Ott
Rosner

Mathematik

Fachhochschulreife im Berufskolleg 2022 Prüfungsvorbereitung Baden-Württemberg

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser

Roland Ott
Oberstudienrat

Stefan Rosner
Studienrat an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

* * * * *

1. Auflage 2021

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0382-01
ISBN 978-3-8120-0382-7

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung dient zur Vorbereitung auf die **Prüfung zur Fachhochschulreife 2022** an Berufskollegs und ist auf die neue Prüfungsordnung abgestimmt.

Dem neuen Prüfungsmodus wird durch eine Vielzahl von Aufgaben für Teil 1, der ohne Hilfsmittel bearbeitet werden muss, und für den Teil 2, bei welchem Hilfsmittel zugelassen sind, Rechnung getragen.

Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.

Da die Aufgabensammlung allen Schülern/Schülerinnen bei der **selbstständigen** Vorbereitung auf das FHSR-Prüfung helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.

An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Prüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der Prüfung zur Fachhochschulreife in Mathematik

Zu Beginn: SchülerIn erhält beide Aufgabenteile, jedoch keine Hilfsmittel

Phase 1: Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils

Teil	Thema	Auswahl	Richtzeit	Punkte
1	Analysis	keine	ca. 60 min	30

Nach endgültiger Abgabe von Teil 1 erhält SchülerIn die Hilfsmittel

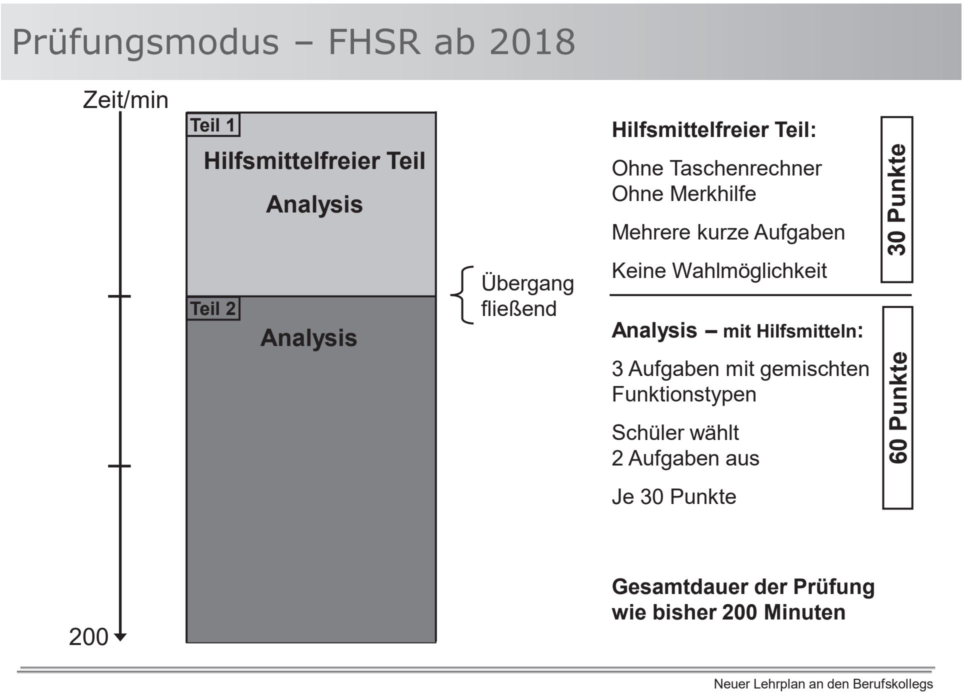
Phase 2: Bearbeitung der Teile mit Hilfsmitteln (WTR + Merkhilfe)

Teil	Thema	Auswahl	Richtzeit	Punkte
2	Analysis	SchülerIn wählt **zwei aus drei** Aufgaben	ca. 140 min	60

Hinweise

- Die Prüfung dauert insgesamt maximal 200 Minuten.

  Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt 90 Punkte.



