107{,}17\cdot(-2)=214{,}339$

g) $\Delta f = f(21, 28) - f(20, 30)$, $\Delta f = -92{,}192$

$$df(x_1,x_2)=\frac{\partial f(20,30)}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial f(20,30)}{\partial x_2}\cdot dx_2,\ dx_1=1,\ dx_2=-2$$

$df(20,30)=-92{,}23,\ \Delta f\approx -92{,}23.$

In den Wirtschaftswissenschaften wird häufig mit sogenannten **Grenzfunktionen** $\Delta f = f(x+1) - f(x)$ gearbeitet, mit deren Hilfe die Funktionswertveränderung pro zusätzlicher Einheit der unabhängigen Variablen x ermittelt werden kann.

Eine Grenzfunktion kann für jede ökonomische Funktion gebildet werden. Typische Grenzfunktionen mit einer Variablen sind in der Tabelle 1.7 aufgeführt.

ökonomische Funktion	zugehörige Grenzfunktion
Produktionsfunktion	**Grenzproduktivität**, gibt die zusätzliche Produktionsmenge an, die bei gegebener Inputmenge jede weitere Inputeinheit erbringt.
Kostenfunktion	**Grenzkostenfunktion**, gibt die zusätzlichen Kosten an, die durch jedes zusätzlich produzierte Produkt verursacht werden.
Erlösfunktion	**Grenzerlösfunktion**, gibt den zusätzlichen Erlös an, den bei gegebener Produktionsmenge jede weitere produzierte Einheit erbringt.
Gewinnfunktion	**Grenzgewinn**, gibt den zusätzlichen Gewinn an, den bei gegebener Produktionsmenge jede weitere produzierte Einheit erbringt.

Tabelle 1.7 Grenzfunktionen von ökonomischen Funktionen

Aus der Abschätzungsformel für Δf erkennen wir, dass die Veränderung $\Delta f = f(x_0 + 1) - f(x_0)$ näherungsweise gleich dem Wert $f'(x_0)$ der Funktion f ist, da $\Delta x = dx = 1$. Wir merken uns also:

Merksatz

Die Grenzfunktion einer ökonomischen Funktion kann näherungsweise durch ihre Ableitungsfunktion $f'(x)$ beschrieben werden.

Häufig werden Grenzfunktion und Ableitungsfunktion gleichgesetzt.

Übungsaufgaben

Ü 1.2 Gegeben ist die Produktionsfunktion $z = 5\,x\,y^{1/2} + 2(x + y) + 3\,x/y$

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung!

b) Wie verändert sich näherungsweise der Wert der Funktion, wenn ausgehend von P_0 (50, 100) der x_0-Wert um eine Einheit erhöht wird?

c) Wie verändert sich näherungsweise der Wert der Funktion, wenn ausgehend von P_0 (50, 100) der y_0-Wert um zwei Einheiten gesenkt wird?

1.3.1.2 Punktelastizität

Die am häufigsten in den wirtschaftlichen Anwendungen genutzte Maßzahl zur Beschreibung der Veränderung einer ökonomischen Funktion an der Stelle x_0 bei Veränderung ihrer unabhängigen Variablen ist der (Punkt-)Elastizitätskoeffizient ε_{f,x_0}.

Definition

Das Verhältnis der relativen Änderung von f und x heißt **Punktelastizität der Funktion** von f (x) an der Stelle x_0

$$\varepsilon_{f,x} = \frac{\text{relative Funktionswertveränderung}}{\text{relative Veränderung von x}} = \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dx}{x}}$$

Gleichwertig ist auch die folgende Definition:

Das Verhältnis des Grenzfunktionswertes zu dem Durchschnittsfunktionswert einer Funktion f(x) an der Stelle x_0 bezeichnet man als **Punktelastizität der Funktion** f (x) bezüglich x_0.

$$\varepsilon_{f,x_0} = \frac{\text{Grenzfunktionswert an der Stelle } x_0}{\text{Durchschnittsfunktionswert an der Stelle } x_0} = \frac{f'(x_0)}{\frac{f(x_0)}{x_0}}$$

bzw. rechentechnisch günstiger: $\varepsilon_{f,x_0} = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0$

Die Punktelastizität ist eine dimensionslose Zahl. Das ist ihr Vorteil beim Vergleich ihrer Werte gegenüber dem Differential als Änderungsmaß mit Maßeinheit.

