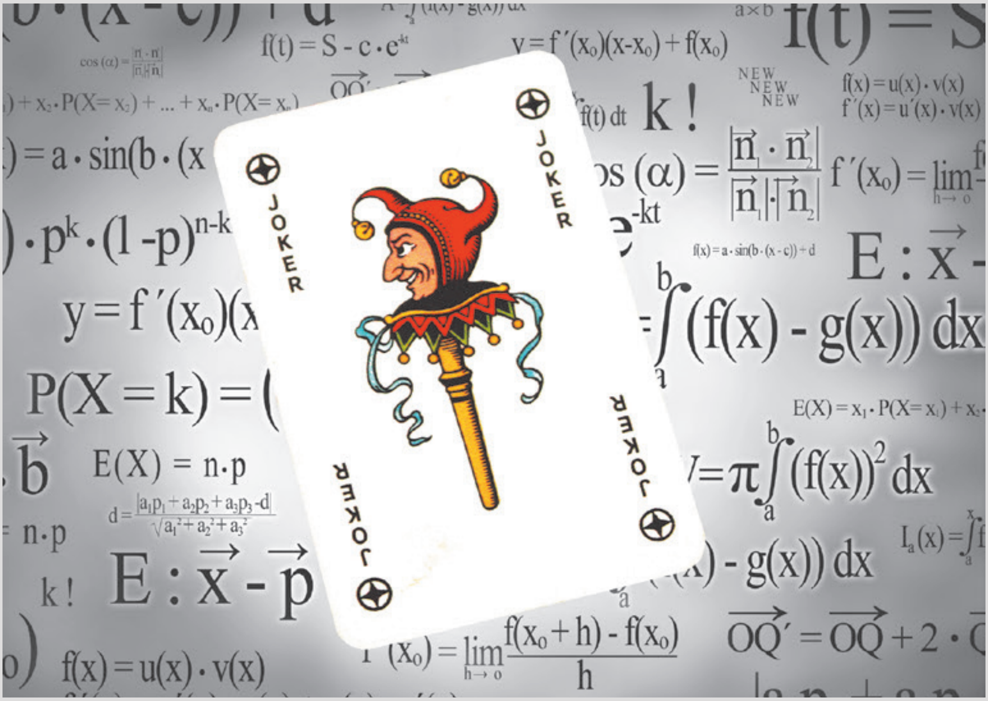
Rosner

Optimale Vorbereitung auf das Abitur in Mathematik

Verständliche Zusammenfassungen und Basisübungen mit ausführlichen Lösungen



Merkur Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Der Verfasser:

Stefan Rosner
Lehrer an der Kaufm. Schule in Schwäbisch Hall
stefan_rosner@hotmail.com

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Coverbild (Joker): © fotomaedchen - Fotolia.com

* * * * *

6. Auflage 2021
© 2016 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung:

MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0383-06
ISBN 978-3-8120-1009-2

2. Gleichungen

2.1 Gleichungstypen: Übersicht

	Typ 1	**Typ 1S**
Gleichung 1. Grades (linear) (S. 26)	$2x-4=0$	
Gleichung 2. Grades (quadratisch) (S. 26)	$2x^2-4=0$	
Gleichung 3. Grades (S. 26)	$2x^3-4=0$	
Gleichung 4. Grades (S. 27)	$2x^4-4=0$	
Exponentialgleichung (S. 27)	$e^x=0{,}5$ oder $e^{2x-1}=0{,}5$	
Sinusgleichung (S. 30)	$\sin(x)=0{,}5$	$\sin(2x-1)=0{,}5$
Kosinusgleichung (S. 30)	$\cos(x)=0{,}5$	$\cos(2x-1)=0{,}5$
Merkmal	umformbar auf $\left\{\begin{matrix} x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ e^x \text{ oder } e^{\text{„}nicht\ nur\ x\text{“}} \\ \sin(x) \\ \cos(x) \end{matrix}\right\} = \ldots$	umformbar auf $\left\{\begin{matrix} \sin(\text{„}nicht\ nur\ x\text{“}) \\ \cos(\text{„}nicht\ nur\ x\text{“}) \end{matrix}\right\} = \ldots$
Lösungsvorgehen	**Gegenoperation** $\left\{\begin{matrix} : \\ \sqrt{} \\ \sqrt[3]{} \\ \sqrt[4]{} \\ \ln \\ \sin^{-1} \\ \cos^{-1} \end{matrix}\right\}$	**Substitution :** $u=$„*nicht nur x*“ **führt zu** $\left\{\begin{matrix} \mathbf{\sin(u)} \\ \mathbf{\cos(u)} \end{matrix}\right\} = \ldots;$ Trig. Gleichung vom Typ 1 lösen; **Rücksubstitution**

Abkürzung : ... steht für eine Zahl.

www.mvurl.de/hutq

Typ 2	**Typ 3**	**Typ S**
$2x^2-4x=0$	$x^2-8x+15=0$	
$2x^3-4x=0$		
$2x^4-4x=0$		$x^4-8x^2+15=0$
$2e^{2x}-e^x=0$		$e^{2x}-8e^x+15=0$
$\left(\sin(x)\right)^2-0,5\sin(x)=0$		
$\left(\cos(x)\right)^2-0,5\cos(x)=0$		
Alle Summanden enthalten mindestens x (bzw. $e^x/\sin(x)/\cos(x)$). Kein Summand besteht nur aus einer „Zahl“. Somit kann „etwas mit x“ ausgeklammert werden.	umformbar auf $\ldots x^2+\ldots x+\ldots=0$	umformbar auf $\left.\begin{cases}\ldots x^4 + \ldots x^2 + \ldots \\ \ldots e^{2x} + \ldots e^x + \ldots\end{cases}\right\}=0$
(evtl.) Ausklammern; **Satz vom Nullprodukt** (S. 32)	**abc -** bzw. **pq - Formel**	**Substitution führt zu** $\boldsymbol{\ldots u^2+\ldots u+\ldots=0}$; abc- bzw. pq-Formel; **Rücksubstitution**

Bemerkung: Eine Gleichung, die keinem dieser Gleichungstypen zuordenbar ist, kann in der Regel nicht „von Hand“ gelöst werden.