Pandemiebedingte Abweichungen für die Prüfung zur Fachhochschulreife in Mathematik im Schuljahr 2021/2022

Abweichend von den Prüfungen in den vergangenen Jahren werden der **Fachlehrkraft** vorgelegt:

- zwei Aufgaben zum hilfsmittelfreien Pflichtteil (je 30 Punkte) mit Aufgaben aus der Analysis, aus denen die Fachlehrkraft eine für die Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler auswählt und
- ein hilfsmittelgestützter Prüfungsteil mit 3 Aufgaben aus der Analysis mit jeweils 30 Punkten (Schülerwahl 2 aus 3 wie bisher auch)

Die Analysisaufgaben werden auch im Schuljahr 2021/2022 in gemischter Form angeboten. Dabei wird die Durchmischung der Funktionstypen in den Aufgaben des Wahlteils im Schuljahr 2021/2022 in den einzelnen Aufgaben wie folgt festgelegt:
Erste Aufgabe des Wahlteils: Polynomfunktionen ca. 70 %, Exponentialfunktionen ca. 30 %
Zweite Aufgabe des Wahlteils: Exponentialfunktionen ca. 50 %, Trigonometrische Funktionen ca. 50 %
Dritte Aufgabe des Wahlteils: Polynomfunktionen ca. 70 %, Trigonometrische Funktionen ca. 30 %

Änderungen im Prüfungsstoff:
Darüber hinaus ist im Schuljahr 2021/2022 die Lehrplaneinheit 2 des Bildungsplans **nur eingeschränkt prüfungsrelevant**:
Die **Lösung Linearer Gleichungssysteme** beschränkt sich auf LGS mit **maximal zwei** Unbekannten.

I Teil 1 der Fachhochschulreife-Prüfung ohne Hilfsmittel

1 Übungsaufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 21**

1.1 Lösen Sie die Gleichung: $-2x^3 + 6x = 2x$.

1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 2 - \frac{1}{4}x^2$ in $x = 2$.

1.3 Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 1$ besitzt einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die Koordinaten.

1.4 Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 1 \\ x - y &= 3. \end{aligned}$$

1.5 Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\,dx$.

1.6 Bestimmen Sie die Art und Lage der Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^2(x - 2)(x + 1)$.

1.7 Das Schaubild von f mit $f(x) = 2\sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$, wird um 3 nach links verschoben und um 1 nach unten verschoben. Wie lautet die Gleichung der entstandenen Kurve?

1.8 Bilden Sie die erste Ableitung von f mit $f(x) = e^{2x-3} - 2x + 1$.

1.9 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^4 + 3$ und $g(x) = 2x^2$. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Schaubilder von f und g.

Aufgabe 2 **Lösungen Seite 22/23**

2.1 Bestimmen Sie zwei Lösungen der Gleichung: $4\sin(2x) = 0$.

2.2 Welche Gerade schneidet das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \cos(\frac{1}{4}x) - 1$; $x \in \mathbb{R}$, in $x = 2\pi$ senkrecht?

2.3 Zeigen Sie: Das Schaubild K_f der Funktion f mit $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x} - x + 1$ besitzt keinen Wendepunkt.
Ist K_f eine Linkskurve? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.4 Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x - y &= -2 \end{aligned}$$

2.5 Bestimmen Sie $u \neq 0$, so dass $\int_u^0 (x + 2)\,dx = 0$

2.6 Bestimmen Sie die Gleichung der nicht waagrechten Wendetangente an das Schaubild von f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$; $x \in \mathbb{R}$.

2.7 Wie entsteht das Schaubild von f mit $f(x) = 2\cos(3x) - 1$; $x \in \mathbb{R}$, aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = \cos(x)$.

2.8 Bestimmen Sie die Stammfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}x)$; $x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild die y-Achse in 3 schneidet.

2.9 Zeigen Sie, die Gleichung $e^{2x} + e^x = 2$ hat genau eine Lösung.

2.10 Geben Sie die Nullstellen des Polynoms p mit $p(x) = x^3 - 100x$; $x \in \mathbb{R}$ an.

Erstellen Sie ohne weitere Rechnung eine Skizze des Schaubilds von p.