Die Punktelastizität der Funktion f (x) bezüglich x_0 wird immer dann berechnet, wenn die **Frage** beantwortet werden soll:

Um wie viel Prozent verändert sich f (x), wenn die Einflussgröße x, ausgehend von x_0, um 1 % verändert wird.

Da in ε_{f,x_0} mit $f'(x_0)$ auch ein Ableitungswert enthalten ist, muss beachtet werden, dass der Zahlenwert der Elastizität **nur näherungsweise** die prozentuale Veränderung von f bei 1 %iger Veränderung von x angibt.

Je nach Zahlenwert der Elastizität wird eine ökonomische Funktion f (x) wie folgt eingestuft:

Fall	Elastizitätswert	Deutung
1)	$\varepsilon_{f,x} = 0$	f (x) ist bezüglich x **vollkommen unelastisch**, d. h., bei Veränderung von x um 1 % reagiert f (x) überhaupt nicht.
2)	$-1 < \varepsilon < 0$ $0 < \varepsilon < 1$	f (x) ist bezüglich x **unelastisch**, d. h., die relative Veränderung in f (x) ist kleiner als die verursachende 1 %ige Veränderung von x.
3)	$\varepsilon = -1$ bzw. $\varepsilon = 1$	**Grenze** zwischen elastischem und unelastischem Bereich: Eine 1 %ige Veränderung von x bewirkt eine 1 %ige Veränderung von f (x).
4)	$-\infty < \varepsilon < -1$ $1 < \varepsilon < \infty$	f (x) ist bezüglich x **elastisch**. Die relative Veränderung in y ist größer als die verursachende 1 %ige Veränderung in x.
5)	$\varepsilon = -\infty$ bzw. $\varepsilon = \infty$	f (x) ist bezüglich x **vollkommen elastisch**. Bei Veränderung von x um 1 % verändert sich f (x) über alle Grenzen.

Tabelle 1.7 Einstufung der Elastizität

Bemerkung:

Ist das **Vorzeichen** der Elastizität **positiv**, dann bewirkt eine relative Zunahme (Abnahme) von x auch eine relative Zunahme (Abnahme) von f.

Ist das **Vorzeichen** der Elastizität **negativ**, bewirkt eine relative Zunahme (Abnahme) von x eine relative Abnahme (Zunahme) von f.

Definition

Für Funktionen $f(x_1, ..., x_n)$ mit n Variablen kann zur Verdeutlichung der spezifischen Einflussstärke der Variablen x_i auf die Funktion f ihre **partielle Elastizität ε_{f,x_i}** bestimmt werden:

$$\varepsilon_{f,x_{i_0}} = \frac{\text{partielle marginale Veränderung von } f}{\text{durchschnittliche Veränderung von } f} = \frac{\dfrac{\partial f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_{i_0}}}{\dfrac{f(x_1,x_2,...,x_n)}{x_{i_0}}} .$$

Beispiel

B 1.5 Aufgabe:

a) Berechnen Sie den Elastizitätswert $\varepsilon_{f,x}$ von $f(x) = 3x^3 - 2x^4 + 5$ bzgl. x an der Stelle $x_0 = 5$!

b) Berechnen Sie den Elastizitätswert $\varepsilon_{f,x}$ von $f(x) = 3x^{-3} - 2x^{-4} + 5$ bzgl. x an der Stelle $x_0 = 5$!

Lösung:

a) $\varepsilon_{f,x_0} = \dfrac{f'(5)}{f(5)} \cdot 5 = 4{,}454$, erhöhen (vermindern) wir $x_0 = 5$ um 1 %, so steigt (fällt) der Funktionswert f(5) (näherungsweise) um 4,454 %.

b) $\varepsilon_{f,x_0} = \dfrac{f'(5)}{f(5)} \cdot 5 = -0{,}012$, erhöhen (vermindern) wir $x_0 = 5$ um 1 %, so fällt (steigt) der Funktionswert f(5) (näherungsweise) um 0,012 %.