3. Differenzialrechnung

3.1 Ableitungsregeln

Nr.	Beispiel	Vorgehen
		Elementarregeln
1	$f(x) = x^5$ $f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$ $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x \quad (= 2 \cdot x^1)$ $f(x) = x \quad (= x^1)$ $\downarrow$ $f'(x) = 1 \quad (= 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1)$	$f(x) = x^{Exponent}$ $f'(x) = Exponent \cdot x^{Exponent-1}$ (Potenzregel)
2	$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$	*Abschreiben*
3	$f(x) = \sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$	$\sin \rightarrow \cos \rightarrow -\sin \rightarrow -\cos \rightarrow \sin$ *(Im Uhrzeigersinn!)*
4	$f(x) = \cos(x)$ $f'(x) = -\sin(x)$	
		Vorgehensregeln
5	$f(x) = \mathbf{3} \cdot x^2$ $f'(x) = \mathbf{3} \cdot 2x = 6x$	*„Zahlen" mit · oder : „bleiben"* (Faktorregel)
6	$f(x) = x^2 + \mathbf{2}$ $f'(x) = 2x$	*„Zahlen" mit + oder − „verschwinden"*
7	$f(x) = x^2 - 4x$ $f'(x) = 2x - 4$	*+ und − Zeichen unterteilen die Funktion in Teilfunktionen, welche einzeln abgeleitet werden* (Summenregel)

www.mvurl.de/77rw

Nr.	Beispiel	Vorgehen
Produktregel		
8	$f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $f'(x) = \underbrace{u'(x)}_{\textit{Ableiten}} \cdot \underbrace{v(x)}_{\textit{Abschreiben}} + \underbrace{u(x)}_{\textit{Abschreiben}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\textit{Ableiten}}$

Aber: Die Produktregel nur dann anwenden, wenn zwei Faktoren, die **beide *x*** enthalten, miteinander **multipliziert** werden.

$f(x) = 3x + \sin(x)$
$f'(x) = 3 + \cos(x)$
(Keine Produktregel, da keine Multiplikation)

$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$
$f'(x) = 3 \cdot \cos(x)$
(Produktregel unnötig, Faktor 3 enthält kein x)

$f(x) = 3x \cdot \sin(x)$
$f'(x) = 3 \cdot \sin(x) + 3x \cdot \cos(x)$
(Produktregel)

Anwendungen der Kettenregel		
9	$f(x) = (2x+3)^5$ $f'(x) = 5 \cdot (2x+3)^4 \cdot 2$ $= 10 \cdot (2x+3)^4$	$f(x) = (\textit{Klammerinhalt})^{\textit{Exponent}}$ $f'(x) = \textit{Exponent} \cdot (\textit{Klammerinhalt})^{\textit{Exponent}-1} \cdot \textit{Klammerinhalt abgeleitet}$
10	$f(x) = e^{2x+3}$ $f'(x) = e^{2x+3} \cdot 2$	$f(x) = e^{\textit{Exponent}}$ $f'(x) = e^{\textit{Exponent}} \cdot \textit{Exponent abgeleitet}$
11	$f(x) = \sin(2x+3)$ $f'(x) = \cos(2x+3) \cdot 2$	$f(x) = \sin(\textit{Klammerinhalt})$ $f'(x) = \cos(\textit{Klammerinhalt}) \cdot \textit{Klammerinhalt abgeleitet}$
12	$f(x) = \cos(2x+3)$ $f'(x) = -\sin(2x+3) \cdot 2$	$f(x) = \cos(\textit{Klammerinhalt})$ $f'(x) = -\sin(\textit{Klammerinhalt}) \cdot \textit{Klammerinhalt abgeleitet}$

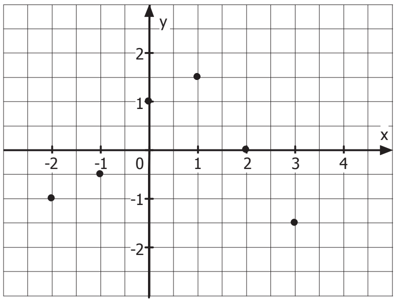
Die allgemeine Kettenregel, aus welcher sich die Regeln 9-12 ergeben, lautet:

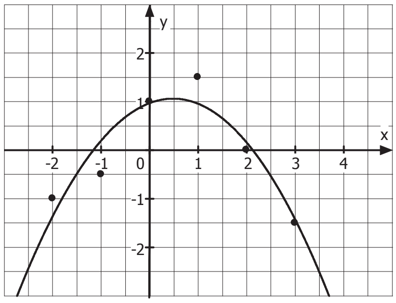
$$f(x) = u(v(x))$$

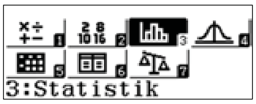
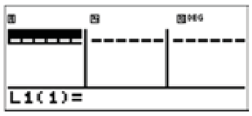
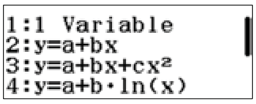
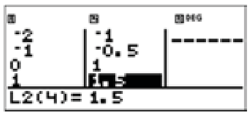
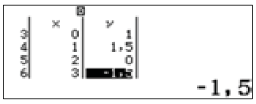
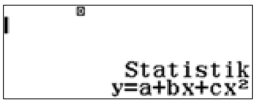
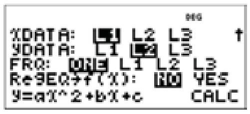
$$f'(x) = \underbrace{u'(v(x))}_{\textit{Äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\textit{Innere Ableitung}}$$

2. Möglichkeit: Regression

Beispiel:
Gesucht ist die Gleichung einer Parabel (2. Grades), deren Schaubild **näherungsweise** durch die dargestellten Punkte verläuft.





CASIO fx-87DE X	TI-30X Plus MultiView
[MENU] [3] 	[data] 
[3] 	Koordinaten aller Punkte eintragen; 
Koordinaten aller Punkte eintragen; 	[2nd]; [mode] 
[AC] 	[2nd]; [data] 
[OPTN]; [3] 	[↓]; [↓]; [↓]; [↓] 
Achtung: Der CASIO-WTR geht von $y = a + bx + cx^2$ aus!	[enter] 
	[↓]; [↓]; [↓]; [→]; [↓]; [enter] 

Gleichung der Regressionsfunktion: $f(x) = -0{,}393x^2 + 0{,}379x + 0{,}971$

Notwendig: Mindestens so viele Punkte wie unbekannte Koeffizienten im Ansatz.

