Ott
Lengersdorf

Abitur 2022 | *Leistungskurs*

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik am Berufskolleg – Berufliches Gymnasium
– Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung –

Nordrhein-Westfalen

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Oberstudienrat

Norbert Lengersdorf

Oberstudienrat am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

* * * * *

14. Auflage 2021

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0447-14
ISBN 978-3-8120-1057-3

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält nur auf die neue Prüfungsordnung für das Berufskolleg in Nordrhein-Westfalen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2022 im Fach Mathematik an beruflichen Gymnasien im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung.

Die Aufgaben behandeln nur Themen, die in den Abiturvorgaben 2022 für den Leistungskurs Mathematik, Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung, aufgeführt sind.

Die zentrale Abiturprüfung 2022 besteht aus zwei Teilen, einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil A und einem Prüfungsteil B mit Hilfsmittel (GTR bzw. CAS)

Die Aufgaben für den Leistungskurs sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten: Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra.

Dem pandemiebedingten Distanzlernen wird Rechnung getragen durch eine Fokussierung auf inhaltliche Schwerpunkte für die schriftliche Abiturprüfung für das Abitur 2022.

Die Analysis behandelt im Abitur 2022 als Schwerpunkt ganzrationale Funktionen und Exponentialfunktionen und die Modellierung von berufsbezogenen Anwendungen mithilfe dieser Funktionstypen: Marktpreistheorie, Konsumenten- und Produzentenrente, Modelle der vollständigen Konkurrenz und des Angebotsmonopols, Absatz- und Umsatzentwicklung.

Die Lineare Algebra hat die Schwerpunkte Lineare Gleichungssysteme, Stochastische Matrizen und Lineare Optimierungsprobleme (ohne Simplex). Innerbetriebliche Verflechtungen, mehrstufige Produktionsprozesse und logistische Zusammenhänge werden als Anwendungen behandelt.

Schwerpunkt in der Stochastik ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, die Binomialverteilung und einseitige Hypothesentests in ökonomischen Anwendungen.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist unterschiedlich.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben. An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der Schriftlichen Abiturprüfung 2022

Leistungskurs

Aufgaben-teil	Aufgabentyp	Aufgaben-zahl	Dauer	Punkte
Teil A	Der Aufgabenteil A besteht aus einer Aufgabe mit vier Teilaufgaben, zwei zur Analysisund je eine zur Linearen Algebra und Stochastik. Mindestens zwei der Teilaufgaben sind mit Anwendungsbezug.	1	max. 60 Minuten	24
Teil B	Der Aufgabensatz B umfasst eine Aufgabe zur Analysis, eine Aufgabe zur Linearen Algebra und eine Aufgabe zur Stochastik . Die Aufgabenstellung des Aufgabenteils B ist entweder zur Lösung mit graphikfähigen Taschenrechnern (GTR) oder mit einem Computeralgebrasystem (CAS) konzipiert.	3	min. 210 Minuten	96
	Darstellungsleistung Teil A und B			5
Summe		4	270 Minuten	125

Die Aufgaben sowohl im Teil A als auch im Teil B bestehen jeweils aus Teilaufgaben.

Organisation

Zu Beginn der Bearbeitungszeit erhalten die Prüflinge die beiden zu bearbeitenden Aufgabenteile A und B. Die zugelassenen Hilfsmittel gemäß Punkt 5 werden noch nicht ausgegeben.
Die Prüflinge geben individuell nach Bearbeitung, jedoch nach spätestens 60 Minuten der Bearbeitungszeit, ihre Ausarbeitungen zum Aufgabenteil A ab und erhalten im Gegenzug Zugang zu den gemäß Punkt 5 zugelassenen Hilfsmitteln
(GTR oder CAS; Formelsammlung).
Die Gesamtbearbeitungszeit für beide Prüfungsteile beträgt im Leistungskurs
270 Minuten.
Für Prüflinge, die die Aufgaben und die Lösungen des Prüfungsteils A vorzeitig abgeben, verlängert sich entsprechend die Bearbeitungszeit für den Prüfungsteil B.
Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Prüfungsteilen
der Klausur zugelassen.

Operatoren und Dokumentation von Lösungen

1 Allgemeine Bemerkungen zu den Aufgabenstellungen

Der Prüfling wird nicht zur Nutzung einer bestimmten Technologie aufgefordert, da das Erkennen der Sinnhaftigkeit des Einsatzes des Taschenrechners eine selbstständige Leistung ist. Die Vorgehensweise und Darstellung der Lösung muss unabhängig von der gewählten Technik nachvollziehbar dokumentiert werden.
Der Schüler hat zu verdeutlichen, wie er mit welchen Eingaben mit der genutzten Technik zu welchen Ergebnissen gelangt ist. Die Dokumentation erfolgt immer mit mathematischen Regeln unter Nutzung der Fachsprache.

2 Beispiele zu einigen der häufig genutzten Operatoren

2.1

Operator	Beschreibung
Angeben, Nennen	Objekte, Sachverhalte, Begriffe, Daten ohne nähere Erläuterungen bzw. Begründungen und ohne Darstellung von Lösungsansätzen oder Lösungswegen aufzählen

Erläuterungen: Der Prozess der Ergebnisermittlung bleibt gegebenenfalls im Dunkeln-somit auch die Wahl des Hilfsmittels. „Angeben /Nennen" erfordert Einsicht in den Sachzusammenhang oder den mathematischen Zusammenhang.

Beispiel: ...und geben Sie eine mögliche Kostenfunktion an.

(Abitur 2017 LK CAS, Analysis 2.1.3)

Erwartungshorizont:

Kostenfunktion z.B. mit c = 12: $K(x) = \frac{1}{400}x^3 - \frac{1}{15}x^2 + 12x + 200$

2.2

Operator	Beschreibung
Erläutern	Strukturen und Zusammenhänge erfassen, in Einzelheiten verdeutlichen und durch zusätzliche Informationen verständlich machen

Erläuterungen: Beispielsweise kann zur Problemlösung ein Sachzusammenhang durch zusätzlich hergeleitete Informationen mit eigenen Worten dargelegt werden oder aber auch ein Vorgehen verständlich beschrieben werden.

Beispiel:

Erläutern Sie anhand der kurzfristigen und der langfristigen Preisuntergrenze, ob die Rasolux GmbH einen Preis von 700GE/ME unterbieten kann.

(Abitur 2017 GK Analysis 2.2.1)

Erwartungshorizont:

kPUG: Minimierung der variablen Stückkosten $k_v(x) = 10x^2 - 240x + 1920$

Notwendige und hinreichende Bedingung bei quadratischen Funktionen mit positivem Leitkoeffizient: $k'_v(x) = 0$ $\quad 20x - 240 = 0 \Leftrightarrow x = 12$ $\quad$ kPUG: $k_v(12) = 480$ (GE/ME)

LPUG: Minimierung der Stückkosten $k(x) = 10x^2 - 240x + 1920 + \frac{7840}{x}$

Darstellung des Graphen im Intervall von 0 bis 20 liefert den Tiefpunkt (14 | 1080)

LPUG 1080 GE/ME. Ein Preis von 700GE/ME kann kurzfristig, aber nicht langfristig unterschritten werden.

2.3

Operator	Beschreibung
Berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen

Erläuterungen: Der Ansatz, der auf der symbolischen Ebenen zur Lösung führt, ist zu dokumentieren. Der sich anschließende Lösungsweg muss unter Beibehaltung mathematischer Regeln nachvollziehbar dargestellt werden. Wenn ein GTR/CAS für einen Lösungsschritt verwendet wird, ist der Ansatz und der logische Schritt zu dokumentieren.

Beispiel: Berechnen Sie den maximalen Gewinn (Abitur 2017 LK GTR, Analysis 2.2.1.2)

Erwartungshorizont

Gewinnmaximum: $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$

Ableitungen: $G'(x) = -3x^2 + 12x - 1{,}25$; $G''(x) = -6x + 12$

Notwendige Bedingung: $G'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 3{,}89 \vee x_2 = 0{,}11$

Mit $G''(3{,}89) < 0$ und $G(3{,}89) = 23{,}32$ gilt:

Bei einer Produktion von 3,89 ME wird der maximale Gewinn von 23,32 GE erzielt.

2.4

Operator	Beschreibung
Bestimmen, Ermitteln	Zusammenhänge bzw. Lösungswege finden und die Ergebnisse formulieren.

Erläuterungen: Die Wahl der Mittel (z.B. ob graphisch oder numerisch) bleibt offen. Durch Spezifizierung wie „Ermitteln Sie graphisch“ oder „Bestimmen Sie rechnerisch“ würde die Verwendung der Werkzeugebene des GTR bzw. CAS beschränkt.

Beim graphischen ermitteln von Lösungen kann dies durch Anfertigung einer Zeichnung auf Papier oder durch Darlegung der Lösungsschritte beim graphischen Lösen mit GTR bzw. CAS erfolgen.

Beispiel: Gehen Sie davon aus, dass gilt: $a = \frac{1}{225}c - \frac{23}{450}$ und $b = -30a$

Ermitteln Sie den Bereich, in dem der Parameter c liegen muss, damit K eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion ist … . (Abitur 2017 LK CAS, Analysis 2.1.3)

Erwartungshorizont

Mit $b^2 \leq 3 \cdot a \cdot c$ ist folgende Ungleichung zu lösen: $(\frac{23}{15} - \frac{2}{15}c)^2 \leq 3(\frac{1}{225}c - \frac{23}{450}) \cdot c$

Lösung mit CAS: $11{,}5 \leq c \leq 46$

(Die Erläuterungen zu den Operatoren sind der Rückkopplungsveranstaltung zum Zentralabitur 2017 entnommen, Qualitäts-und Unterstützungs-Agentur-Landesinstitut für Schule NRW)

I Hilfsmittelfreier Teil der zentralen Abiturprüfung

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung – Analysis

Dieser Teil der Abiturprüfung enthält 4 Aufgaben entsprechend den Abiturvorgaben, davon mindestens zwei mit Anwendungsbezug.

Analysis **Lösungen Seite 21**

Punkte

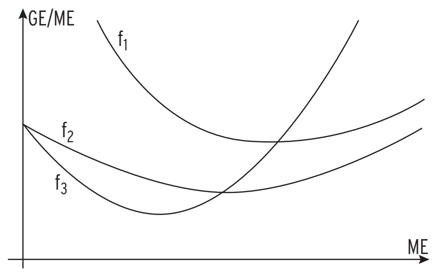
Aufgabe 1

Zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, c, d > 0, b < 0$,

x in ME, $K(x)$ in GE,

sind in der nebenstehenden Abbildung die Graphen der Grenzkostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion dargestellt.

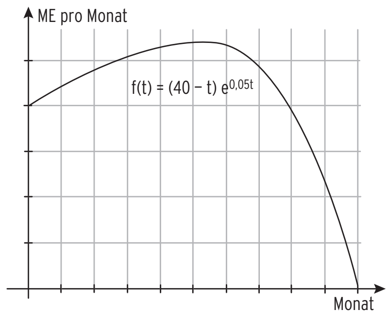


1.1 Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen die entsprechende ökonomische Funktion begründet zu. 3

1.2 Beweisen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge bei $x = -\frac{b}{2a}$ liegt. 3

Aufgabe 2

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit $f(t) = (40 - t)e^{0,05t}$, (t in Monaten, $f(t)$ in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann. 2

2.2 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei $t = 20$ liegt. 4

($f''(t) = -\frac{1}{400}\, t\, e^{0,05t}$ kann verwendet werden.)

Analysis

Aufgabe 3

Lösungen Seite 22

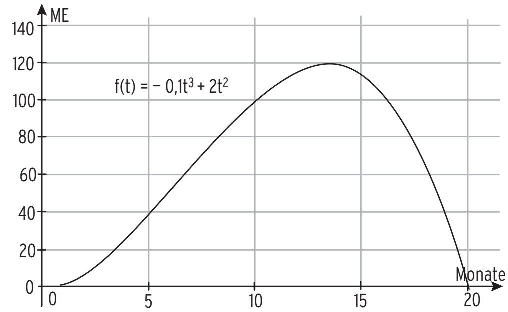
Punkte

Die monatlichen Absatzzahlen eines neuartigen Produkts werden mit

$f(t) = -\frac{1}{10}t^3 + 2t^2$

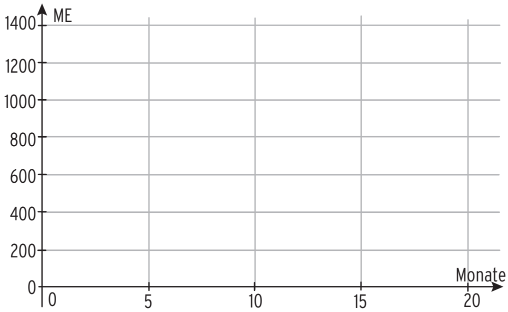
(t in Monaten, $f(t)$ in ME/Monat)

modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



3.1 Bestimmen Sie die in den ersten 20 Monaten insgesamt abgesetzte Menge. 3 Punkte

3.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem den Graphen der Funktion, die den Gesamtabsatz in Abhängigkeit von der Zeit angibt. 3

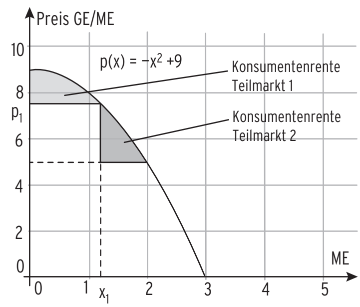


Aufgabe 4

Die Preisentwicklung eines Produkts entspricht der Nachfragefunktion p mit

$p(x) = -x^2 + 9$; x in ME, p(x) in GE/ME.