B 1.6 ges.: Elastizitätsfunktion der linearen Preis-Nachfrage-Funktion:

$$x(p) = 8 - \frac{1}{2} \cdot p \quad !$$

Lösung: $$\varepsilon_{x,p} = \frac{-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{x(p)}{p}} = \frac{p}{p-16}$$

Elastizitätsbereiche der Preis-Nachfrage-Funktion

Die Funktion x(p) ist bei einem Preis von p = 5 (siehe Bild 1.4 den Punkt P_1) unelastisch. Ihr Elastizitätswert beträgt $\varepsilon_{x,5} = -0{,}455$.

Im Punkt P_2 mit dem Preis p = 8 bewirkt eine 1 %ige Preisveränderung eine 1 %ige Nachfrageveränderung, da $\varepsilon_{x,p} = -1$.

Schließlich zeichnet sich der Punkt P_3 mit p = 10 durch eine Elastizität von $\varepsilon_{x,p} = -1{,}667$ aus.

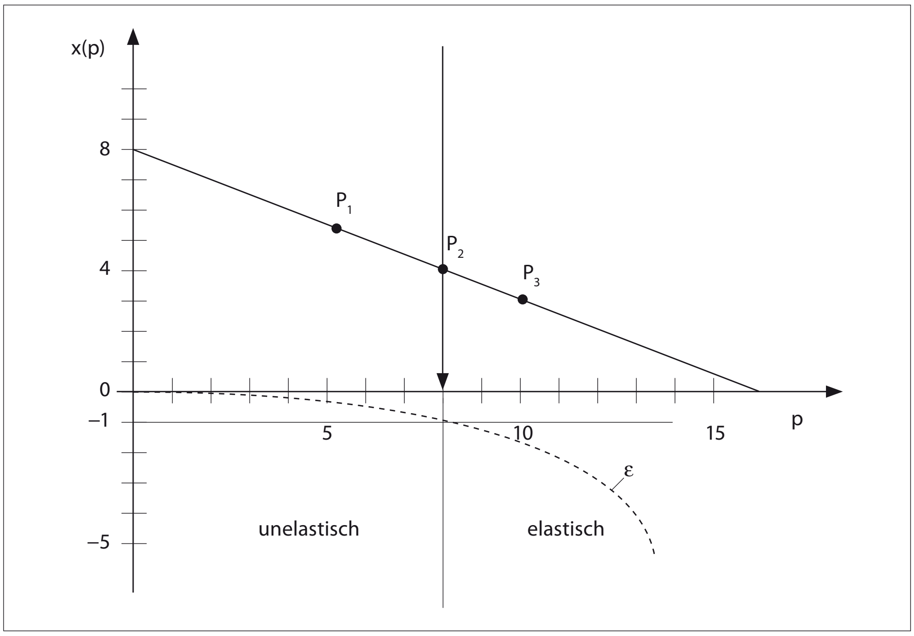

Bild 1.4 Elastizitätsbereiche der Preis-Nachfrage-Funktion

B 1.7 Aufgabe:

Beispiel

Berechnen Sie den partiellen Elastizitätswert $\varepsilon_{f,x_{20}}$ von

$$f(x_1,x_2) = 4x_1\sqrt{x_2} + (x_1+x_2)^2 + 6\frac{x_1}{x_2} \quad \text{bzgl.} \quad x_2$$

an der Stelle $x_{10} = 20$, $x_{20} = 30$.

Lösung:

$f(x_1, x_2)$ muss partiell nach x_2 abgeleitet werden, wobei x_1 als Konstante aufgefasst wird, also mit

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 2\cdot\frac{x_1}{\sqrt{x_2}} + 2(x_1+x_2) - 6\frac{x_1}{x_2{}^2} \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial f(20,30)}{\partial x_2} = 107{,}17, \quad f(20,30) = 2.942{,}176 \ \text{ ergibt sich}$$

$$\varepsilon_{f,x_{20}} = \frac{\dfrac{\partial f(20,30)}{\partial x_2}}{f(20,30)}\cdot 30 = 1{,}093 \quad .$$

Erhöhen (vermindern) wir $x_{20} = 30$ um 1 % und lassen x_1 konstant, so steigt (fällt) der Funktionswert f(20, 30) (näherungsweise) um 1,093 %.