Das Bestimmtheitsmaß r^2

• Gibt die **Güte einer Regression** an, beurteilt also, wie „genau“ die Kurve durch die Punkte verläuft.

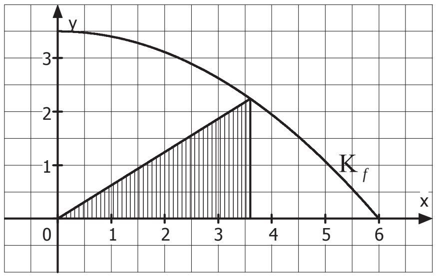
• r^2 kann hierbei Werte zwischen 0 (Kurve „passt nicht“ zur Punktwolke) und 1 (Kurve verläuft durch alle Punkte) annehmen.
Im Beispiel gilt $r^2 \approx 0{,}86$, was auf eine „recht hohe“ Anpassung der Kurve an die Punkte hindeutet.

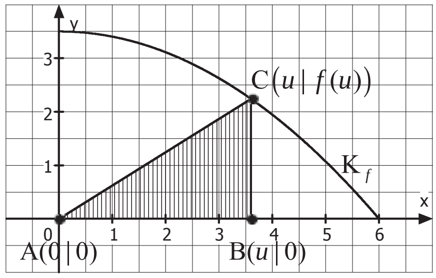
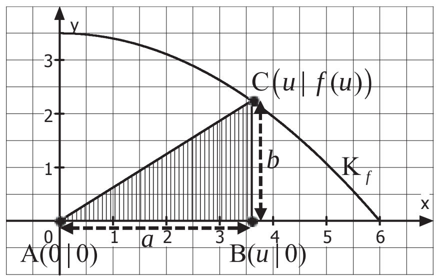
www.mvurl.de/88xx

3.11 Extremwertaufgaben

Beispiel

Aus einer parabelförmigen Holzplatte soll ein möglichst großes Dreieck (s. Skizze, mit rechtem Winkel rechts unten) herausgesägt werden.
Der Rand der Holzplatte wird durch das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -\frac{7}{72}x^2 + \frac{7}{2}$ beschrieben.
Welchen Flächeninhalt kann ein solches Dreieck höchstens haben?



Das Rezept	
Zutaten 	
1. Skizze machen: Alles einzeichnen was in der Aufgabenstellung beschrieben wird.	(hier gegeben)
2. Koordinaten möglichst vieler relevanter Punkte (eventuell in Abhängigkeit von *u*) angeben. Hierbei beachten: Ein Punkt, der „irgendwo auf dem Schaubild" liegt, besitzt die Koordinaten $(u \mid f(u))$.	
Kochen 	
3. Allgemeine Zielfunktion bestimmen. Formel für die Größe suchen, die maximal (bzw. minimal) werden soll. (z.B. $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$; $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$; $A = a \cdot b$; $U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$; ...)	Flächeninhalt rechtwinkliges Dreieck: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ (Allgemeine Zielfunktion)
4. Benötigte Strecken $(a,\ b,\ c,\ h_c,\ ...)$ für Allgemeine Zielfunktion in **Skizze einzeichnen**.	

www.mvurl.de/q5ks

5. Konkrete Zielfunktion bestimmen. **Streckenlängen** durch die Koordinaten der Punkte aus 2. **ausdrücken**. Hierbei beachten: - waagr. Streckenlänge: $x_{\text{rechts}} - x_{\text{links}}$ - senkr. Streckenlänge: $y_{\text{oben}} - y_{\text{unten}}$ **Funktionsterm** aus Aufgabenstellung **einsetzen**.	$\mathrm{A}(u) = \frac{1}{2} \cdot \quad a \quad \cdot \quad b$ $\mathrm{A}(u) = \frac{1}{2} \cdot (u - 0) \quad \cdot \quad (f(u) - 0)$ $\mathrm{A}(u) = \frac{1}{2} \cdot \quad u \quad \cdot \left(-\frac{7}{72}u^2 + \frac{7}{2} \quad - 0\right)$ (Konkrete Zielfunktion)
6. Schaubild der **Konkreten Zielfunktion** auf **Hochpunkt** (bzw. Tiefpunkt) **untersuchen**.	$\mathrm{A}(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot \left(-\frac{7}{72}u^2 + \frac{7}{2}\right) = -\frac{7}{144}u^3 + \frac{7}{4}u;$ $\mathrm{A}'(u) = -\frac{7}{48}u^2 + \frac{7}{4};\ A''(u) = -\frac{7}{24}u$ 1. $\mathrm{A}'(u) = 0: \ -\frac{7}{48}u^2 + \frac{7}{4} = 0$ Lösung: $u_1 \approx 3{,}46 \quad (u_2 \approx -3{,}46$ nicht in D) 2. $\mathrm{A}''(3{,}46) \approx -\frac{7}{24} \cdot 3{,}46 < 0 \quad \rightarrow \ \mathrm{H}$ 3. $\mathrm{A}(3{,}46) \approx -\frac{7}{144} \cdot 3{,}46^3 + \frac{7}{4} \cdot 3{,}46 \approx 4{,}04$ $\rightarrow \mathrm{H}(3{,}46 \mid 4{,}04)$
7. Randwertuntersuchung **Grenzen des Definitionsbereiches** für *u* in Konkrete Zielfunktion **einsetzen**. Erhaltene *y*-Werte mit dem *y*-Wert des Hochpunktes (bzw. Tiefpunktes) **vergleichen**.	Definitionsbereich: $\mathrm{D} = [0;\ 6]$ (s. Skizze) $\mathrm{A}(0) = 0 \ < 4{,}04$ $\mathrm{A}(6) = 0 \ < 4{,}04$
Servieren	
8. Antwortsatz Für $u = \ldots$ (*x*-Wert Extrempunkt) wird ... (gesuchte Größe) maximal (bzw. minimal). Diese beträgt dann ... (*y*-Wert Extrempunkt).	**Antwortsatz** Für $u \approx 3{,}46$ wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal. Dieser beträgt dann ungefähr 4,04 Flächeneinheiten.