Das Produkt wird auf dem Teilmarkt 1 für p_1 GE/ME und auf dem Teilmarkt 2 für 5 GE/ME verkauft. Es werden insgesamt 2 ME abgesetzt (vgl. nebenstehende Abbildung).



4.1 Beschreiben Sie den Einfluss der Höhe des Preises p_1 auf die Konsumentenrente des jeweiligen Teilmarkts. 2

4.2 Weisen Sie nach, dass die gesamte Konsumentenrente optimal abgeschöpft wird, wenn $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ (ME) ist. 4

Lineare Algebra

Aufgabe 15 **Lösungen Seite 42/43**

Gegeben ist die Matrix $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, die Matrix A besitzt eine Inverse.

b) Bestätigen Sie, dass $B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ die Inverse der Matrix A ist.

Aufgabe 16

Eine Firma stellt aus drei unterschiedlichen Rohstoffen vier Zwischenprodukte her. Aus den Zwischenprodukten entstehen in einer zweiten Produktionsstufe die Endprodukte E_1 und E_2.

Die Materialkosten für E_1 und E_2 betragen $(42{,}4 \quad 72{,}2)$, die Kosten für die Fertigung von je einer ME der Zwischenprodukte und der Endprodukte sind durch folgende Vektoren gegeben: $\vec{k}_Z = (1 \quad 0{,}5 \quad 1 \quad 0{,}6)$; $\vec{k}_E = (6 \quad 8)$.

Für die Zwischenprodukt-Endproduktmatrix B gilt $B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & 10\end{pmatrix}$.

Die Endprodukte sollen zu einem Preis am Markt angeboten werden, der mindestens 25% über den variablen Herstellkosten liegt.

Bestimmen Sie die Preisuntergrenze für E_1 und E_2.

Aufgabe 17

1 Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$2x_3 = 2 \wedge x_1 + x_2 + x_3 = 2 \wedge x_2 - x_3 = 2$

2 Gegeben sind die Gleichungssysteme A und B:

A
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 12\\ -x_1 + x_2 &= -8\\ x_2 + x_3 &= 2\end{aligned}$$

B
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 12\\ -x_1 + x_2 &= -8\\ x_2 + x_3 &= 4\end{aligned}$$

Entscheiden Sie, welches der Gleichungssysteme A und B nicht lösbar ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lineare Algebra

Aufgabe 18 **Lösungen Seite 43**

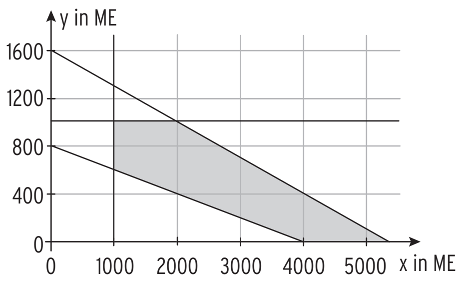
Die Fertigung der Spielzeuge E1, E2 und E3 erfolgt in drei Abteilungen.
Pro Tag kann in den drei Abteilungen jeweils 8 Stunden gearbeitet werden.
Die für die Herstellung der drei Spielzeuge benötigten Zeiten in Minuten sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

	Zeit in Minuten je Spielzeug E1	Zeit in Minuten je Spielzeug E2	Zeit in Minuten je Spielzeug E3
Abteilung 1	5	5	1
Abteilung 2	3	6	2
Abteilung 3	6	3	3

Beim Verkauf werden pro Stück 4 € bei Spielzeug E1, 3 € bei Spielzeug E2 und 2 € bei Spielzeug E3 Gewinn erzielt.
Bestimmen Sie die Restriktionen und die Zielfunktionsgleichung.

Aufgabe 19

Gegeben ist die grafische Lösung eines Ungleichungssystems:



Geben Sie ein passendes Ungleichungssystem an.

Bestimmen Sie für das abgebildete Planungsvieleck eine Zielfunktion so, dass es genau eine optimale Lösung gibt, die ein Maximum liefert und

Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Lineare Algebra | **Lösungen Seite 44** | **Punkte**

Aufgabe 20

1 Gegeben ist das eindeutig lösbare Gleichungssystem LGS 1: $3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10$

$$6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6$$
$$4x_2 - 8x_3 = 12.$$

1.1 Berechnen Sie den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ von LGS 1.

1.2 Begründen Sie, warum alle Lösungen des gegebenen Gleichungssystems LGS1 auch Lösungen des nachfolgenden Gleichungssystems LGS2 sind.

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10 \quad \wedge \quad 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6 \quad \wedge \quad 12x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 12.$$

Aufgabe 21

3 Eine Firma produziert in einem ersten Schritt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2. Daraus werden in einem zweiten Schritt die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt. Den folgenden Tabellen ist zu entnehmen, wie viele Mengeneinheiten (ME) im jeweiligen Schritt zur Herstellung von jeweils einer ME der Zwischenprodukte bzw. Endprodukte verarbeitet werden:

	Z_1	Z_2
R_1	2	6
R_2	4	4
R_3	6	2

	E_1	E_2	E_3
Z_1	5	2	8
Z_2	5	8	2

3.1 Ermitteln Sie, wie viele ME von R_3 insgesamt benötigt werden, um jeweils eine ME von E_1, E_2 und E_3 herzustellen. 3

3.2 Aufgrund von Lieferschwierigkeiten kann die Firma für R_3 nur noch auf einen Lagerbestand von 54 ME zurückgreifen. Berechnen Sie, wie viele ME von Zwischenprodukten noch produziert werden können, wenn die Anzahl der ME von Z_2 um 50% größer sein soll als die Anzahl der ME von Z_1. 3

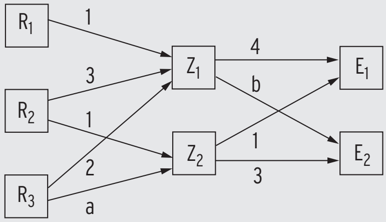
Lösungen - Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung – Lineare Algebra

Hilfsmittelfreier Teil der Zentralen Abiturprüfung

Lineare Algebra

(Aufgaben Seite 31)

Aufgabe 1



1.1 Verflechtungsdiagramm

1.2 Aus der Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 13 & 3b+3 \\ 8+a & 2b+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ c & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

folgt z. B.: $8 + a = 12 \Rightarrow a = 4$ $\quad 3b + 3 = 9 \quad \Rightarrow b = 2$

Einsetzen in $2b + 3a = 16$ ergibt eine wahre Aussage

Fehlende Werte: $a = 4$, $b = 2$, $c = 13$.

Aufgabe 2

2.1 Ungleichungen, die zum Lösungspolygon passen.

g_1: $y = -\frac{12}{4}x + 12$ $\qquad 3x + y \leq 12$

g_2: $y = -\frac{10}{5}x + 10$ $\qquad 2x + y \leq 10$

g_3: $y = 8$ $\qquad y \leq 8$

2.2 Zielfunktion, so dass es genau eine maximale Lösung in A gibt.

Die Gerade der Zielfunktion muss zwischen g_1 und g_2 verlaufen, also $-3 < m < 2$.

Mögliche Zielfunktion: $\quad y = -2{,}5x + b$

Berechnung von b durch Punktprobe mit A(2 | 6): $\quad 6 = -2{,}5 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 11$

Maximaler Gewinn: $\quad y = -2{,}5x + \frac{G}{100}$

$\frac{G}{100} = 11 \Rightarrow G = 1100 \qquad G_{max} = 1100$ GE

Aufgabe 3

a) Bedingung I: $\vec{v} \cdot M = \vec{v}$ $\qquad (100 \;\; 70 \;\; 30) \begin{pmatrix} 0{,}7 & a & b \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix} = (100 \;\; 70 \;\; 30)$

ergibt $\qquad 100a + 50 = 70 \Rightarrow a = 0{,}2$

und $\qquad 100b + 20 = 30 \Rightarrow b = 0{,}1$

Bedingung II:

Einsetzen von a und b: $N = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ N ist stochastisch

(alle Elemente nichtnegative reelle Zahlen und die Zeilensummen jeweils gleich 1)

b) Einsetzen von $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ in $\vec{z} \cdot L$ ergibt: $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot L = \vec{x} \cdot L + \vec{y} \cdot L = \vec{x} + \vec{y} = \vec{z}$

Lösungen Lineare Algebra

Aufgabe 4 (Aufgaben Seite 32)

3.1 $C_{RE} = A_{RZ} \cdot B_{ZE} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$

3.2 Rohstoffkosten für 1 ME von E_1: $(2 \quad 5 \quad 3) \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} = 103$

Die Behauptung stimmt, da die Rohstoffkosten für 1 ME von E_1 103 GE betragen, also für 10 ME 1030 GE $>$ 1000 GE.

Aufgabe 5

4.1 $M_{BE} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ LGS: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 70 \\ 2 & 2 & 0 & 60 \\ 1 & 2 & 2 & 60 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 70 \\ 0 & 2 & 6 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$ mit Lösungsvektor $\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

Es können 20 ME von E1 und jeweils 10 ME von E2 und E3 produziert werden.

4.2 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 70 \\ 0 & 2 & 6 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$ Dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösung, der vorliegende Lagerbestand kann also nicht vollständig zu Endprodukten verarbeitet werden.

Aufgabe 6

6.1 Anzahl der Spalten von A (2) = Anzahl der Zeilen von B (3)

6.2 Zu A inverse Matrix A^{-1}:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2{,}5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2{,}5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

6.3 3×2-Matrix C: $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7 (Aufgaben Seite 33)

1.1 $C_{RE} = A_{RZ} \cdot B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

1.2 Bei Kostendeckung sind Erlös und Kosten gleich: $(x \quad 2x) \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} = 4800$

$800x = 4800 \quad \Leftrightarrow x = 6$

Der Verkaufspreis für E1 muss mindestens 6 GE und für E2 mindestens 12 GE betragen.