Übungsaufgabe

Ü 1.3

1. Ermitteln Sie jeweils die Punktelastizität zu folgenden Funktionen:

   a) $y = f(x) = 2x^2$,

   b) $y = f(x) = 10 - 2x$,

   c) $y = f(x) = x - x^3 + x^5$,

   d) $y = f(x) = a \cdot e^{bx}$,

   e) $y = f(x) = f(x) = x^3 \cdot \ln(x^2 + 1)$!

2. An welcher Stelle hat die Funktion $y = f(x) = 3x + 2$ die Elastizität $\varepsilon_{y,x} = ½$?

1.3.2 Untersuchung des globalen Veränderungsverhaltens von Funktionen

Das Steigungs- und Krümmungsverhalten einer Funktion f(x) haben wir bisher punktweise untersucht, nun wollen wir das Wachstumsverhalten global in einem Intervall des Definitionsbereiches von f(x) mittels der Ableitungen betrachten.

1.3.2.1 Steigungsverhalten von f(x) im Intervall

Deutet man das Vorzeichen Plus oder Minus der Ableitung $f'(x)$ an der Stelle $x = x0$ als positive oder negative Höhendifferenz eines rechtsgelegenen Kurvenpunktes gegenüber einem nahe gelegenen linken Kurvenpunkt, so kann durch die Vorzeichenauswertung der Ableitungsfunktion $f'(x)$ im Intervall $a < x < b$ auch auf die positiven oder negativen Höhenunterschiede von f(x) in Richtung wachsender x-Werte des Intervall geschlossen werden.

Merksatz

Mittels des **Vorzeichens der Ableitungsfunktion von f(x)** wird das Steigungsverhalten (Monotonieverhalten) von f(x) wie folgt charakterisiert:

wenn	**dann ist f(x)**
$f'(x) < 0$	streng monoton fallend,
$f'(x) \leq 0$	monoton fallend,
$f'(x) = 0$	konstant,
$f'(x) \geq 0$	monoton steigend,
$f'(x) \geq 0$	streng monoton steigend.

Beispiel

B 1.8 Aufgabe:

geg.: $f(x) = 1/3\,x^3 - 4\,x^2 + 4$ (s. Bild 1.5)

ges.: Monotonieverhalten von f(x) im Definitionsbereich

Lösung:

Dazu bestimmen wir zunächst die 1. Ableitung, f'(x), der Funktion und überprüfen, für welche Intervalle die entsprechenden Monotoniebedingungen gelten:

Es gilt $f'(x) = x^2 - 8\,x$ und nach Ausklammern $f'(x) = x\,(x - 8)$.

Die Ausgangsfunktion f (x) ist **streng monoton steigend**, wenn $x(x - 8) > 0$.

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn

a) beide Faktoren positiv oder

b) beide negativ sind, also

a) $x > 0$ **und** $x - 8 > 0 \rightarrow x > 8$,

b) $x < 0$ **und** $x - 8 < 0 \rightarrow x < 0$.

Die Funktion ist also **streng monoton steigend** in $-\infty < x < 0$ und $8 < x < \infty$.

Die Funktion ist **streng monoton fallend**, wenn $x(x - 8) < 0$.

Beide Faktoren müssen entgegengesetzte Vorzeichen haben, also

a) $x > 0$ **und** $x - 8 < 0$ oder

b) $x < 0$ **und** $x - 8 > 0$.

Aus a) folgt $0 < x < 8$. Da b) unverträglich ist, fällt die Funktion streng monoton, wenn $0 < x < 8$ (siehe Bild 1.5).