5.2 Von der Aufgabenformulierung zum Rechenansatz („Schlüsselwörter“)

Da sich anwendungsorientierte Aufgaben auf alle Inhalte der Analysis beziehen können, ist es oftmals schwierig, von der Aufgabenformulierung zum zugehörigen Rechenansatz zu gelangen. Die nachfolgende Zusammenstellung soll Ihnen dabei helfen.

Aufgabenformulierung	Rechenansatz
Bestand zum Beobachtungsbeginn; Anfangsbestand; Startwert; …	$f(0)$
Bestand bzw. Wert zu einem bestimmten Zeitpunkt; …	gegebenen Zeitpunkt einsetzen: $f(x_0)$
Ab welchem bzw. bis zu welchem Zeitpunkt liegt mehr bzw. weniger als ein bestimmter Bestand vor; ein bestimmter Wert wird über- bzw. unterschritten; höher bzw. geringer als; …	$f(x) = \text{Wert}$ (gleichsetzen um zum Anfangs- bzw. Endzeitpunkt zu gelangen)
Momentane Änderungsrate; Änderung zu einem Zeitpunkt; steil bzw. flach; Steigung; …	$f'(x)$ bzw. $f'(x_0)$
kleinster (geringster) bzw. größter (höchster) Wert; …	Hoch- oder Tiefpunkt von K_f
größte Änderung; stärkster Zuwachs bzw. stärkste Abnahme; steilste Stelle; …	Wendepunkt von K_f bzw. Hoch oder Tiefpunkt von $K_{f'}$
Winkel; Steigungswinkel; …	$\tan\alpha = m$
Größter bzw. kleinster Flächeninhalt, Volumen, Abstand, Länge, ...	Extremwertaufgabe
Langfristig, über sehr langen Zeitraum; Grenzwert; … (bei *e*-Funktion)	Asymptote
gesamt; insgesamt; …	$\int_a^b f(x)\,dx$
mittlerer; durchschnittlicher; …	$\overline{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b (f(x))\,dx$
Volumen	$V_{rot} = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$

www.mvurl.de/awwu

2. Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Vierfeldertafel

2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Formel (allg.)

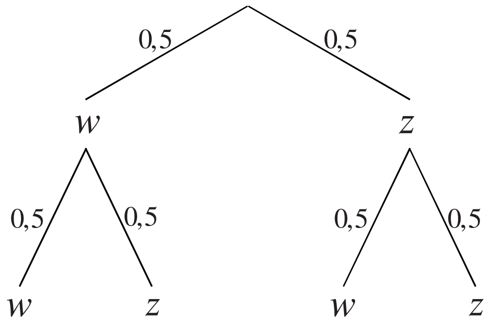
$$\mathbf{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

A: Gesuchtes Ereignis
B: Vorwissen bzw. Bedingung
$\cap$: „und“

Formel (in Worten)

$$P_{\text{Vorwissen}}(\text{gesucht}) = \frac{P(\text{entspricht Vorwissen und ist gesucht})}{P(\text{möglich laut Vorwissen})}$$

Beispiel 1: Eine Münze wird 2-mal geworfen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, wobei bekannt ist, dass im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.



$$P_{\text{Wappen im 2. Wurf}}(\text{genau ein Mal Zahl}) = \frac{P(\text{Wappen im 2. Wurf und genau ein Mal Zahl})}{P(\text{Wappen im 2. Wurf})}$$

$$= \frac{P(zw)}{P(zw)+P(ww)} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{0{,}5\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}5} = \frac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5 = 50\,\%$$

Beispiel 2: An einer Schule werden Schüler nach der Marke ihres Smartphones befragt:

Marke	Samsung	Apple	Sony	HTC	sonst
Anteil	45 %	21 %	8%	6 %	20 %

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Schüler, von welchem bekannt ist, dass er kein Smartphone von Samsung besitzt, ein Smartphone von HTC?

$$P_{\text{kein Samsung}}(\text{HTC}) = \frac{P(\text{kein Samsung und HTC})}{P(\text{kein Samsung})} = \frac{P(\text{HTC})}{P(\text{kein Samsung})}$$

$$= \frac{0{,}06}{1-0{,}45} = \frac{0{,}06}{0{,}55} \approx 0{,}109 = 10{,}9\,\%$$

www.mvurl.de/kgg2

Wichtige Hinweise

Erkennen, dass eine Aufgabe zur bedingten Wahrscheinlichkeit vorliegt

Die Schwierigkeit bei Aufgaben zur bedingten Wahrscheinlichkeit besteht oftmals darin, diese überhaupt als solche zu entlarven und nicht mit „üblichen Baumaufgaben“ zu verwechseln. Hierbei muss das Merkmal solcher Aufgaben, nämlich die Existenz von Vorwissen, erkannt werden.
Es gibt mehrere **grammatikalische Formulierungen**, die den Aufgabenbearbeiter über vorhandenes Vorwissen informieren sollen.

Beispiel (siehe Vorseite)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $\overbrace{\text{genau ein Mal Zahl geworfen wird,}}^{\text{gesuchtes Ereignis}}$
$\underbrace{\textbf{wobei bekannt ist, dass}}_{\textbf{grammatikalische Formulierung}}$ $\underbrace{\text{im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.}}_{\text{Vorwissen (Bedingung)}}$

Weitere grammatikalische Formulierungen für die bedingte Wahrscheinlichkeit

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, **wenn man weiß, dass** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, **falls** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, **wenn** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

Im zweiten Wurf wird Wappen geworfen. **(Vorwissen in eigenem Satz.)**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird.

Achtung: Keine bedingte Wahrscheinlichkeit bei Formulierungen mit „und“

Formulierungen mit **„und“** deuten auf eine Aufgabenstellung ohne eine bedingte Wahrscheinlichkeit hin.

Beispiel: Eine Münze wird 2-mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl **und** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

$\mathrm{P}(zw) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

1.2 Binomialverteilung und kumulierte Binomialverteilung

Beispiel: Ein Basketballspieler trifft erfahrungsgemäß einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er wirft 8 Mal. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.