Aufgabe 8

Lösung des Gleichungssystems mit dem Gaußverfahren: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4300 \\ 0 & 4 & 3 & 4250 \\ 1 & 1{,}5 & 1 & 4950 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4300 \\ 0 & 4 & 3 & 4250 \\ 0 & 0 & 0 & 5600 \end{array}\right)$

Das LGS enthält einen Widerspruch (3. Zeile); L = $\varnothing$

Ersetzt man 1,5 durch 5 so ergibt die Addition von Zeile 1 und Zeile 3: $0 \quad 7 \quad 0 \mid 5600$

mit $x_2 = 800$. Durch Rückwärtseinsetzen ergibt sich: $x_1 = 600$ und $x_3 = 350$

II Teil II der zentralen Abiturprüfung mit Hilfsmittel (GTR)

1 Analysis

Mathematische Formeln Wirtschaft und Verwaltung

Kostenfunktionen x: Ausbringungsmenge in ME y: Gesamtkosten in GE	Gesamtkostenfunktion K mit	$K(x) = K_v(x) + K_f$
	Ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit	K(x) = ax3 + bx2 + cx + d
	K wächst degressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) < 0$
	K wächst progressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) > 0$
	Funktion der variablen Gesamtkosten	$K_v(x)$
	Funktion der gesamten Stückkosten k (Funktion der Durchschnittskosten)	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
	Funktion der variablen Stückkosten k_v	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
	Grenzkostenfunktion	$K'(x)$ Kostenzuwachs
	Grenzstückkostenfunktion	$k'(x)$
	Betriebsoptimum (Minimalstelle von k(x))	x_{BO}
	Langfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BO})$
	Betriebsminimum (Minimalstelle von $k_v(x)$)	x_{BM}
	kurzfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BM})$
	Nachfragefunktion (Preis-Absatz-Funktion)	$p_N(x)$
	Angebotsfunktion	$p_A(x)$
	Gleichgewichtsmenge	x_G; Schnittstelle von $p_N(x)$ und $p_A(x)$
	Gleichgewichtspreis	$p_G = p_N(x_G) = p_A(x_G)$
	Marktgleichgewicht MG	$MG\ (x_G \mid p_G)$
	Konsumentenrente Differenz zwischen den theoretisch möglichen und den tatsächlichen Ausgaben für ein Produkt.	$\int_0^{x_G} (p_N(x) - p_G)dx$
	Produzentenrente Differenz aus erzieltem Umsatz und mindestens erwartetem Umsatz.	$\int_0^{x_G} (p_G - p_A(x))dx$
	Erlösfunktion	$E(x) = p \cdot x$; p Preis pro ME $E(x) = p_N(x) \cdot x$; $p_N(x)$ Preis abhängig von x
	Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
	Grenzgewinnfunktion	$G'(x)$
	Gewinnschwelle	x_{GS} 1. positive Nullstelle von G
	Gewinngrenze	x_{GG} 2. positive Nullstelle von G
	gewinnmaximale Ausbringungsmenge Maximalstelle von G(x): G′(x) = 0	x_{max}
	Cournot'scher Punkt	$C(x_{max} \mid p_N(x_{max}))$
	Stückdeckungsbeitrag d = dB	$dB(x) = p(x) - k_v(x)$
	Deckungsbeitrag D = DB	$DB(x) = G(x) + K_{fix} = E(x) - K_v(x)$

Formelsammlung Analysis

Bezeichnungen:

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Menge der reellen Zahlen ohne Null

$\mathbb{R}_+^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$ Menge der positiven reellen Zahlen

$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$ Menge der positiven reellen Zahlen mit Null

Ableitungsregeln

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x)$

Kurzform: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Kurzform: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Kettenregel: $f(x) = g(u(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$

für Exponentialfunktion $f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = (e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$

Integrationsregeln:

Integration durch Substitution

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c;\ a \neq 0$$

Produktintegration (partielle Integration)

$$\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$$

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung Analysis

Aufgabe 1 **Lösung Seite 76** **Punkte**

Der Pharmakonzern Harma AG stellt schmerzlindernde Präparate als klassische Tablette, Brausetablette, Granulat oder Kautablette her. Diese werden in drei Produktionsabteilungen gefertigt. Regelmäßig führt die Marketingabteilung der Harma AG verschiedenartige Marktanalysen durch.

1.1 Die Analyse für das Produkt Niap free ergibt, dass sich die Angebotspreise auf dem Markt durch die Funktion p_A darstellen lassen und die Nachfragesituation durch p_N beschrieben werden kann.

$p_A(x) = 0{,}1(x + 2)^2 + 5$; $p_N(x) = 12 - a \cdot x^2$; $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$, $a > 0$.

Dabei gibt x die angebotenen bzw. die nachgefragten Mengen in ME an und $p_A(x)$ bzw. $p_N(x)$ geben die Preise in GE pro ME an. Bei dem Parameter a handelt es sich um einen konjunkturabhängigen Parameter.

1.1.1 Geben Sie die Sättigungsmenge in Abhängigkeit vom Parameter a an. 4

1.1.2 Berechnen Sie den Wert des Parameters a, für den die Gleichgewichtsmenge bei 4,4 ME liegt. 5

1.1.3 Die Marketingabteilung behauptet: „Wenn a = 0,15 ist und die Gleichgewichtsmenge bei 4,4 ME liegt, dann ist das Verhältnis zwischen der Konsumentenrente und der Produzentenrente ausgeglichen, also 1 : 1." Beurteilen Sie diese Aussage unter Verwendung entsprechender Stammfunktionen. 8

1.1.4 Die Preise für das Standardschmerzmittel Niap free sind innerhalb der europäischen Gemeinschaft sehr unterschiedlich. Aus diesem Grund will die EU für dieses Präparat einen einheitlichen Preis festlegen. Zurzeit liegt der Gleichgewichtspreis über dem zukünftig festgesetzten Preis.
Interpretieren Sie, wie sich dies auf die Produzentenrente auswirkt. 4

1.2 Neben diesem Standardschmerzmittel Niap free werden ständig neue rezeptfreie schmerzlindernde Präparate in verschiedenen Varianten entwickelt. Für den Produktlebenszyklus des neu entwickelten Schmerzmittels Niap vita geht die Marketingabteilung von der Funktion f_b aus. Diese beschreibt den Umsatz in GE pro Jahr in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren.

$f_b(t) = 0{,}5 \cdot b \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot b \cdot t - 0{,}2}$; $b, t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq 0$, $b > 0$.

Der Parameter b spiegelt die Stärke des Konkurrenzdrucks wider.
Berechnen Sie für b = 0,5 zu welchem Zeitpunkt der Umsatzanstieg für das Produkt *Niap Vita* am größten ist. Auf die hinreichende Bedingung kann durch schlüssige Argumentation verzichtet werden. 7

(Teile aus Abitur 2014, Berufskolleg NRW)

Aufgabe 2 **Lösung Seite 77/78**

Mobiltec führt eine umfangreiche Marktanalyse für den Absatz von Handys mit Navigationssystem durch. Die Ergebnisse stehen der Marketingabteilung zur Verfügung.

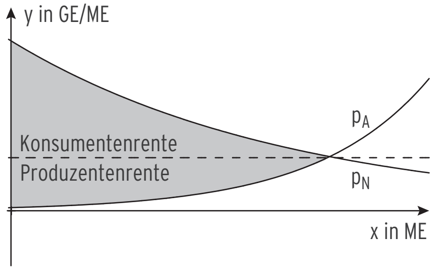
3.1 Angebot und Nachfrage nach den Handys mit Navigationssystem werden demnach durch die Angebotsfunktion p_A und die Nachfragefunktion p_N mit

$p_A(x) = e^{0,5x-3}$ und $p_N(x) = e^{-0,2x+4}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $0 \leq x \leq 15$

beschrieben. Dabei gibt x die angebotene bzw. nachgefragte Menge in ME und p_A bzw. p_N den jeweiligen Preis in GE/ME an.

3.1.1 Berechnen Sie die Menge und den Preis im Marktgleichgewicht.

3.1.2 Ermitteln Sie die Produzentenrente und die Konsumentenrente unter der Voraussetzung, dass die Gleichgewichtsmenge bei 10 ME liegt.



3.2 Mobiltec plant im Frühjahr die Einführung eines neuen Handys, welches mit einer weltweiten Navigationsfunktion ausgestattet werden soll. Die Unternehmensleitung rechnet bei der Einführung des Handys mit einer Absatzentwicklung, die sich durch die folgende Funktion A näherungsweise beschreiben lässt:

$A(t) = 20e^{-0,01t^2+0,12t}$, $t \in \mathbb{R}$; $t > 0$

Dabei gibt t die Zeit in Monaten nach der Einführung an, A(t) die Absatzzahlen in Tausend Stück pro Monat.

3.2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt t, in dem der maximale monatliche Absatz erreicht wird.

3.2.2 Berechnen Sie den maximalen monatlichen Absatz.

3.3 Für Handytyp 2 legt das Controlling folgende Absatzfunktion zugrunde:

$B(t) = \frac{1}{10}(t+5)\,e^{-0,1t+5}$. Dabei gibt t die Zeit in Monaten nach der Einführung und B(t) die Absatzzahlen in Tausend Stück pro Monat an.

3.3.1 Zeigen Sie, dass der Gesamtabsatz der ersten z Monate nach der Markteinführung durch folgende Gleichung dargestellt werden kann:

$\int_0^z B(t)dt = e^{-0,1z+5}(-z-15) + 15e^5$ mit $z \in \mathbb{R}$ und $z \geq 0$

3.3.2 Berechnen Sie den Gesamtabsatz der ersten 20 Monate nach der Markteinführung.

3.3.3 Beurteilen Sie die durch B(t) prognostizierte Entwicklung des Gesamtabsatzes über eine sehr lange Zeit.

(Teile aus Berufskolleg 2011, NRW.)

Lösungen - Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung Analysis

Analysis

Lösung Aufgabe 1 (Aufgabe Seite 61)

p_A: $p_A(x) = 0{,}1(x + 2)^2 + 5$; p_N: $p_N(x) = 12 - a \cdot x^2$; $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$, $a > 0$.

1.1.1 Sättigungsmenge in Abhängigkeit von a

Für $a > 0$ gilt: $p_N(x) = 0$ $\quad 12 - a \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{12}{a}}$

Somit ergibt sich als Sättigungsmenge $x = \sqrt{\frac{12}{a}}$ $\quad (-\sqrt{\frac{12}{a}} \notin D(p_N))$

1.1.2 a, so dass die **Gleichgewichtsmenge bei 4,4 ME**

Es gilt: $p_A(4{,}4) = p_N(4{,}4)$

Eingesetzt: $0{,}1(4{,}4 + 2)^2 + 5 = 12 - a \cdot 4{,}4^2 \Leftrightarrow \frac{1137}{125} = 12 - \frac{484}{25}a \Leftrightarrow a = \frac{3}{20} = 0{,}15$

1.1.3 **Beurteilung** der Behauptung:

Gleichgewichtspreis: $p_N(4{,}4) \approx 9{,}10$

Konsumentenrente: $\int_0^{4,4} ((12 - 0{,}15x^2) - 9{,}1)\,dx = \int_0^{4,4} (2{,}9 - 0{,}15x^2)\,dx$

$= \left[2{,}9x - 0{,}05x^3\right]_0^{4,4} = \frac{5313}{625} \approx 8{,}50$

Produzentenrente: $\int_0^{4,4} (9{,}1 - [0{,}1(x + 2)^2 + 5])dx = \int_0^{4,4} (-0{,}1x^2 - 0{,}4x + 3{,}7)dx$

$= \left[-\frac{1}{30}x^3 - 0{,}2x^2 + 3{,}7x\right]_0^{4,4} \approx 9{,}57$

Das Verhältnis ist nicht 1:1. Die Behauptung ist widerlegt.

1.1.4 Der Markteingriff setzt das Marktgleichgewicht außer Kraft. Da der vorgegebene Preis unter dem Gleichgewichtspreis liegt, werden weniger Produkte zu einem geringeren Preis abgesetzt. Somit wird die Produzentenrente kleiner.

1.2 Umsatz in GE pro Jahr für b = 0,5: $f_{0,5}(t) = 0{,}25 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}125 \cdot t - 0{,}2}$; $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$

Umsatzanstieg am größten

$f_{0,5}'(t) = e^{-0{,}125t - 0{,}2}(0{,}25t^2(-0{,}125) + 0{,}5t) = e^{-0{,}125 \cdot t - 0{,}2}(-\frac{1}{32}t^2 + 0{,}5\,t)$

Hinweis: $f_{0,5}''(t)\ (t) = e^{-0{,}125t - 0{,}2}\left(\frac{1}{256} \cdot t^2 - \frac{1}{8} \cdot t + \frac{1}{2}\right)$ ist nicht verlangt

Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f_{0,5}''(t) = 0$

Lösungen von $f_{0,5}''(t) = 0$: $\quad t_1 \approx 27{,}31$; $t_2 \approx 4{,}69$

Hinweis: Mit GTR nach Eingabe von $f_{0,5}'(t)$ graphisch lösen; GTR bildet die Ableitung auch durch Lösung von $f_{0,5}''(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{256} \cdot t^2 - \frac{1}{8} \cdot t + \frac{1}{2} = 0$

Da die Funktion erst steigt und dann wieder fällt, muss bei t_2 der Zeitpunkt des maximalen Umsatzanstiegs vorliegen.

Analysis

Lösung Aufgabe 2 **Seite 1/2** (Aufgabe Seite 62)

$p_A(x) = e^{0,5x-3}$; $p_N(x) = e^{-0,2x+4}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $0 \leq x \leq 15$

3.1.1 **Gleichgewichtsmenge**

Gleichsetzen: $p_A(x) = p_N(x)$ $e^{0,5x-3} = e^{-0,2x+4}$

Vergleich der Hochzahlen: $0,5x - 3 = -0,2x + 4 \Leftrightarrow x = 10$

Gleichgewichtspreis: $p_N(10) = e^2$

Marktgleichgewicht $M_G\,(10 \mid e^2)$ (nicht verlangt)

3.1.2 Gleichgewichtsmenge bei 10 ME:

Gleichgewichtspreis: $p_N(10) = e^2$

Produzentenrente: $P_R = 10 \cdot e^2 - \int_0^{10} p_A(x)dx \approx 59,21$

(Stammfunktion $F_A(x) = 2e^{0,5x-3}$)

oder: $P_R = \int_0^{10} (e^2 - p_A(x))dx \approx 59,21$

Konsumentenrente: $K_R = \int_0^{10} p_N(x)dx - 10 \cdot e^2 \approx 162,15$

(Stammfunktion $F_N(x) = -5e^{-0,2x+4}$)

oder: $K_R = \int_0^{10} (p_N(x) - e^2)\,dx \approx 162,15$

Die Produzentenrente beträgt 59,21 GE und die Konsumentenrente beträgt 162,15 GE.