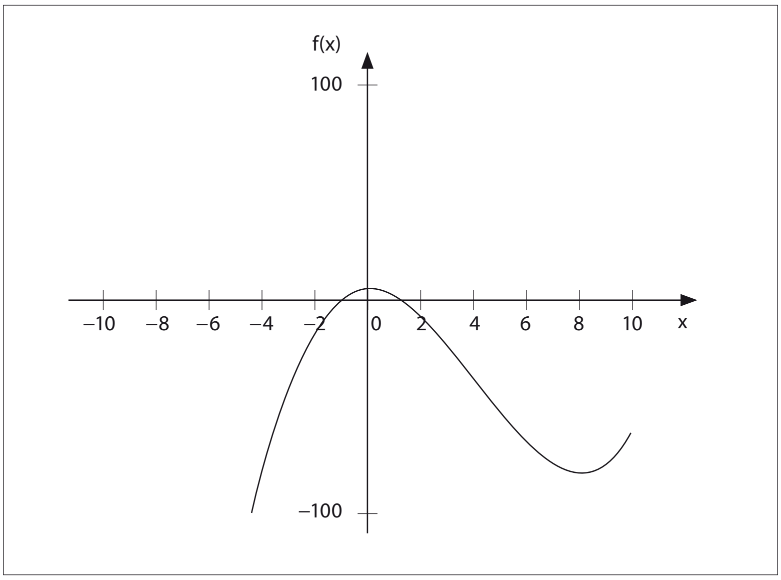

Bild 1.5 Funktionsbild zu Beispiel B 1.8

1.3.2.2 Krümmungsverhalten von f(x) im Intervall

Das globale Veränderungsverhalten einer Funktion kann durch die Krümmungsmessung in den Punkten präzisiert werden. Durchläuft ein Punkt die Kurve einer linearen Funktion f (x) in Richtung wachsender x-Werte, so wird er sich auf einer Geraden bewegen. Wir haben es mit einer proportionalen Entwicklung zu tun. Im Vergleich dazu, kann er sich je nach Funktionstyp über- oder unterproportional (d. h.: über- oder unterlinear) verhalten, also sich in einem nach links gekrümmten (oder „nach oben offenen") Bogen (dann **konvexe Funktion**) oder in einem nach rechts gekrümmten (oder „nach unten offenen") Bogen (dann **konkave Funktion**) befinden.

Deuten wir das Krümmungsverhalten an der Stelle x_0 über die Differenz der Höhendifferenzen zweier benachbarter Kurvenpunkte, so liegt es nahe von der Ableitungsfunktion f´(x) ihre Ableitungsfunktion f´´(x) zu bilden und über das Vorzeichen von f´´(x) auf die Links- oder Rechtskrümmung der Funktion f(x) im Intervall a < x < b zu schließen.

Merksatz

Gegeben sei eine zweifach differenzierbare Funktion f (x) im Intervall a < x < b:

wenn	so
f´(x) ≥ 0 **und** f´´(x) ≥ 0 (konvex)	beschleunigt monoton wachsend (= überproportional, überlinear, progressiv, linksgekrümmt),
f´(x) ≥ 0 **und** f´´(x) = 0	linear monoton wachsend (= proportional)
f´(x) ≥ 0 **und** f´´(x) ≤ 0 (konkav)	gebremst (verlangsamt) monoton wachsend (= unterproportional, unterlinear, degressiv, rechtsgekrümmt),

wenn	so
f´(x) ≤ 0 **und** f´´(x) ≤ 0 (konkav)	beschleunigt monoton fallend (= nimmt stärker ab als linear, rechtsgekrümmt),
f´(x) ≤ 0 **und** f´´(x) = 0	linear monoton fallend (= proportional)
f´(x) ≤ 0 **und** f´´(x) ≥ 0 (konvex)	gebremst (verlangsamt) monoton fallend, (nimmt weniger stark ab als linear, linksgekrümmt)

Bemerkung:

- **Konvex:** Liegt jede Tangente (Richtung als lineare, proportionale Entwicklung deuten) im Intervall unterhalb der Funktionskurve, so ist die zweite Ableitung positiv und die Funktion konvex.
- **Konkav:** Liegt jede Tangente im Intervall oberhalb der Funktionskurve, so ist die zweite Ableitung negativ und die Funktion konkav.