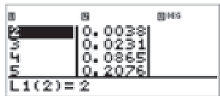
Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen bestimmten Wert annimmt, kann mit Hilfe der Bernoulliformel (mit $n = 8$ und $p = 0,75$) berechnet werden.
Somit ist die Zufallsvariable X binomial verteilt.

1. Die Binomialverteilung (genau k Treffer; $P(X = k)$)

eine „Liste", in welcher für jeden möglichen Wert der Zufallsvariablen die **zugehörige Wahrscheinlichkeit** steht.

CASIO

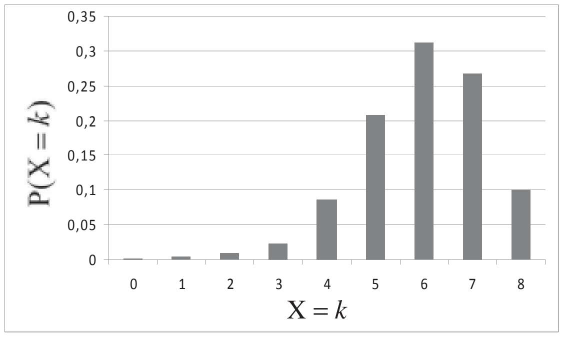
TI



Beispiel: $P(X = 4) \approx 0,0865$

Die Wahrscheinlichkeit für **genau** 4 Treffer beträgt ca. 8,65 %.

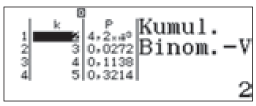
$$\left(\begin{array}{l} \text{Berechnung mit Bernoulliformel:} \\ P(X = 4) = \binom{8}{4} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^4 \approx 0,0865 \end{array} \right)$$



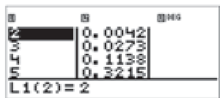
2. Die kumulierte Binomialverteilung (höchstens k Treffer; $P(X \leq k)$)

eine „Liste", in welcher für jeden möglichen Wert der Zufallsvariablen die **Wahrscheinlichkeit** steht, dass **dieser oder ein geringerer Wert als dieser** (**höchstens** dieser) angenommen wird.

CASIO



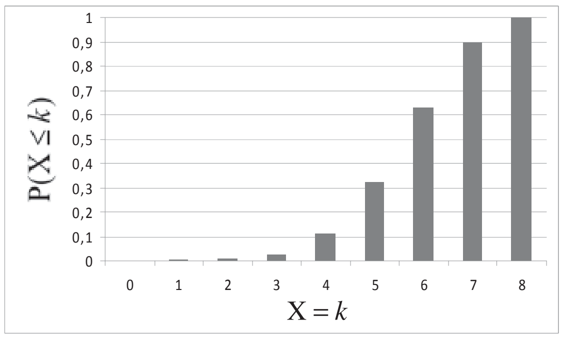
TI



Beispiel: $P(X \leq 4) \approx 0,1138$

Die Wahrscheinlichkeit für 0 bis 4 Treffer (**höchstens** 4 Treffer) beträgt ca. 11,38 %.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Berechnung:} \\ P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 4) \end{array} \right)$$



3. Wahrscheinlichkeit für mindestens k Treffer $P(X \geq k)$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft der Spieler 4 bis 8 Mal (also **mindestens** 4 Mal)?

Vorgehen mithilfe des **Gegenereignisses** „3 oder weniger Treffer (höchst. 3 Treffer)" und der **kumulierten Verteilung**:

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 1 - 0,0273 = 0,9727$

www.mvurl.de/qm89

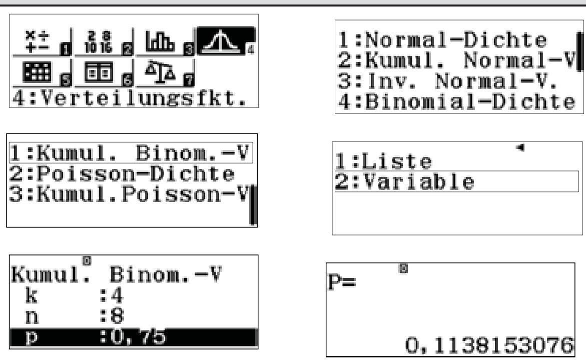
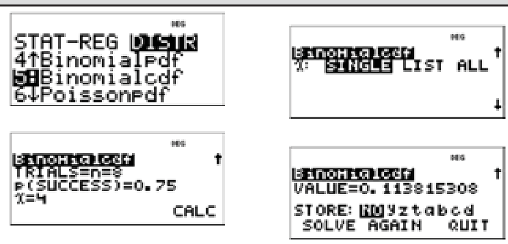
1.4 Aufgabentypen zur Binomialverteilung (mit WTR)

Aufgabentypen $(n = 8;\ p = 0{,}75)$	**Beispiel 1:** Ein Basketballspieler trifft einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er wirft 8 Mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ...
1. „genau *k* Treffer“ $\mathbf{P(X = k)}$	a) ... genau 4 Treffer? $P(X = 4) \approx 0{,}0865$
2. „höchstens *k* Treffer“ $\mathbf{P(X \le k)}$	b) ... höchstens 4 Treffer“? $P(X \le 4) \approx 0{,}1138$
3. „mindestens *k* Treffer“ $\mathbf{P(X \ge k) = 1 - P(X \le k-1)}$	c) ... mindestens 4 Treffer? $P(X \ge 4) = 1 - P(X \le 3) \approx 1 - 0{,}0273 \approx 0{,}9727$ ↓ (Gegenereignis: „Höchstens 3 Treffer“)
4. „mindestens *k* und höchstens“ *h* Treffer“ $\mathbf{P(k \le X \le h)}$ $\mathbf{= P(X \le h) - P(X \le k-1)}$	d) ... mindestens 4 und höchstens 7 Treffer? $P(4 \le X \le 7) = P(X \le 7) - P(X \le 3)$ $\approx 0{,}8999 - 0{,}0273 \approx 0{,}8726$

1. Aufgabentyp mit **Binomialverteilung** $\mathbf{P(X = k)}$

2., **3.** und **4. Aufgabentyp** mit **kumulierter Binomialverteilung** $\mathbf{P(X \le k)}$

Eingabe in WTR (Beispiel: 2. Aufgabentyp: $n = 8;\ p = 0{,}75;\ P(X \le 4)$)

CASIO FX-87DE X	**TI-30X Plus MultiView**
	

Hinweis: Durch „Liste“ / „List“ erhält man die Wahrscheinlichkeiten zu mehreren Werten.

www.mvurl.de/cr3k

3.4 Zyklische Populationsprozesse

Beispiel 1: Bei einer Insektenart entwickeln sich innerhalb eines Monats 25 % der vorhandenen Eiern zu Larven. Nach einem weiteren Monat haben sich 40 % der vorhandenen Larven zu Insekten entwickelt. Im nachfolgenden Monat legt jedes Insekt 10 Eier und stirbt kurz danach.