3.2 $A(t) = 20e^{-0,01t^2+0,12t}$

3.2.1 **Ableitungen** mit der Kettenregel

$A'(t) = 20e^{-0,01t^2+0,12t}(-0,02t + 0,12)$

Hinreichende Bedingung für den Zeitpunkt t mit maximalem Absatz:

$A'(t) = 0 \wedge$ VZW von $A'(t)$ von + nach −

Aus $A'(t) = 0$ folgt mit $e^{-0,01t^2+0,12t}$ stets größer Null: $-0,02t + 0,12 = 0 \Leftrightarrow t = 6$

$A'(t)$ wechselt das VZ wie $y = -0,02t + 0,12$; also von + nach −

An der Stelle $t = 6$ liegt damit eine lokale Maximumstelle vor.

Die Markteinführung muss 6 Monate vorher vorgenommen werden.

Hinweis: Nachweis auch mit $A'(t) = 0 \wedge A''(t) < 0$

$A''(t)$ mit Kettenregel und Produktregel:

$A''(t) = 20e^{-0,01t^2+0,12t}\left[(-0,02t + 0,12)^2 - 0,02\right]$

3.2.2 Maximaler Absatz: $A(6) = 20e^{0,36} \approx 28,666$

Der **Hochpunkt** hat die Koordinaten $H(6 \mid 28,666)$.

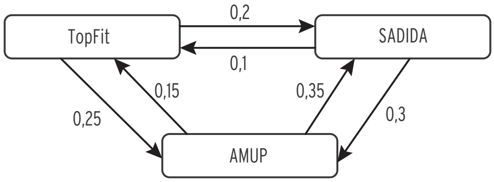
Der maximale Absatz würde damit 28666 Stück betragen.

Aufgabe 12 Lösung Seite 129

Nach den Modernisierungsmaßnahmen sollen neue Werbekampagnen geschaltet werden, dafür wurde eine Marktforschung durchgeführt.

Diese hat ergeben, dass der aktuelle Marktanteil von TopFit bei 20 % liegt, SADIDA und AMUP teilen sich hälftig den verbleibenden Marktanteil im Segment Sportbekleidung.

Die folgende Graphik veranschaulicht die Kundenwanderung:



- Wenn der Marktanteil in der nächsten Periode t = 1 voraussichtlich auf mehr als 22 % steigt, dann soll nur Werbung in Zeitschriften geschaltet werden.
- Wenn der Marktanteil in der übernächsten Periode t = 2 voraussichtlich unter 23 % liegt, dann soll ein Kino-Spot in der Periode geschaltet werden.
- Wenn der Marktanteil langfristig voraussichtlich unter 25 % bleibt, dann sollen Modenschauen in Shopping-Center mithilfe von Sportvereinen organisiert werden.
- Wenn die Steigerung des Marktanteils von der Vorperiode bis zur nächsten Periode konstant bleibt, dann soll die Werbeagentur nicht gewechselt werden.

Untersuchen Sie, welche Werbemaßnahmen umgesetzt werden sollten, und ob die Werbeagentur weitere Aufträge erhält. 10 Punkte

(Abitur Niedersachsen)

Aufgabe 13 Lösung Seite 130

In einer Kleinstadt wird ein Neubaugebiet für 500 Wohneinheiten erschlossen.

Ein Neubaugebiet erhält bei der Erschließung Rohrleitungen für Strom, Gas und Wasser sowie Glasfaserkabel für TV, Telefon und Internet. Der einzige ortsansässige Anbieter Digitalia für TV, Telefon und Internet benötigt eine Prognose, wie viele Wohneinheiten sich beim Einzug für einen Anschluss der Konkurrenz entscheiden werden und wie die langfristige Prognose der Marktanteile in diesem Baugebiet ausfallen wird.

Aus einem vergleichbaren Neubaugebiet ist bekannt, dass zu Beginn 35 % der Wohneinheiten von dem ortsansässigen Unternehmen versorgt werden, 50 % von deutschlandweiten Anbietern und alle anderen von Anbietern aus Niedersachsen.

Das Wechselverhalten verhält sich erfahrungsgemäß wie folgt:

nach / von	ortsansässiger Anbieter	deutschlandweiter Anbieter	Anbieter aus Niedersachsen
ortsansässiger Anbieter	85 %	10 %	5 %
deutschlandweiter Anbieter	30 %	55 %	15 %
Anbieter aus Niedersachsen	30 %	10 %	60 %

Untersuchen Sie für Digitalia, wie groß ihr Marktanteil zu Beginn, nach einem und nach zwei Jahren sowie langfristig sein wird. 12 Punkte

(Abitur Niedersachsen)

Aufgabe 14 **Lösung Seite 131**

Punkte

Das Unternehmen SolisE stellt auf ihren Maschinen M1, M2 und M3 unter anderem zwei verschiedene Arten von Solarmodulen her: Soleco1 und Soleco2.
Die folgende Tabelle zeigt je Maschine die Bearbeitungszeit der Solarmodule und die maximal zur Verfügung stehende Maschinenlaufzeit in einem Produktionszeitraum.

Maschine	Bearbeitungszeit in Minuten je ME		Zur Verfügung stehende Maschinenlaufzeit in Minuten
	Soleco1	Soleco2	
M1	1	3	120
M2	2	4	180
M3	3	1	240

Für Soleco1 beträgt der Stückdeckungsbeitrag 24 GE/ME und für Soleco2 16 GE/ME.

1 SolisE untersucht den Deckungsbeitrag in Abhängigkeit von den Produktionszahlen.

1.1 Zeichnen Sie zu den gegebenen Bedingungen den zulässigen Produktionsbereich für die Produktionsmengen von Soleco1 und Soleco2 in ein Koordinatensystem. 10

1.2 Ermitteln Sie mit Hilfe Ihrer Zeichnung den maximalen Deckungsbeitrag sowie die dazugehörige Mengenkombination der beiden Solarmodule. 6

1.3 Damit die Präsenz am Markt sichergestellt ist, sollen mindestens10 ME von Soleco2 produziert und verkauft werden.
Untersuchen Sie, welche Auswirkungen dies auf den Deckungsbeitrag hat. 6

Aufgabe 15 **Lösung Seite 132**

Punkte

Das Unternehmen BEL FRUTI verarbeitet u. a. Papayas und Ananas und füllt sie in Konservendosen ab. Um entsprechende Rabatte zu erhalten, müssen mindestens 50 Mengeneinheiten (ME) Ananas pro Tag geordert werden. Die Früchte werden zunächst auf der Maschine M_1 gewaschen und geschält. Die Maschine muss regelmäßig gereinigt werden, so dass sie nur 19 Stunden pro Tag eingesetzt werden kann. Die Früchte werden anschließend auf einer zweiten Maschine M_2 portioniert und danach auf der Maschine M_3 in Dosen verfüllt.

1 Die Produktionsleitung soll die Verarbeitungsmengen von Papayas und Ananas bestimmen, die zu einem maximalen Deckungsbeitrag in GE führen. Alle zur Lösung erforderlichen Informationen sind den nachfolgenden Tabellen zu entnehmen:

	Papaya Minuten/ME	Ananas Minuten/ME	Maximale Auslastung Minuten/Tag
M_1	2	3	1140
M_2	1,5	3	900
M_3	1	1	450

	Papaya	Ananas
Mindestbestellmenge in ME	0	50
Stückdeckungsbeiträge in GE/ME	0,6	1

1.1 Zeigen Sie, dass zur Lösung des Optimierungsproblems die nachfolgenden Bedingungen gelten (x_1 = ME Papayas und x_2 = ME Ananas): 6

$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_2 \leq 50$$
$$x_2 \leq -\frac{2}{3}x_1 + 380$$
$$x_2 \leq -0{,}5x_1 + 300$$
$$x_2 \leq -x_1 + 450$$

1.2 Zeichnen Sie mit den vorgegebenen Angaben aus 1.1 den zur graphischen Lösung des Optimierungsproblems erforderlichen Planungsbereich. 6

1.3 Bestimmen Sie die jeweilige Verarbeitungsmenge für Papayas und Ananas, um den Deckungsbeitrag zu maximieren. 5

1.4 Berechnen Sie den maximalen Deckungsbeitrag sowie die Auslastungszeiten der Maschinen. 6

1.5 Begründen Sie, dass es keine Mengenkombination gibt, bei der die maximal mögliche Laufzeit der Maschine M_1 voll ausgenutzt wird, ohne die anderen Restriktionen zu verletzen. 5

(Abitur Berufskolleg NRW 2012)

Lösungen Aufgabe 14 (Aufgabe Seite 112)

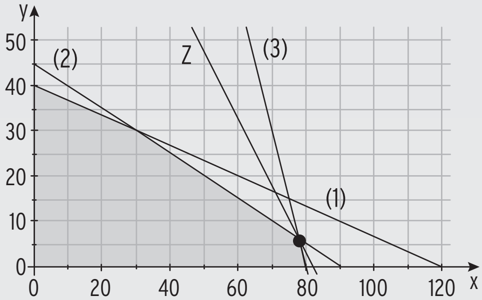
1.1 x: Anzahl von Soleco1 in ME; y: Anzahl von Soleco2 in ME

Restriktionen: $x \geq 0$; $y \geq 0$

$x + 3y \leq 120$	$\Leftrightarrow y \leq 40 - \frac{1}{3}x$	(1)
$2x + 4y \leq 180$	$\Leftrightarrow y \leq 45 - \frac{1}{2}x$	(2)
$3x + y \leq 240$	$\Leftrightarrow y \leq 240 - 3x$	(3)

Daraus ergeben sich die eingezeichneten Randfunktionen und der zulässige Produktionsbereich.

Planungsvieleck



1.2 Maximaler Deckungsbeitrag und die dazugehörige Mengenkombination

Zielfunktion: $Z = 24x + 16y \Leftrightarrow y = -1{,}5x + \frac{Z}{16}$

Mit Hilfe der Verschiebung der Zielfunktion ergibt sich die optimale Mengenkombination im Punkt P(78 | 6) .

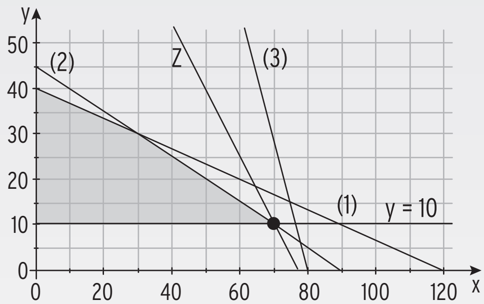
Berechnung von P durch Gleichsetzen: $240 - 3x = 45 - \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = 78$

Der maximale Deckungsbeitrag ergibt sich durch Einsetzen: $Z = 24 \cdot 78 + 16 \cdot 6 = 1968$

Der maximale Deckungsbeitrag liegt bei 1 968 GE bei einer Produktion von 78 ME Soleco1 und 6 ME von Soleco2.

1.3 Auswirkung auf den Deckungsbeitrag:

neue Restriktion: $y \geq 10$



Durch die neue Restriktion $y \geq 10$ liegt der bisherige Punkt mit der optimalen Mengenkombination außerhalb des zulässigen Produktionsbereichs. Daher muss eine neue Mengenkombination gesucht werden.

Der neue zulässige Produktionsbereich mit der verschobenen Zielfunktion ergibt den optimalen Deckungsbeitrag von 1 840 GE bei 70 ME von Solecoa1 und 10 ME von Soleco2. Der maximal zu erzielende Deckungsbeitrag wird somit geringer.