Beispiel

B 1.9 geg.: $f_1(x) = 70 + x^2$,

$f_2(x) = 70 + 20\sqrt{x}$

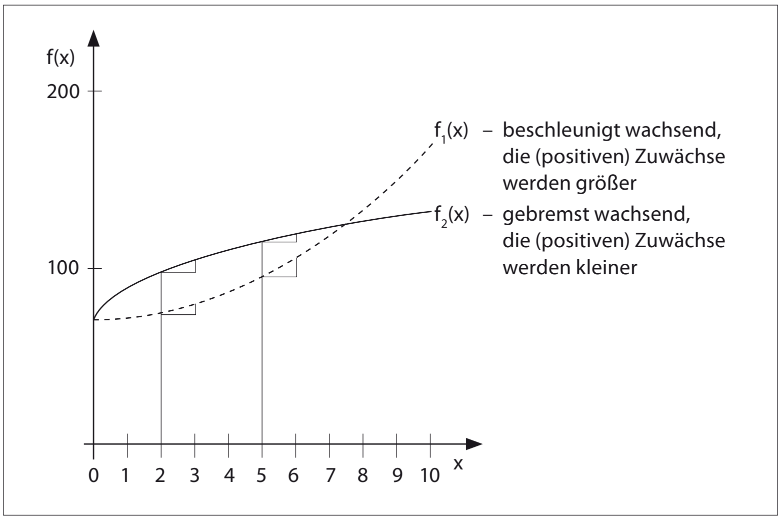

Bild 1.6 Steigungsverhalten (zu Beispiel B 1.9)

B 1.10 geg.: $f_1(x) = 70 - x^2$,

$f_2(x) = 70\, e^{-0{,}5\,x}$

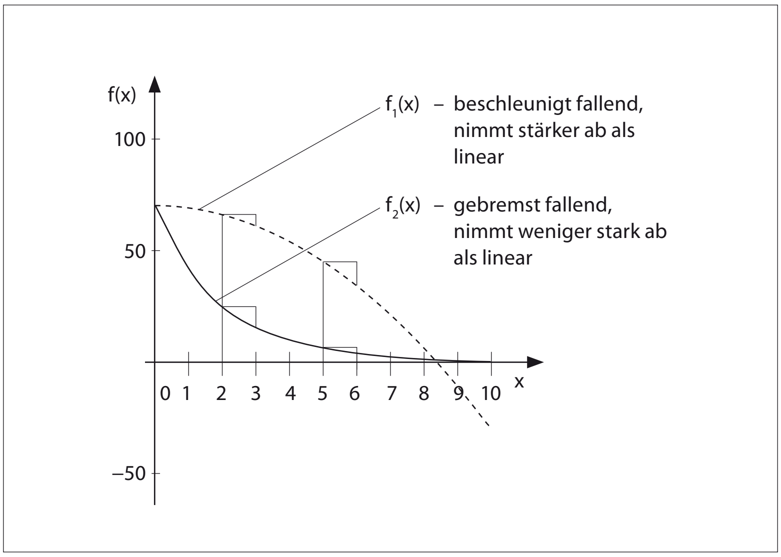

Bild 1.7 Steigungsverhalten (zu Beispiel B 1.10)

B 1.11 Aufgabe:

Quantitative Analyse der Funktion $f(x) = 8x^3 - 72x^2 + 216x - 214$ an der Stelle $x_0 = 3$ mittels ihrer Ableitungen an dieser Stelle (vgl. Bild 1.8)!

Lösung:

Es gilt: $f'(x) = 24x^2 - 144x + 216$, $f''(x) = 48x - 144$ und $f'''(x) = 48$.

Im Punkt $P(x_0, f(x_0)) = P(3, 2)$ hat die Funktionskurve den Kurventangentenanstieg $f'(3) = 0$, weist somit an dieser Stelle keine Steigung auf.

Ist das nun ein Indiz für eine konstant verlaufende Funktion im Intervall $a < x < b$? Mit Sicherheit nicht! Dies bestätigen schon die Funktionswertunterschiede zwischen $f(3) = 2$ und $f(4) = 10$. Es könnte aber ein Hinweis für zwei mögliche Fälle sein:

- **Erstens**, es erfolgt bei x_0 ein Wechsel von fallend zu steigend (= Minimum, reine Linkskrümmung der Kurve) oder von steigend zu fallend (= Maximum, reine Rechtskrümmung der Kurve).
- **Zweitens** könnte dort ein Krümmungswechsel von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt (oder umgekehrt) vorliegen.