Darstellungsmöglichkeiten

<table>
<tr><th>Diagramm</th><th>Tabelle</th><th>Übergangsmatrix</th></tr>
<tr>
<td>

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "0{,}25"'] \\ L \arrow[d, "0{,}4"'] \\ I \arrow[uu, bend right, "10"'] \end{tikzcd}$$

</td>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>von E</th><th>von L</th><th>von I</th></tr>
<tr><td>nach E</td><td>0</td><td>0</td><td>10</td></tr>
<tr><td>nach L</td><td>0,25</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>nach I</td><td>0</td><td>0,4</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
<td>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{a_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a_2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \textbf{(allg.)}$$

$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$: **proz. Überlebensrate / Überlebenswahrsch.**

$\boldsymbol{v}$: **Vermehrungsrate**

</td>
</tr>
</table>

Unterschied zum Stochastischen Übergangsprozess (S. 128):

Gesamtzahl an beteiligten Objekten **verändert sich** von Zustand zu Zustand.
Übergangsmatrix enthält **nicht nur Wahrscheinlichkeiten** (keine stochastische Matrix).

Formel: $\overrightarrow{\boldsymbol{x}_{\text{neu}}} = \mathbf{A} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}_{\text{alt}}}$ bzw. $\mathbf{A} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}_{\text{alt}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}_{\text{neu}}}$ (Reihenfolge je nach Aufgabenstellung)

Berechnung der Entwicklung

$\vec{x}_0$ (Anfangszustand)

$\vec{x}_1 = A \cdot \vec{x}_0$

$\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1 = A \cdot A \cdot \vec{x}_0 = A^2 \cdot \vec{x}_0$

$\vec{x}_3 = A \cdot \vec{x}_2 = A^3 \cdot \vec{x}_0$

...

Abkürzungen

$\vec{x}_{...}$: Anzahl im Zeitschritt ...

A : Übergangsmatrix von einem Zeitschritt zum nächsten

A^2 : Übergangsmatrix von einem Zeitschritt zum übernächsten

...

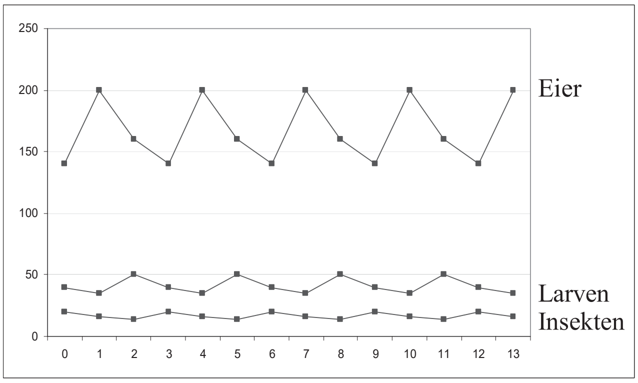
Hinweis: Gleiche Formel(n) wie bei stoch. Übergangsprozessen!

Entwicklung der Population

Im Beispiel: Zu Beginn sind 140 Eier, 40 Larven und 20 Insekten vorhanden.

$$\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 140 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}; \vec{x_1} = \begin{pmatrix} 200 \\ 35 \\ 16 \end{pmatrix}; \vec{x_2} = \begin{pmatrix} 160 \\ 50 \\ 14 \end{pmatrix};$$

$$\vec{x_3} = \begin{pmatrix} 140 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}; \vec{x_4} = \begin{pmatrix} 200 \\ 35 \\ 16 \end{pmatrix}; \vec{x_5} = \begin{pmatrix} 160 \\ 50 \\ 14 \end{pmatrix}; \ldots$$



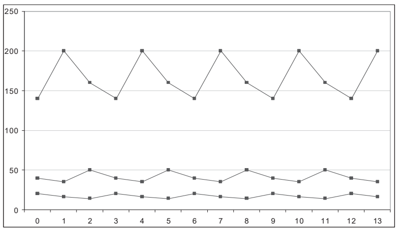
Die Population entwickelt sich zyklisch. Nach einem Zyklus von 3 Monaten ist stets die Startpopulation wieder vorhanden.

Entwicklung bei verschiedenen Vermehrungsraten (*v*)

Pro Insekt **10** Eier (s. o.)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{10} \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

$(0{,}25 \cdot 0{,}4 \cdot 10 \ \mathbf{= 1})$

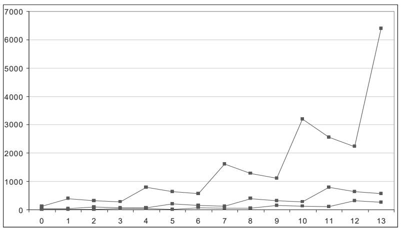


Zyklische Entwicklung
(Zyklus: 3 Monate)

Pro Insekt **20** Eier

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{20} \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

$(0{,}25 \cdot 0{,}4 \cdot 20 = 2 \ \mathbf{> 1})$

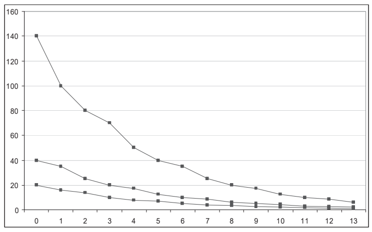


Population **wächst an**

Pro Insekt **5** Eier

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{5} \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