Lösungen Aufgabe 15 (Aufgabe Seite 113)

1.1 Gültigkeit der Bedingungen:

Nichtnegativitätsbedingung: $x_1, x_2 \geq 0$

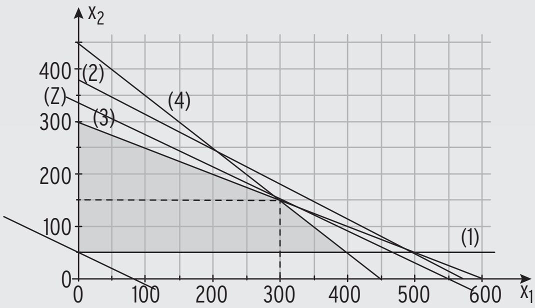
Mindestbestellmenge: $x_2 \geq 50$ (1)

Maschine 1: $2x_1 + 3x_2 \leq 1140 \Leftrightarrow x_2 \leq -\frac{2}{3}x_1 + 380$ (2)

Maschine 2: $1{,}5x_1 + 3x_2 \leq 900 \Leftrightarrow x_2 \leq -0{,}5x_1 + 300$ (3)

Maschine 3: $x_1 + x_2 \leq 450 \Leftrightarrow x_2 \leq -x_1 + 450$ (4)

1.2 Planungsvieleck mit Zielfunktionsgerade



1.3 Zielfunktion:

$0{,}6x_1 + x_2 = Z$

$\Leftrightarrow x_2 = Z - 0{,}6x_1$

Die optimalen Bestellmengen sind 300 ME Papaya und 150 ME Ananas.

1.4 Maximaler Deckungsbeitrag, Auslastungszeiten der Maschinen.

Deckungsbeitrag: $Z = 0{,}6 \cdot 300 + 150 = 330$

Maschine 1: $2 \cdot 300 + 3 \cdot 150 = 1050$

Maschine 2: $1{,}5 \cdot 300 + 3 \cdot 150 = 900$

Maschine 3: $300 + 150 = 450$

Der maximale Deckungsbeitrag beträgt 330 GE. Dann läuft Maschine 1 am Tag 1 050 min, Maschine 2 läuft 900 min und Maschine 3 läuft 450 min.

1.5 Die Restriktionsgerade (2) zur Maschine M_1 verläuft oberhalb des Planungsvielecks, welches allein durch die beiden anderen Maschinen-Restriktionen und durch die Mindestbestellmenge bestimmt wird (siehe Zeichnung). Da jede Produktionsmengenkombination mit maximaler Maschinenauslastung einem Punkt auf dieser Gerade entspricht, ist sie durch andere Restriktionen unmöglich.

3 Stochastik

Formelsammlung zur Stochastik

Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$

Für das Gegenereignis $\overline{A}$: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Additionssatz $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Multiplikationssatz $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Zufallsvariable X: $e_i \longrightarrow X(e_i) = x_i$

Erwartungswert: $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$

Varianz: $V(X) = (x_1 - (E(X))^2 \cdot P(X = x_1) + \ldots + (x_n - (E(X))^2 \cdot P(X = x_n)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Binomialverteilung B(n; p; k)

Die Zufallsgröße X ist **binomialverteilt:** $X \sim B_{n;\,p}$

Formel von Bernoulli $P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

Erwartungswert $\mu = E(X) = n \cdot p$

Varianz: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Kumulierte Binomialverteilung **F(n; p; k):**

Linksseitiges Intervall: $P(X \leq 8) = F(n; p; 8)$

Ablesen aus der Tabelle der **kumulierten Binomialverteilung**

Punktwahrscheinlichkeit: $P(X = 8) = B(n; p; 8)$

Ablesen aus der Tabelle der Binomialverteilung

Rechtsseitiges Intervall: $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$

Intervallwahrscheinlichkeit: $P(3 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 2)$

Hypothesentest (Signifikanztest):

Fehler 1. Art (α-Fehler): Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese H_0 abgelehnt wird, obwohl sie richtig ist.

Fehler 2. Art (β-Fehler): Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese H_0 nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist.

Die bei einem Test bzw. einer Untersuchung akzeptierte Wahrscheinlichkeit, bei einer

Entscheidung einen Fehler 1. Art zu begehen, nennt man auch Signifikanzniveau α.

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung Stochastik

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 149/150**

Im Bereich Thermodruck verwendet die Druckfix GmbH neben den Walzen aus eigener Herstellung auch Walzen, die regional hergestellt werden und solche, die aus Asien importiert werden. Vor dem Einbau einer Walze durchläuft diese bei Druckfix eine Qualitätsanalyse. Defekte Walzen werden als Ausschuss aussortiert.
Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die jährliche Bezugsmenge, die Ausschussquote und den Bezugspreis

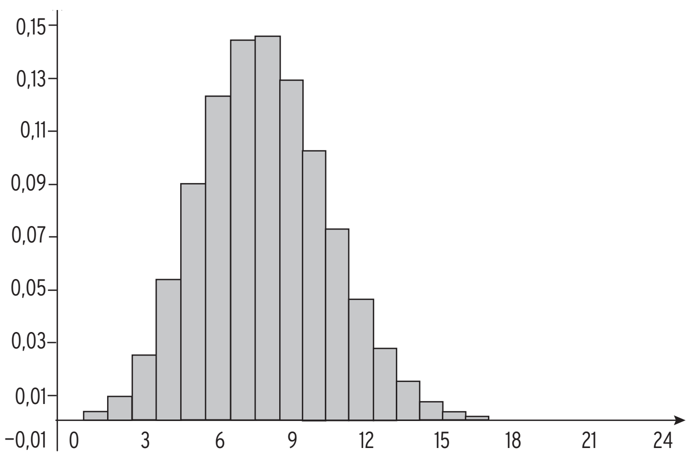
Herkunft	**Druckfix**	**Regional**	**Asien**
Bezugsmenge (Stück)	2000	3000	5000
Ausschussquote (%)	2	5	8
Bezugspreis (€/Stück)	49,98	39,37	18,69

1 Für die Preiskalkulation wird der Bezugspreis der defekten Walzen auf die intakten Walzen umgelegt.
Ermitteln Sie die jährliche Ausschussmenge, die Anzahl intakter Walzen und den durchschnittlichen Einstandspreis für eine intakte Walze.

2 Einer Lieferung aus Asien wird eine Stichprobe von 100 Walzen entnommen und hinsichtlich ihrer Qualität untersucht. Man kann davon ausgehen, dass die Verteilung der Zufallsgröße X: „Anzahl der defekten Walzen in der Stichprobe" binomialverteilt ist.

2.1 Bestimmen Sie den Erwartungswert der Verteilung und die Wahrscheinlichkeit, dass X tatsächlich den Erwartungswert annimmt.

2.2 Das folgende Histogramm zeigt die Verteilung der Zufallsgröße X.



Aufgabe 1 **Seite 2/2**

2.2 Prüfen Sie mit Hilfe des Histogramms folgende Aussagen der Qualitätsabteilung:

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 20 Walzen defekt sind, ist so gut wie Null.

B: Die Wahrscheinlichkeit, dass 9 Walzen defekt sind, ist größer als die von jeder anderen Anzahl defekter Walzen.

C: Es ist gleich wahrscheinlich 6 oder 9 defekte Walzen in der Stichprobe zu haben.

D: Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Walzen defekt sind, ist kleiner als 3%.

2.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Walzen defekt sind.

Gehen Sie im weiteren Verlauf von Lieferungen im Umfang von n = 100 und binomialverteilten Zufallsgrößen aus.

3 Es werden alle 100 Walzen einer regionalen Lieferung einer Qualitätsanalyse unterzogen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Defekt beträgt p = 0,05.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Höchstens 2 Walzen sind defekt.

B: Es gibt mindestens 3 defekte Walzen.

C: Es befinden sich mindestens 4 und höchstens 7 defekte Walzen in der Stichprobe.

D: In der Stichprobe befindet sich die erwartete Menge intakter Walzen.

E: Alle Walzen sind intakt.

4 Der asiatische Lieferant beabsichtigt seine Preise zu erhöhen und begründet dies mit einer Qualitätsverbesserung, da der Produktionsprozess neu strukturiert wurde.

Der Lieferant möchte mit einem Hypothesentest nachweisen, dass seine Ausschussquote auf unter 4 % gesunken ist.

4.1 Leiten Sie eine Entscheidungsregel über die Anzahl defekter Walzen in einer Stichprobe von 100 bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}1$ her.

4.2 Bestimmen Sie den Fehler 2. Art, wenn die tatsächliche Ausschussquote bei 2 % bzw. 3 % liegt. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis aus Sicht des Lieferanten.

(NRW Berufskolleg 2010.)

Aufgabe 2 **Lösung Seite 150/151**

Punkte

Der Küchenhersteller K-Küchen hat eine Luxus-Küche für das obere Preissegment entwickelt, die sich durch ein hochwertiges Schubladensystem, Echtholzfronten und eine patentierte Schrankbeleuchtung von den bisher produzierten Produktlinien unterscheidet. Von einem Zulieferer bezieht K-Küchen das neuartige Scharniersystem, bei dem sich die Schubladen nach nur leichter Berührung selbsttätig schließen.
Durchschnittlich sind 5 % der Scharniere defekt.

3.1 Die gelieferte Ware soll nur bei hinreichender Qualität angenommen werden. Der Küchenhersteller prüft vor der Warenannahme eine Stichprobe von 5 Kartons mit je 20 Scharnieren.

3.1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse: 6

E_1: In der Stichprobe von 100 Scharnieren befinden sich höchstens so viele defekte Scharniere, wie „zu erwarten" ist.

E_2: In einem zufällig ausgewählten Karton mit 20 Scharnieren befinden sich mehr als zwei defekte Scharniere.

3.1.2 Die Ware soll abgelehnt werden, wenn sich unter den 5 geprüften Kartons der Stichprobe mindestens ein Karton mit mehr als 3 defekten Scharnieren befindet. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Karton mehr als 3 defekte Scharniere enthalten sind, liegt bei ca. 1,59 %.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ablehnung der Lieferung. 5

3.2 Ermitteln Sie die Anzahl der mindestens zu testenden Scharniere, bei der mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens ein defektes Scharnier zu finden ist. 8

3.3 Vor der Auslieferung der Luxus-Küchen überprüft K-Küchen die Beleuchtungen. Erfahrungsgemäß funktionieren 10 % der Beleuchtungen nicht einwandfrei. Ein nachträglicher Austausch der defekten Beleuchtung kostet das Unternehmen 80 € pro Küche.
Ein Prüfgerät, das die Beleuchtungen bereits vor dem Einbau prüft, kann für 580 € erworben werden. Sein Einsatz kostet täglich 30 € und ein Austausch der als defekt eingestuften Beleuchtung kostet dann nur 20 €. Das Testgerät erkennt mit 99 %-iger Sicherheit eine defekte Beleuchtung, allerdings zeigt es auch bei 2 % der funktionierenden Beleuchtungen einen Defekt an.

3.3.1 Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm. 4

3.3.2 In 100 Tagen werden insgesamt 1000 Küchen produziert. 7
Beurteilen Sie, ob die Anschaffung des Testgeräts zu einer Kostenersparnis führt.

(Teile aus NRW Berufskolleg 2012.)

III Musteraufgabensätze zur Zentralen Abiturprüfung 2022

Der Hilfsmittelfreie Teil wurde neu erstellt.

Haupttermin 2015 bzw. Haupttermin 2016 sind im Wahlteil verwendet.

Diese Prüfungen entsprechen im Original nicht vollständig den Vorgaben für das Abitur 2022. Nur die Aufgabenteile aus den Gebieten, die in den Abiturvorgaben 2022 im Leistungskurs Mathematik, Fachbereich Wirtschaft und Verwal tung, aufgeführt sind, sind zur Vorbereitung auf das Abitur 2022 wiedergegeben.