Da $f''(3) = 0$ gibt es keine reine Links- oder Rechtskrümmung im Intervall. Aus der dritten Ableitung $f'''(3) = 48 > 0$ schließen wir dann endlich, dass an der Stelle $x_0 = 3$ ein Krümmungswechsel vollzogen wird, und zwar von rechtsgekrümmt zu linksgekrümmt (sogenannte **konkav/konvex-Wendestelle**; siehe Bild 1.8)

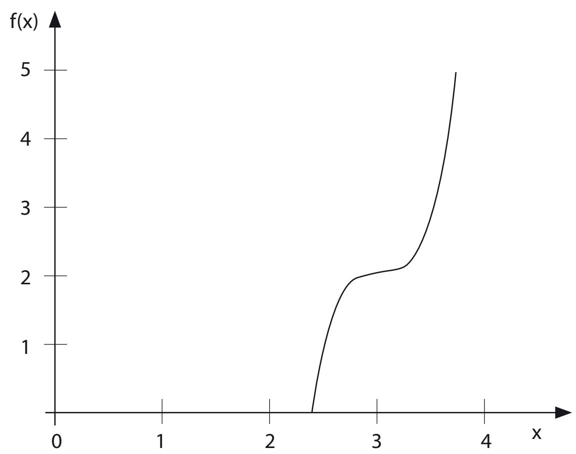

Bild 1.8 Funktionsbild zu Beispiel B 1.11

Auf die Bestimmung der Extremalstellen und Wendestellen des Krümmungsverhaltens einer Funktion werden wir in den folgenden Abschnitten noch näher eingehen.

Übungsaufgabe

Ü 1.4 Die Preis-Absatz-Funktion eines Unternehmens ist durch die Funktion

$$x(p) = -0{,}4 + 0{,}4 \cdot \sqrt{12501 - 125 \cdot p} \quad \text{gegeben.}$$

a) Bestimmen Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich!

b) Bei welchem Preis findet sich kein Käufer?

c) Bei einer kostenlosen Abgabe sind wie viel ME absetzbar?

d) Untersuchen Sie die Funktion auf Monotonie und Krümmung im ökonomischen Bereich!

e) Skizzieren Sie die Funktion x(p) und ihre Umkehrfunktion p(x) in einem Koordinatensystem!

1.3.3 Bestimmung lokaler und globaler Extrema von differenzierbaren Funktionen einer Variablen

Definition

Eine Funktion f hat an der Stelle x_0 ein **lokales Maximum** (bzw. **lokales Minimum**), wenn f im Vergleich zu den Werten in ihrer kleinen Umgebung den größten (kleinsten) Wert besitzt.

Mit Hilfe der Differentialrechnung lassen sich alle lokalen Extrema einer differenzierbaren Funktion innerhalb des betrachteten Intervalls relativ leicht errechnen. Es ist anschaulich klar, dass dort lokale Extremstellen vorliegen, wo die Funktion f ihr Monotonieverhalten ändert, also die Ableitung f´ im Fall eines lokalen Maximums (Minimums) in x_0 links davon ein positives (negatives) und rechts davon ein negatives (positives) Vorzeichen besitzen muss:

– **Notwendige Bedingung** für das Vorliegen eines Extremwertes an der Stelle x_0 ist also $f'(x_0) = 0$, d. h. der Funktionsgraph muss an der Stelle x_0 eine waagerechte Tangente besitzen. Existiert ein solcher Punkt, so bezeichnen wir ihn als **stationären Punkt**.

  Diese Bedingung ist zwar Voraussetzung für ein lokales Extremum, aber nicht ausreichend. So kann z. B. an der Übergangsstelle von einer links gekrümmten zu einer rechts gekrümmten Kurve (oder umgekehrt) die Kurventangente ebenfalls waagerecht sein. Ist jedoch bekannt, dass die stationäre Stelle x_0 nur in einem linksgekrümmten oder nur in einem rechtsgekrümmten Bereich liegt, dann ist an der Stelle x_0 ein lokales Extremum.

– **Hinreichende Bedingung** für das Vorliegen eines lokalen Extremwertes an der Stelle x_0 ist:

  $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) < 0$ (rechtsgekrümmt), dann besitzt die Funktion f an der Stelle x_0 ein **lokales Maximum**

  $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) > 0$ (linksgekrümmt), dann besitzt die Funktion f an der Stelle x_0 ein **lokales Minimum**.

Zusammenfassung

Zusammenfassung:

Der **Extremwert von f** ergibt sich als Lösung von $f'(x) = 0$ in Verbindung mit einer Vorzeichenüberprüfung von f´´.