$(0{,}25 \cdot 0{,}4 \cdot 5 = 0{,}5 \ \mathbf{< 1})$



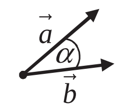
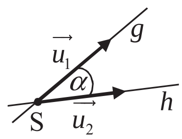
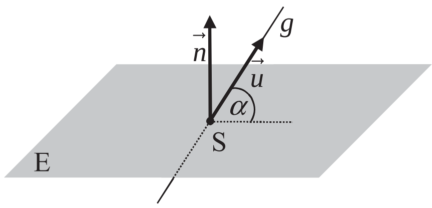
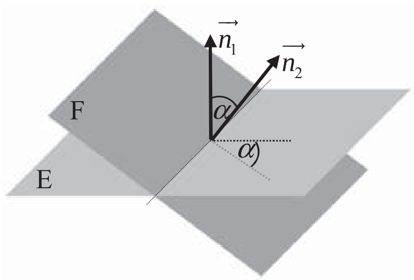
Population **stirbt aus**

Ergebnis

$$\text{Bei } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{a_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a_2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \text{ falls: } \begin{cases} \boldsymbol{a_1 \cdot a_2 \cdot v > 1} & \textbf{wächst} \text{ die Population } \textbf{an} \\ \boldsymbol{a_1 \cdot a_2 \cdot v = 1} & \textbf{zyklische} \text{ Entwicklung (Zyklus: } \mathbf{3} \text{ Zeitschritte)} \\ \boldsymbol{a_1 \cdot a_2 \cdot v < 1} & \textbf{stirbt} \text{ die Population } \textbf{aus} \end{cases}$$

- Gilt (z.B.) $a \cdot b \cdot v = \mathbf{2}$ **verdoppelt** sich, gilt $a \cdot b \cdot v = \mathbf{0{,}5}$ **halbiert** sich die Population stets nach 3 Zeitschritten.
- Bei einem zyklischen Prozess mit 3 Zuständen gilt : $\mathbf{A^3 = E}$.
- Bei (z. B.) einem Prozess mit **4** möglichen **Zuständen** (Format von A: (4×4)) finden die Entwicklungen auch stets in **4 Zeitschritten** statt.

5. Schnittwinkel

Zwischen	Formel	senkrecht ($\alpha = 90°$)
Vektor $\vec{a}$ und **Vektor** $\vec{b}$		
	$\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$	falls $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
Gerade g mit Richtungsvektor $\overrightarrow{u_1}$ und **Gerade** h mit Richtungsvektor $\overrightarrow{u_2}$		
	$\cos(\alpha) = \dfrac{\lvert\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{u_1}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{u_2}\rvert}$	falls $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$
Gerade g mit Richtungsvektor $\vec{u}$ und **Ebene** E mit Normalenvektor $\vec{n}$		
	$\sin(\alpha) = \dfrac{\lvert\vec{u} \cdot \vec{n}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{n}\rvert}$	falls $\vec{u} = k \cdot \vec{n}$ (mit $k \in \mathbb{R}$) (Vielfache)
Ebene E mit Normalenvektor $\overrightarrow{n_1}$ und **Ebene** F mit Normalenvektor $\overrightarrow{n_2}$		
	$\cos(\alpha) = \dfrac{\lvert\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{n_1}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{n_2}\rvert}$	falls $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$

Beispiel: Schnittwinkel zwischen $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E: x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3$.

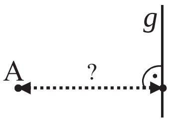
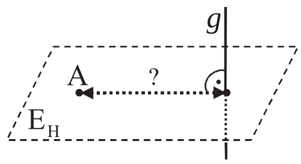
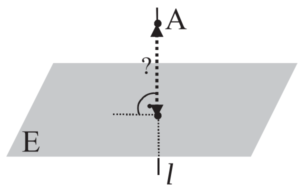
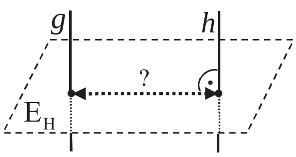
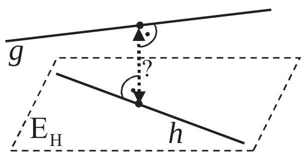
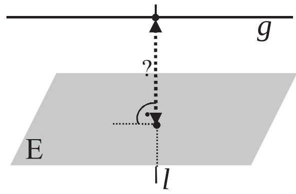
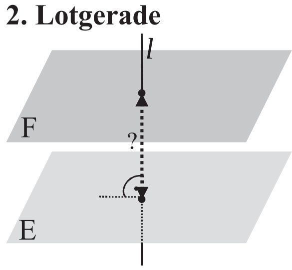
$$\sin(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\lvert 4 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) \rvert}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{14}} \Rightarrow \alpha \approx 27{,}81°$$

(WTR-Einstellung: *deg*)

Hinweis: Mit dem Schnittwinkel ist stets der spitze Winkel ($0 \le \alpha \le 90$) gemeint.

6. Abstandsberechnungen

Lösungsstrategien im Überblick (ausführliches Vorgehen auf den folgenden Seiten)

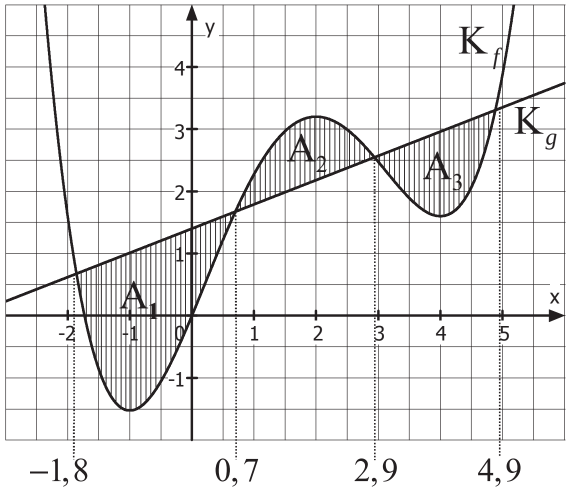
	Punkt	**Gerade**	**Ebene**
Punkt	**Betrag**  $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ (S. 163)	**1. Skalarprodukt**  **2. Hilfsebene**  (S. 163)	**1. Formel** $d=\left\lvert\frac{n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3-b}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}\right\rvert=\left\lvert\frac{(\vec a-\vec p)\cdot\vec n}{\lvert\vec n\rvert}\right\rvert$ **2. Lotgerade**  (S. 165)
Gerade		**Parallel:** **1. Skalarprodukt** **2. Hilfsebene**  (S. 166) **Windschief:** **1. Formel** $d=\left\lvert\frac{(\vec q-\vec p)\cdot\vec n}{\lvert\vec n\rvert}\right\rvert$ mit $\vec n=\vec u\times\vec v$ **2. Hilfsebene**  (S. 166)	**Parallel:** **1. Formel** (Punkt-Ebene) **2. Lotgerade**  (S. 167)
Ebene			**Parallel:** **1. Formel** (Punkt-Ebene) **2. Lotgerade**  (S. 167)

www.mvurl.de/p9c3

Aufgabe 38

Die Schaubilder der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ schließen drei Flächen mit den Inhalten $A_1 = 4{,}1$ FE, $A_2 = 1{,}5$ FE und $A_3 = 1{,}7$ FE ein.