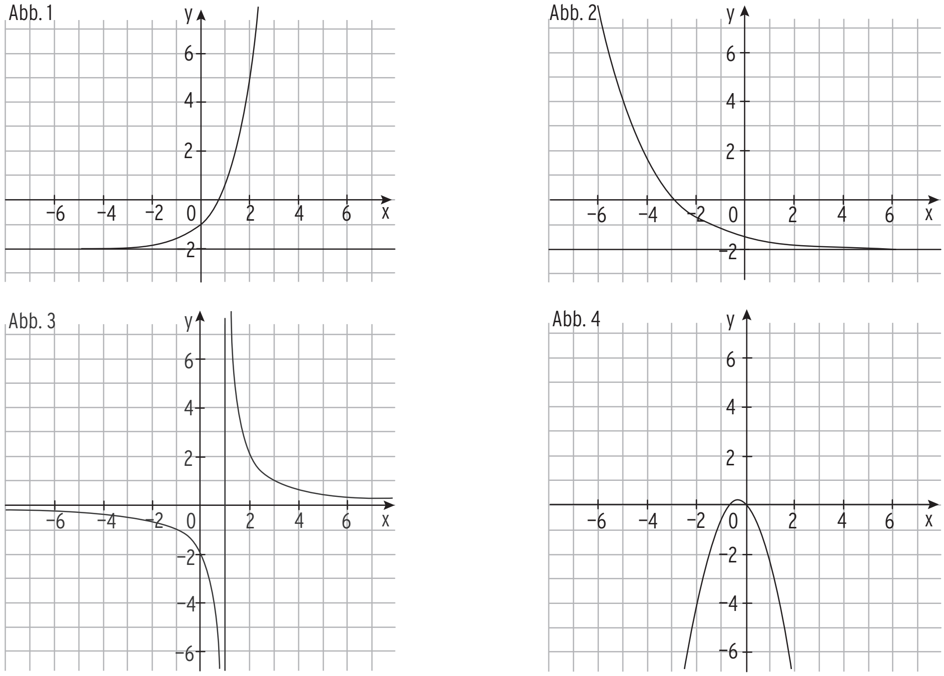
Musteraufgabensatz 1

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel **Lösungen Seite 173 - 179**

Aufgabe 1 (24 Punkte) **Punkte**

1.1 Analysis

Gegeben sind die Schaubilder von vier Funktionen, jeweils mit sämtlichen Asymptoten:



Drei dieser vier Schaubilder werden beschrieben durch die Funktionen f, g und h mit

$f(x) = \frac{2}{x + a}$, $g(x) = -2 + be^{-0,5x}$, $h(x) = cx^2 - x$

1.1.1 Ordnen Sie den Funktionen f, g und h das jeweils passende Schaubild zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

1.1.2 Bestimmen Sie die Werte für a, b und c. 7

Musteraufgabensatz 1

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

1.2 Analysis

Punkte

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = ax^4 - x^2$, $a > 0$.

1.2.1 Bestimmen Sie $\int_0^1 f_a(x)dx$. 3

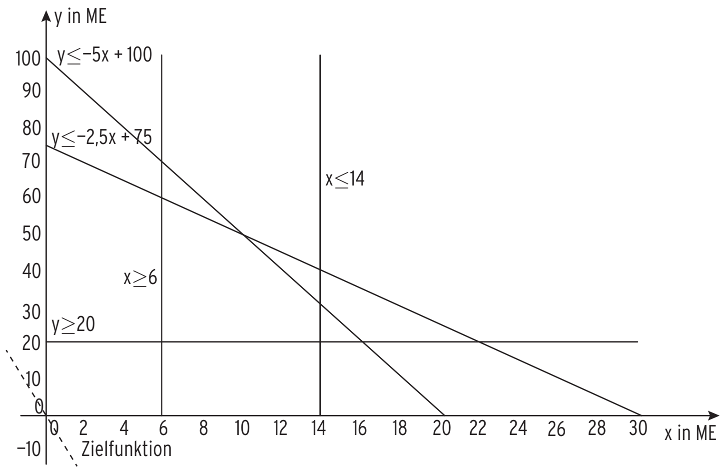
1.2.2 Die Graphen von f_a schneiden die x-Achse an den Stellen $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{a}}$; $x_{2,3} = 0$; $x_4 = \sqrt{\frac{1}{a}}$.

Bestimmen Sie a so, dass x_1 und x_4 den Abstand 4 haben. 2

1.3 Lineare Algebra

Die RALOP GmbH fertigt Fitnessarmbänder mit GPS-Sensor (x in ME)) und ohne GPS-Sensor (y in ME). Der Gewinn beträgt bei der Variante mit GPS-Sensor 100 Geldeinheiten pro ME (GE/ME), bei der Variante ohne GPS-Sensor 10 GE/ME.

Die Restriktionen bei der täglichen Produktion sind der folgenden Grafik zu entnehmen:



1.3.1 Für die Herstellung einer ME Armbänder mit GPS-Sensor fallen Kosten in Höhe von 25 GE/ME an, für eine ME Armbänder ohne GPS-Sensor 5 GE/ME. Die Herstellungskosten dürfen täglich höchstens 500 GE betragen. Weisen Sie nach, welche der dargestellten Restriktionen diesen Zusammenhang angibt. 2

1.3.2 Kennzeichnen Sie das Planungsvieleck unter der Voraussetzung, dass der Gewinn maximiert werden soll. Bestimmen Sie den täglich maximal möglichen Gewinn der RALOP GmbH. 4

Musteraufgabensatz 1

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

1.4 Stochastik

Punkte

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}6$.

1.4.1 Welche der Abbildungen zeigt die Verteilung von X?

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

1.4.2 Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise $P(4 < X < 7)$ und $P(X \neq 5)$.

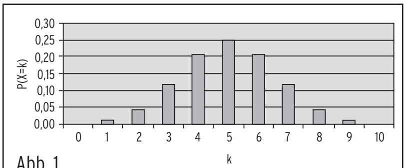


Abb. 1

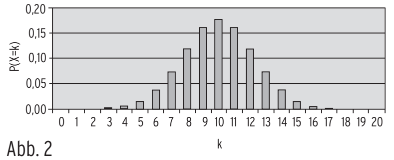


Abb. 2

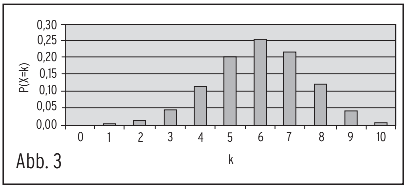


Abb. 3

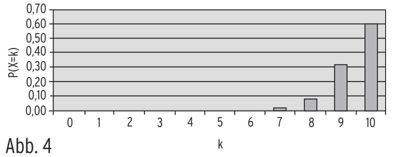


Abb. 4

6

Musteraufgabensatz 1 — Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR

Aufgabe 2 – Analysis (32 Punkte)

Seite 1/2 — Punkte

Beschreibung der Ausgangssituation

Ob als Filterkaffee, Espresso, Cappuccino oder Latte Macchiato – Kaffee ist das Lieblingsgetränk der Deutschen.

War bis vor wenigen Jahren in fast jedem Haushalt eine Kaffeemaschine zur Zubereitung von Filterkaffee zu finden, halten inzwischen die Portionskaffeemaschinen Einzug.

Der Markt an Kapsel- und Pad-Automaten wächst. Daher hat sich das Unternehmen *Kaffeeduft* auf die Produktion und den Verkauf von Kaffeekapseln und den zugehörigen Kaffeemaschinen spezialisiert.

Mehrere Discounter haben in der letzten Zeit Kapseln entwickelt, die zu der von Kaffeeduft hergestellten Maschine „Caps“ kompatibel sind. Daher soll dieses Modell durch die neuartige Maschine „Capsule“ ersetzt werden, die über ein modifiziertes Anstichverfahren verfügt, wodurch nur Kapseln von *Kaffeeduft* verwendet werden können.

2.1 Um sich einen Überblick über die Absatzsituation zu verschaffen, soll die Absatzentwicklung der Maschinen des bisherigen Modells „Caps“ analysiert werden.
Der Vertriebsleiter geht davon aus, dass sich die Entwicklung der Absatzzahlen des Modells „Caps“ durch die Funktion f mit

$$f(t) = 7t^4 - 280t^3 + 2800t^2\,;\ t \in \mathbb{R},\ 0 \leq t < 20$$

beschreiben lässt. Die Variable t gibt die Zeit in Monaten und f(t) die zugehörigen Absatzzahlen in Stück pro Monat an.
Der Vertriebsleiter vertritt die Auffassung, dass der Verlauf der Absatzzahlen des Modells „Caps“ einen Produktlebenszyklus mit den folgenden Phasen entspricht:

Phase	Wachstum	Reife	Sättigung	Degeneration
Absatz	progressiv steigend	degressiv steigend	langsam fallend	stark fallend

2.1.1 Bestätigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen durch geeignete Rechnungen.
Aussage 1:
Die Absatzzahlen des Produktes befinden sich 15 Monate nach Markteinführung ($t = 15$) noch vor der Sättigungsphase.
Aussage 2:
Der maximale Absatz liegt bei 70 000 Stück pro Monat.
Aussage 3:
Der Wechsel von der Wachstums- zur Reifephase geschieht nach genau drei Monaten. 13

IV Zentrale Abiturprüfungen

Zentrale Abiturprüfung 2017 Leistungskursfach Mathematik Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung

Lösungen Seite 203 - 211

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

Aufgabenstellung

Beschreibung der Ausgangssituation zu Aufgabenteil A

Das Unternehmen Wearables Ltd. beschäftigt sich mit der Entwicklung und Produktion tragbarer Computersysteme. Unter anderem entwickelt und produziert es internetfähige Armbanduhren, Datenbrillen und für den Fitnessbereich Outdoorjacken, in die elektronische Hilfsmittel zur Kommunikation und Musikwiedergabe eingearbeitet sind.

Aufgabe 1 (24 Punkte) **Punkte**

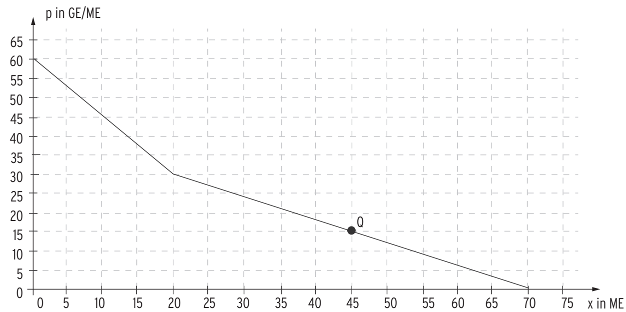
1.1 Analysis

Die internetfähigen Armbanduhren vor Wearables Ltd. werden bei einem jungen Kundenkreis zunehmend beliebter. Für das Modell o-clock17 ergab sich nach Umfragen eine Preisabsatzfunktion, die in der folgenden Grafik abgebildet ist.

Dabei gilt:

ME = Mengeneinheit,

GE = Geldeinheit.



1.1.1 Untersuchen Sie den eingetragenen Punkt Q hinsichtlich der ökonomischen Bedeutung seiner Koordinaten und des durchaus für die Wearables Ltd zu erwartenden Erlöses. 2

1.1.2 Stellen Sie die Gleichung der zugrunde liegenden stückweise definierten Preisabsatzfunktion p auf. 4

1.2 Analysis

In der Controllingabteilung rechnet die Wearables Ltd. bei dem Modell o-clock17 mit folgender ertragsgesetzlicher Kostenfunktion K:

$K(x) = 0{,}02 \cdot x^3 - 0{,}6 \cdot x^2 + 16 \cdot x + 20; \quad x \in [0; 50]$

Kosten K(x) in GE (1 GE = 1000 €), Menge x in ME (1 ME = 1000 Stück)

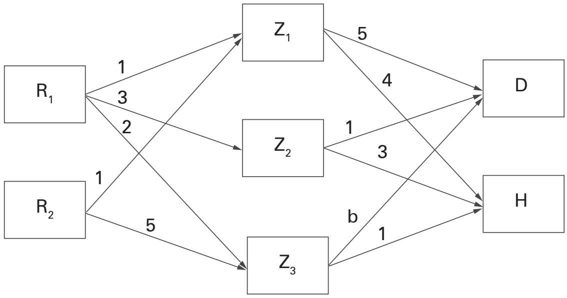
1.2.1 Berechnen Sie den Wendepunkt der Kostenfunktion. 4

1.2.2 Erläutern Sie die Bedeutung dieses Wendepunkts im Sachzusammenhang. 2

Zentrale Abiturprüfung 2017
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.3 Lineare Algebra **Punkte**

Die Wearables Ltd. produziert ein Damenmodell D und ein Herrenmodell H der o-clock17. Aus zwei Rohstoffen R_1 und R_2 werden zunächst drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 hergestellt, die dann zu den Endprodukten verarbeitet werden.
Der Materialfluss ist dem Gozintographen zu entnehmen.



1.3.1 Die Rohstoffverbrauchsmatrix C für die Endprodukte D und H lautet:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den im Gozintographen enthaltenen Wert b. 3

1.3.2 Im Lager befinden sich y_1 ME von R_1 und y_2 ME von R_2. Die Mengen der einzelnen Endprodukte, die sich daraus herstellen lassen, können durch das folgende Gleichungssystem berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie, dass es zu einem vorgegebenen Lagerbestand immer nur höchstens eine eindeutig bestimmte Mengenkombination an Endprodukten geben kann. 3

1.4 Stochastik

Von den o-clock17-Besitzern sind 25 % unzufrieden mit der Ladezeit der Internetseiten. Nach einem Zufallsprinzip wird eine Umfrage hierzu durchgeführt, wobei Mehrfachbefragungen nicht ausgeschlossen werden können.