Geben Sie zu jedem der nachfolgenden Flächenberechnungsansätze das zugehörige Ergebnis an.



Flächenberechnungsansatz	**Ergebnis**
a) $\int_{0,7}^{2,9} \left(f(x) - g(x) \right) dx$	____
b) $\int_{2,9}^{4,9} \left(f(x) - g(x) \right) dx$	____
c) $\int_{-1,8}^{2,9} \left(f(x) - g(x) \right) dx$	____
d) $\int_{-1,8}^{4,9} \left(g(x) - f(x) \right) dx$	____
e) $\int_{-1,8}^{0,7} \left(g(x) - f(x) \right) dx + \int_{0,7}^{2,9} \left(f(x) - g(x) \right) dx + \int_{2,9}^{4,9} \left(g(x) - f(x) \right) dx$	____
f) $\int_{-1,8}^{2,9} g(x) - f(x)\, dx$	____
g) $\int_{4,9}^{2,9} \left(g(x) - f(x) \right) dx$	____

Von Schnittstelle zu Schnittstelle integrieren!
Ansonsten werden positive und negative Flächeninhaltswerte zu einer **„Flächenbilanz“** verrechnet.

i) $2x^4 - 24x^2 = -72 + 2x^2 \quad |+72-2x^2$

$2x^4 - 26x^2 + 72 = 0 \quad |:2$

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Substitution: $\left(x^4 = u^2;\ \ x^2 = u\right)$

$u^2 - 13u + 36 = 0$

$u_{1/2} = \dfrac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1}$ (abc-Formel)

$= \dfrac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{13 \pm 5}{2}$

$u_1 = \dfrac{13+5}{2} = \dfrac{18}{2} = 9; \qquad u_2 = \dfrac{13-5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

Rücksubstitution:

$x^2 = 9 \quad |\sqrt{\ }$ $\qquad x^2 = 4 \quad |\sqrt{\ }$

$x_1 = 3$ $\qquad x_3 = 2$

$x_2 = -3$ $\qquad x_4 = -2$

(Typ S; 4. Grad)

j) $2e^{2x} - 17e^x + 8 = 0$

Substitution: $\left(e^{2x} = u^2;\ \ e^x = u\right)$

$2u^2 - 17u + 8 = 0$

$u_{1/2} = \dfrac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2}$ (abc-Formel)

$= \dfrac{17 \pm \sqrt{225}}{4} = \dfrac{17 \pm 15}{4}$

$u_1 = \dfrac{17+15}{4} = \dfrac{32}{4} = 8; \qquad u_2 = \dfrac{17-15}{4} = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$

Rücksubstitution:

$e^x = 8 \quad |\ln$ $\qquad e^x = 0{,}5 \quad |\ln$

$x_1 = \ln(8)$ $\qquad x_2 = \ln(0{,}5)$

$x_1 \approx 2{,}08$ $\qquad x_2 \approx -0{,}69$

(Typ S; Exponentialgleichung)

k) $\left(\sin(x)\right)^2 = 2\sin(x) \quad |-2\sin(x)$

$\left(\sin(x)\right)^2 - 2\sin(x) = 0$

$\sin(x) \cdot \left(\sin(x) - 2\right) = 0$

S. v. Nullpr.

$\sin(x) = 0 \quad |\sin^{-1}$ $\qquad \sin(x) - 2 = 0 \quad |+2$

$x = \sin^{-1}(0)$ $\qquad \sin(x) = 2$

$x_1 = 0$ (Merkhilfe oder WTR) $\qquad$ keine Lösung

$x_2 = \pi - 0 = \pi$

alle Lösungen:

$x = 0 + k \cdot 2\pi$

$x = \pi + k \cdot 2\pi \qquad (k = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots)$

Lösungen im Bereich $[-2; 8]$:

0;

$2\pi\,(= 0 + 1 \cdot 2\pi)$;

π (Typ 2; Sinusgleichung)

l) $2e^{2x} - e^x = 2e^x \quad |-2e^x$

$2e^{2x} - 3e^x = 0$

$e^x \cdot (2e^x - 3) = 0$

S. v. Nullpr.

$e^x = 0 \quad |\ln$ $\qquad 2e^x - 3 = 0 \quad |+3$

keine Lösung $\qquad 2e^x = 3 \quad |:2$

$e^x = 1{,}5 \quad |\ln$

$x = \ln(1{,}5)$

$x \approx 0{,}405$

(Typ 2; Exponentialgleichung)

m) $2x(x^2 - 1) = 0{,}5 - 2x$

$2x^3 - 2x = 0{,}5 - 2x \quad |+2x$

$2x^3 = 0{,}5 \quad |:2$

$x^3 = 0{,}25 \quad |\sqrt[3]{\ }$

$x = \sqrt[3]{0{,}25}$

$x \approx 0{,}63$

(Typ 1; 3. Grad)

n) $(e^x - 1) \cdot (1 - 2x^3) = 0$

S. v. Nullpr.

$e^x - 1 = 0 \quad |+1$ $\qquad 1 - 2x^3 = 0 \quad |+2x^3$

$e^x = 1 \quad |\ln$ $\qquad 1 = 2x^3 \quad |:2$

$x_1 = 0$ $\qquad 0{,}5 = x^3 \quad |\sqrt[3]{\ }$

$\sqrt[3]{0{,}5} = x_2$

$0{,}79 \approx x_2$

(Typ 2; gemischt)