1.4.1 Entwerfen Sie eine Aufgabenstellung, die zu folgendem Lösungsansatz führt:

$P(X = 35) = \binom{135}{35} \cdot 0{,}25^{35} \cdot 0{,}75^{100}$ 3

1.4.2 Nun werden 80 o-clock17-Besitzer befragt. Darunter sind 25 % unzufrieden mit der langen Ladezeit.

Untersuchen Sie, ob dieses Ergebnis innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt. 3

Zentrale Abiturprüfung 2017

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR

Aufgabe 2 – Analysis (32 Punkte) Punkte

Wearables Ltd beschäftigt sich mit der Entwicklung und Produktion tragbarer Computersysteme. Unter anderem entwickelt und produziert sie die Datenbrille o-look.
Im Folgenden gilt ME für Mengeneinheiten und GE für Geldeinheiten.

2.1 Bei der Ermittlung der Kosten für die Datenbrille o-look geht Wearables Ltd. von einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion der Form
$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d, x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ aus.

2.1.1 Aus der Produktionsabteilung sind folgende Informationen verfügbar:
Die Fixkosten betragen 200 GE. Das Betriebsminimum wird bei 15 ME erreicht, die Grenzkosten bei dieser Menge betragen 11,5 GE/ME. Die Wendestelle der Kostenfunktion liegt bei 10 ME.
Bestätigen Sie mittels des Rangkriteriums, dass das entsprechende lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Kostenfunktion mehrdeutig lösbar ist. 6

2.1.2 Geben Sie den zugehörigen Lösungsvektor in der Form $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ an 2

2.1.3 Unter anderem kann für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion mit $a, c > 0$ gelten: $b^2 = 3 \cdot a \cdot c$
Gehen Sie zusätzlich davon aus, dass gilt: $b = -30a$
Ermitteln Sie c in Abhängigkeit von a. 3

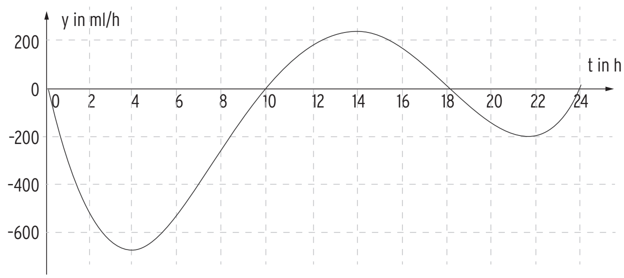
2.1.4 Zur Bestimmung einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion dritten Grades sind die Wendestelle x_W und das Betriebsminimum x_{BM} angegeben, wobei $x_{BM} = 1{,}5 \cdot x_W$ gilt.
Aus diesen Angaben ergeben sich zur Berechnung der Koeffizienten der Kostenfunktion zwei lineare Gleichungen. Zeigen Sie, dass diese beiden linearen Gleichungen zueinander äquivalent sind. 5

2.2 Wearables Ltd ist Alleinanbieter der Datenbrille o-look und geht von folgender Preisabsatzfunktion p mit $p(x) = 0{,}02 \cdot x^2 - 1{,}75 \cdot x + 73$
und der Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}06 \cdot x^3 - 1{,}8 \cdot x^2 + 25 \cdot x + 200$ aus.
Dabei gibt x die Stückzahl der Datenbrillen in ME an, p(x) ist der Preis in GE pro ME und K(x) sind die Kosten in GE.
In einer Produktionsperiode können maximal 40 ME der Datenbrillen hergestellt werden.

Zentrale Abiturprüfung 2017
Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR
Aufgabe 2 — Analysis (Fortsetzung) Punkte

2.2.1 Berechnen Sie die Gewinnzone und den maximalen Gewinn, den Wearables Ltd. mit dem Verkauf der Datenbrille o-look erzielen kann, sowie den Verkaufspreis, bei dem der maximale Gewinn erreicht wird. 8

2.3 Die Gläser der Datenbrille o-look werden zur Entspiegelung mit einer Spezialflüssigkeit besprüht. Diese befindet sich in einem Behälter, der zum Zeitpunkt t = 0 mit 5 Litern Flssigkeit gefült ist. Durch den Verbrauch sinkt die Flüssigkeitsmenge im Behälter und muss daher wieder aufgefüllt werden.
Entnahme und Zuführung der Flüssigkeit geschehen nicht gleichzeitig.
Der Zu- bzw. Abfluss der Flüssigkeit wird modelhaft beschrieben durch die Funktion der Form $f(t) = 0{,}1 \cdot t^4 - 5{,}2 \cdot t^3 + 85{,}2 \cdot t^2 - 432 \cdot t$ mit $0 \leq t \leq 24$
Dabei ist t die Uhrzeit in Stunden und f(t) die Zu- bzw. Ablaufrate der Flüssigkeit in Milliliter pro Stunde ($\frac{ml}{h}$).
Im Folgenden ist der Graph von f dargestellt.



Nehmen Sie begründet Stellung zu folgenden Aussagen:

2.3.1 Zu den Zeitpunkten 10 Uhr und 18 Uhr wird weder Flüssigkeit aufgetragen noch in den Behälter nachgefüllt. 2

2.3.2 Innerhalb der ersten 12 Stunden werden 4008,96 ml der Flüssigkeit entnommen. 2

2.3.3 Zu keinerZeit innerhalb der 24 Stunden wird die Mindestfüllmenge des Behälters von 800 ml unterschritten. 2

2.3.4 Für ein Brillenglas werden 4 ml dieser Spezialflüssigkeit benötigt. Von 19 bis 23 Uhr sind insgesamt 181 Brillengläser besprüht worden. 2

Zentrale Abiturprüfung 2017
Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR
Aufgabe 3 – Lineare Algebra (32 Punkte) Punkte

Wearables Ltd. produziert an drei verschiedenen Standorten in Werk I, Werk II und Werk III. Für die Produktion der internetfähigen Outdoorjacken werden in Werk I die Sensoren hergestellt, die u. a. die Bwewegung der Träger der Jacken analysieren und kommentieren. In Werk II werden die Jacken hergestellt und in Werk III werden die Sensoren in die Jacken eingenäht und versandfähig verpackt.

3.1 Die Sensoren in Werk I werden in einem zweistufigen Produktionsprozess hergestellt. Zunächst werden aus drei verschiedenen elektronischen Bauteilen B_1, B_2, B_3 vier Zwischenprodukte Z_1 bis Z_4 zusammengestellt.
Zur Produktion der drei Sensoren S_1, S_2, S_3 werden sowohl Zwischenprodukte verwendet als auch Bauteile direkt eingebaut.
Die nachstehenden Tabellen zeigen die Mengeneinheiten (ME) der benötigten Bauteile und die zur Weiterverarbeitung erforderlichen ME an Zwischenprodukten.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
B_1	1	6	3	4
B_2	2	3	7	5
B_3	1	2	4	0

	S_1	S_2	S_3
Z_1	2	4	6
Z_2	2	5	3
Z_3	1	3	4
Z_4	0	5	7

Bauteil B_1 wird mit 8 ME direkt in eine ME von Sensor S_1 und mit 4 ME in eine ME von Sensor S_2 eingebaut. Bauteil B_2 geht mit 5 ME in eine ME von Sensor S_2 ein und von Bauteil B_3 wird direkt eine ME in eine ME von Sensor S_3 eingebaut.

3.1.1 Bestimmen Sie Matrix D, aus der der Bauteileverbrauch zur Herstellung einer ME der jeweiligen Sensoren S_1, S_2, S_3 entnommen werden kann. 4

3.1.2 Rechnen Sie im Folgenden mit der Matrix $D = \begin{pmatrix} 25 & 67 & 64 \\ 17 & 74 & 84 \\ 10 & 26 & 29 \end{pmatrix}$, die den Bauteileverbrauch für die Sensoren angibt.
Die monatliche Auffüllung des Lagers mit Sensoren ist abhängig vom Parameter a mit $0 < a < 1$.
Es sollen $125 \cdot a$ ME von S_1, $52 \cdot a$ ME von S_2 und $288 \cdot a^2$ ME von S_3 hergestellt werden.

Zentrale Abiturprüfung 2021
Leistungskursfach Mathematik
Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung

Lösungen Seite 264 - 270

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

Beschreibung der Ausgangssituation zu Aufgabenteil A

Die Jump & Run GmbH ist ein renommiertes Unternehmen, das verschiedene Arten von Sportartikeln herstellt. Die Produktpalette richtet sich vor allem an Großabnehmer wie z.B. Schulen oder Vereine.

Aufgabe 1 (24 Punkte) **Punkte**

1.1 **Analysis**

Für die Produktion von Kugeln zum Kugelstoßen gilt die folgende Grenzkostenfunktion: $K'(x) = 6x^2 - 12x + 18$

Bei einer Produktion von 2 Mengeneinheiten (ME) der Kugeln entstehen Gesamtkosten in Höhe von 38 Geldeinheiten (GE).

1.1.1 Stellen Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion K auf. (3 Punkte)

1.1.2 Zeigen Sie, dass K streng monoton steigt. (3 Punkte)

1.2 Die Gewinnfunktion bei der Produktion von Reckstangen lautet:

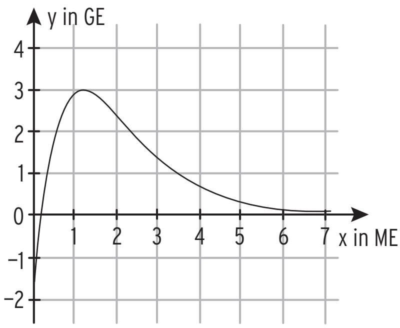
$G_a(x) = (10x - a) \cdot e^{-x}$, mit $a, x \in \mathbb{R}$ und $a \geq 1$, $x \geq 0$

Der Parameter a hängt vom verwendeten Material ab.

Hierbei gibt x die produzierte Menge der Reckstangen in ME und $G_a(x)$ den Gewinn in GE an.

Der Funktionsverlauf ist für a = 2 in Abbildung 1 dargestellt.

Abbildung 1



1.2.1 Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen der Produktionsleiterin bezogen auf die Funktion G_a mit $a \geq 1$.

A: Egal welchen Wert a hat, die Gewinnschwelle liegt immer bei mindestens 0,2 ME.

B: Egal welchen Wert a hat, die gewinnmaximale Ausbringungsmenge liegt immer bei mindestens 1,1 ME. Dabei soll die hinreichende Bedingung nicht untersucht werden. (6 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2021
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.3 Lineare Algebra

Bei der Produktion von Baseballschlägern aus Holz und Leichtmetall soll der Gesamtdeckungsbeitrag maximiert werden.
Das Planungspolygon ist in Abbildung 2 dargestellt.

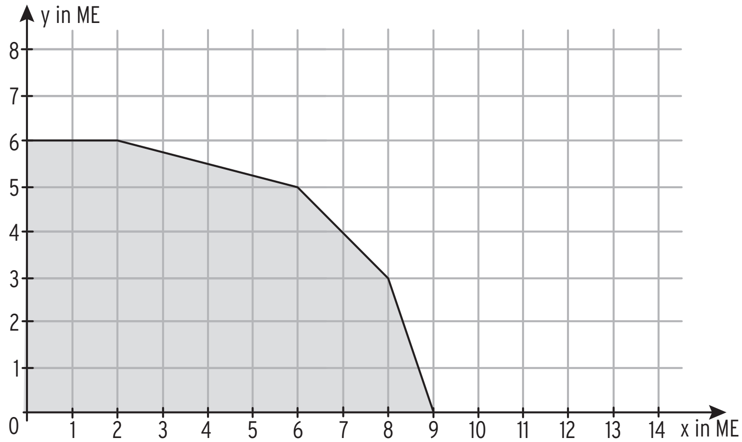


Abbildung 2

Dabei steht x für die Menge der Baseballschläger aus Holz und y für die Menge der Baseballschläger aus Leichtmetall.

1.3.1 Entscheiden Sie anhand des Planungspolygons begründet, ob es eine optimale Lösung mit $y = 7$ geben kann, bzw. ob es eine mit $x = 8$ geben kann.

(3 Punkte)

1.3.2 Der Deckungsbeitrag der Schläger aus Holz ist höher als der der Schläger aus Leichtmetall.
Entscheiden Sie begründet, in welchem Bereich die optimale Produktionsmenge der hölzernen Schläger liegen muss.

(3 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2021
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.4 Stochastik

Erfahrungsgemäß zerbricht ein hoher Anteil der hölzernen Baseballschläger innerhalb des ersten Jahres. Zur genaueren Untersuchung wird eine Stichprobe von 25 Schlägern entnommen.
Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl zerbrochener Schläger an. Abbildung 3 stellt die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung dar.
Beurteilen Sie auf der Grundlage des Histogramms, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

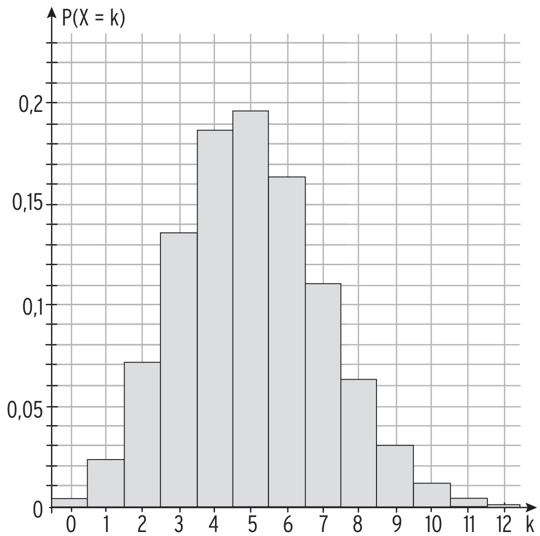


Abbildung 3

Aussage 1: Die Wahrscheinlichkeit für höchstens drei zerbrochene Schläger ist höher als die Wahrscheinlichkeit für genau sechs zerbrochene Schläger.

(2 Punkte)

Aussage 2: Die Wahrscheinlichkeit, dass sieben oder acht Schläger zerbrechen, ist größer als 0,15.

(2 Punkte)

Aussage 3: Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens vier oder mindestens sechs Schläger zerbrechen, ist kleiner als 0,8.

(2 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS
Aufgabenstellung

Aufgabe 2 – Analysis (32 Punkte) — Punkte

Die Jump & Run GmbH ist ein renommiertes Unternehmen, das verschiedene Arten von Sportartikeln herstellt. Die Produktpalette richtet sich vor allem an Großabnehmer wie z. B. Schulen oder Vereine.

2.1 Die Controlling-Abteilung will ein Modell zur Prognose des Gewinns bei Fußbällen entwickeln. Man geht davon aus, dass sich der Gewinn G durch eine Funktion 3. Grades der Form

$G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \quad \text{mit } x \in \mathbb{R},\, x \geq 0$

modellieren lässt.

2.1.1 In folgender Tabelle sind die Gewinne für verschiedene Produktionsmengen angegeben:

Produktionsmenge in ME	1	2,5	3	3,5	4	5
Gewinn in GE	– 0,6	1,1	1,5	1,6	1,5	0

Stellen Sie den Funktionsterm der Gewinnfunktion G mit Hilfe einer Regression auf. (4 Punkte)

2.1.2 Die Controlling-Abteilung geht von einer Gewinnfunktion G mit

$G(x) = -0{,}1\, x^3 + 0{,}45\, x^2 + 0{,}55x - 1{,}5 \text{ mit } x \in \mathbb{R},\, x \geq 0$

aus.

Bestimmen Sie die Gewinnzone und die gewinnmaximale Ausbringungsmenge.

(5 Punkte)

2.2 Auf dem Markt für Tennisschläger im mittleren Preissegment verhalten sich Nachfrage und Angebot entsprechend der Funktionen:

$p_N(x) = -0{,}8\, x^2 - 4x + 130 \text{ mit } x \in \mathbb{R},\, x \geq 0$

$p_A(x) = 0{,}35\, x^2 + 103 \text{ mit } x \in \mathbb{R},\, x \geq 0$

[1 ME = 1000 Schläger, 1 GE = 1000 €]

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.1 Analysis

1.1.1 Gleichung der Gesamtkostenfunktion K

Die Stammfunktion zur Grenzkostenfunktion lautet: $K(x) = 2x^3 - 6x^2 + 18x + d$

$K(2) = 30$ liefert $16 - 24 + 36 + d = 28 + d = 38$, also $d = 10$

Die Fixkosten betragen 10 GE,

also lautet die Gleichung $K(x) = 2x^3 - 6x^2 + 18x + 10$.

1.1.2 K steigt streng monoton

Untersuchung von K′ auf Nullstellen: $K'(x) = 0$ $\quad 6x^2 - 12x + 18 = 0$

Vereinfachung $\quad x^2 - 2x + 3 = 0$

Lösung mit abc-Formel ergibt $D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$ keine Lösung

oder

Lösung mit quadratischer Ergänzung: $\quad x^2 - 2x + 1 = 1 - 3 = -2$

$(x - 1)^2 = -2$

Wegen $(x - 1)^2 \geq 0$ hat die Gleichung keine Lösung.

Die Gleichung $K'(x) = 0$ ist unlösbar, also hat K′ keine Nullstellen. Da es sich um eine nach oben geöffnete Parabel ($y = K'(x)$) handelt, treten nur positive Werte auf. Damit ist K streng monoton steigend.

1.2 Analysis

1.2.1 Begründen oder widerlegen der Aussagen der

bezogen auf die Funktion $G_a(x) = (10x - a) \cdot e^{-x}$, mit $a, x \in \mathbb{R}$ und $a \geq 1$, $x \geq 0$

A: Gewinnschwelle $\geq 0{,}2$

Bedingung: $G_a(x) = 0$ $\quad (10x - a) \cdot e^{-x} = 0$

Satz vom Nullprodukt: $e^{-x} > 0$ $\quad 10x - a = 0$

$x = \frac{a}{10}$

Da a auch 1 sein kann, kann die Gewinnschwelle auch bei a = 0,1 ME liegen.

Aussage A ist damit falsch.

B: gewinnmaximale Ausbringungsmenge $\geq 1{,}1$

$G'_a(x) = (10x - a) \cdot (-1) \cdot e^{-x} + 10 \cdot e^{-x} = (-10x + 10 + a) \cdot e^{-x}$

notw. Bed.: $G'_a(x) = 0$ $\quad (-10x + 10 + a) \cdot e^{-x} = 0$

Satz vom Nullprodukt: $e^{-x} > 0$ $\quad -10x + 10 + a = 0$

$x = \frac{10 + a}{10} = 1 + \frac{a}{10}$

Da a größer oder gleich 1 ist, ist Aussage B wahr.

1.3 Lineare Algebra

1.3.1 optimale Lösung mit y = 7

Es gibt keine optimale Lösung des Optimierungsproblems mit y = 7, weil die entsprechende waagerechte Gerade oberhalb des Planungspolygons verläuft.

optimale Lösung mit x = 8

Bei geeigneter Zielfunktion kann (8|3) eine Lösung des Optimierungsproblems sein, also kann es eine optimale Lösung mit x = 8 geben.

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

1.3 Lineare Algebra

1.3.2 Bereich für die optimale Produktionsmenge der hölzernen Schläger

Der Stückdeckungsbeitrag d_x der Holzschläger liegt höher als der der Leichtmetallschläger d_y.

Die Gerade $y = -\frac{d_x}{d_y}x + \frac{z}{d_y}$ hat daher eine Steigung kleiner als -1 (z. B. $-\frac{3}{2} < -1$).

Am Diagramm erkennt man, dass die optimale Produktionsmenge der Holzschläger zwischen 8 und 9 ME liegen muss.

1.4 Stochastik

Aussage 1:

Die Summe der Balkenhöhen von $k = 0$ bis $k = 3$ ist zusammengenommen erkennbar höher als die Balkenhöhe bei $k = 6$. Also ist die Aussage richtig.

Aussage 2:

$P(X = 7) + P(X = 8) \approx 0{,}11 + 0{,}06 > 0{,}15$, also ist die Aussage 2 richtig.

Aussage 3:

$P(X \leq 4) + P(\geq 6) = 1 - P(X = 5)$

Die genannte Wahrscheinlichkeit ist die Gegenwahrscheinlichkeit zu $P(X = 5)$.

Man liest am Histogramm ab, dass $P(X = 5) < 0{,}2$.

Daher muss die genannte Wahrscheinlichkeit größer als 0,8 sein.

Die Aussage 3 ist falsch.

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR Lösungen

Aufgabe 2 – Analysis

2.1.1 Funktionsterm der Gewinnfunktion G mit Hilfe einer Regression

Eine kubische Regression ergibt

$G(x) = -0{,}0999x^3 + 0{,}4547x^2 + 0{,}5194x - 1{,}4741$ mit $r^2 = 0{,}9996$.

Der Wert r^2 liegt sehr nahe bei 1. Die Approximation ist also sehr gut.

2.1.2 $G(x) = -0{,}1\,x^3 + 0{,}45\,x^2 + 0{,}55x - 1{,}5$; $G'(x) = -0{,}3x^2 + 0{,}9x + 0{,}55$

Gewinnzone: $G(x) = 0$

Am Graphen von G ablesbar:

Gewinnschwelle: $x = 1{,}5$ ME,

Gewinngrenze: $x = 5$ ME.

Die Gewinnzone ist somit $[1{,}5; 5]$.

Gewinnmaximale Ausbringungsmenge

Bedingung: $G'(x) = 0$ für $x = 3{,}52$

Gewinnmaximale Ausbringungsmenge: 3,52 ME

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR Lösungen

Aufgabe 2 – Analysis

2.2 $p_N(x) = -0{,}8\,x^2 - 4x + 130$; $p_A(x) = 0{,}35\,x^2 + 103$ mit $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$

2.2.1 Aussage (1): Der Schnittpunkt der Graphen von p_N und p_A liegt bei (3,409|107,065).

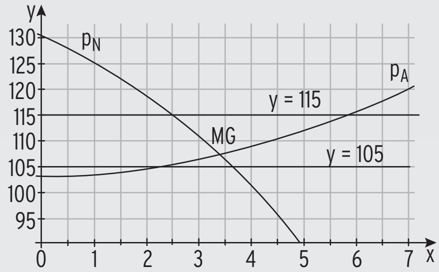
Da 1 ME 1000 Schlägern und 1 GE 1000 € entspricht, stimmt die Aussage.

Aussage (2): $p_N(x) = 105 \Rightarrow x = 3{,}624$

$p_A(x) = 105 \Rightarrow x = 2{,}390$

$3{,}624 - 2{,}390 = 1{,}234 > 1{,}0$

Der Nachfrageüberschuss beträgt 1234 Stück, die Aussage ist also falsch.



Aussage (3): Konsumentenrente:

$$\int_0^{3{,}409} p_N(x)dx - 3{,}409 \cdot 107{,}065 \approx 44{,}38$$

Produzentenrente: $3{,}409 \cdot 107{,}065 - \int_0^{3{,}409} p_A(x)dx \approx 9{,}24$

$5 \cdot 9{,}24 = 46{,}2 > 44{,}38$

Die Aussage ist damit falsch.

2.2.2 Betrag, der durch diesen Teilmarkt abgeschöpft wird

$p_N(x) = 115 \Rightarrow x = 2{,}5$

Die Abschöpfung beträgt ca. 20 GE: $2{,}5 \cdot (115 - 107) = 20$

Dies entspricht 20 000 €.

2.3 $a_w(t) = (1 + t) \cdot e^{-\frac{1}{w} \cdot t + 0{,}25}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$

2.3.1 notwendiger Wert von w

Bedingung: $a_w(3) = 3{,}5$ $\qquad (1 + 3) \cdot e^{-\frac{1}{w} \cdot 3 + 0{,}25} = 3{,}5$

$e^{-\frac{3}{w} + 0{,}25} = 0{,}875$

Logarithmieren: $\qquad -\frac{3}{w} + 0{,}25 = \ln(0{,}875)$

$\frac{3}{w} = 0{,}25 - \ln(0{,}875) \approx 0{,}384$

$w \approx 7{,}82$

2.3.2 Werte des Parameters w

Ableitung mit Produkt- und Kettenregel:

$$a_w(t) = (1 + t) \cdot \left(-\frac{1}{w}\right) \cdot e^{-\frac{1}{w} \cdot t + 0{,}25} + e^{-\frac{1}{w} \cdot t + 0{,}25} = \left(-\frac{t}{w} - \frac{1}{w} + 1\right) \cdot e^{-\frac{1}{w} \cdot t + 0{,}25}$$

Notw. Bedingung: $a'_w(t) = 0$ $\qquad -\frac{t}{w} - \frac{1}{w} + 1 = 0$ $\qquad (e^{-\frac{1}{w} \cdot t + 0{,}25} > 0)$

Satz vom Nullprodukt $\qquad t = w\left(-\frac{1}{w} + 1\right) = w - 1$

Hinr. Bedingung: $a''_w(t) \neq 0$

$$a''_w(w - 1) = \left(-\frac{2}{w} + \frac{1}{w^2} + \frac{w - 1}{w^2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{w} \cdot (w-1) + 0{,}25} = -\frac{1}{w} \cdot e^{-\frac{1}{w} \cdot (w-1) + 0{,}25}$$

$a''_w(w - 1) < 0$ (Maximalstelle), wenn $w > 1$ wegen $t \geq 0$ $(t = w - 1)$