Lösungen der Übungsaufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Aufgabe Seite 9**

1.1 Gleichung in Nullform: $-2x^3 + 6x = 2x \Leftrightarrow -2x^3 + 4x = 0$

Auslammern: $2x(-x^2 + 2) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x = 0 \vee -x^2 + 2 = 0$

$-x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Lösungen: $x_1 = 0;\ x_{2|3} = \pm\sqrt{2}$

1.2 $f(x) = 2 - \frac{1}{4}x^2$; $f'(x) = -\frac{1}{2}x$

$f(2) = 1$; $f'(2) = -1$ einsetzen in $y = mx + b$: $1 = -1 \cdot 2 + b$ ergibt $b = 3$

Gleichung der Tangente: $y = -x + 3$

1.3 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 1$; $f'(x) = -x^2 + 6x$; $f''(x) = -2x + 6$; $f'''(x) = -2 \neq 0$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$f(3) = 17$ ergibt $W(3 \mid 17)$

1.4 Additionsverfahren: $2x + 5y = 1$, $x - y = 3$ $\cdot(-2)$ ergibt $7y = -5 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{7}$

Einsetzen in $x - y = 3$ ergibt $x - (-\frac{5}{7}) = 3 \Leftrightarrow x = 3 - \frac{5}{7} = \frac{16}{7}$

Lösung: $(\frac{16}{7}; -\frac{5}{7})$

1.5 $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x\right]_{-1}^{0} = 0 - (\frac{1}{4} - 2) = \frac{7}{4}$

1.6 $f(x) = \frac{1}{5}x^2(x - 2)(x + 1)$ Art und Lage der Nullstellen:

$x = 0$ doppelte Nullstelle (K_f berührt die x-Achse)

$x = 2$; $x = -1$ einfache Nullstelle (K_f schneidet die x-Achse)

1.7 $f(x) = 2\sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$

K_f wird um 3 nach links verschoben: $y = 2\sin(x + 3)$ (Ersetze x durch $(x + 3)$)

und um 1 nach unten verschoben: $y = 2\sin(x + 3) - 1$

1.8 Mit der Kettenregel: $f'(x) = 2 \cdot e^{2x-3} - 2$

1.9 Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$ $-x^4 + 3 = 2x^2$

Nullform: $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

Substitution: $x^2 = u$ $u^2 + 2u - 3 = 0$

Mit Formel oder $u^2 + 2u - 3 = (u - 1)(u + 3)$: $u_1 = -3$; $u_2 = 1$

Rücksubstitution: $u_2 = x^2 = 1 \Rightarrow x_{1|2} = \pm 1$

($u_1 = x^2 = -3$ hat keine Lösung)

Schnittpunkte der Schaubilder $S_1(-1 \mid 2)$; $S_2(1 \mid 2)$ (vgl. Symmetrie)

Aufgabe 2 **Aufgabe Seite 10**

2.1 $4\sin(2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x) = 0$ für $2x = 0; \pi; 2\pi; \ldots$

Lösungen: $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{\pi}{2}$ (oder auch $x = \pi;\ x = -\frac{\pi}{2}; \ldots$)

2.2 $f(x) = \cos(\frac{1}{4}x) - 1;\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{1}{4}\sin(\frac{1}{4}x)$

Senkrecht schneiden bedeutet negativer Kehrwert der Steigung:

$f'(2\pi) = -\frac{1}{4}\sin(\frac{1}{4} \cdot 2\pi) = -\frac{1}{4}\sin(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{4}$

Steigung der Geraden: $m = \frac{-1}{-\frac{1}{4}} = 4$

$f(2\pi) = -1;\ y = 4x + b$: $\quad -1 = 4 \cdot 2\pi + b \Rightarrow b = -1 - 8\pi$

Gerade durch $P(2\pi \mid -1)$ mit Steigung 4: $\quad y = 4x - 1 - 8\pi$

2.3 $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x} - x + 1;\ f'(x) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x} - 1;\ f''(x) = \frac{1}{9}e^{-\frac{1}{3}x}$

K_f hat keinen Wendepunkt, da $f''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$f''(0) = \frac{1}{9} > 0$ $\quad K_f$ ist eine Linkskurve, da $f''(x) > 0$

2.4 $x + 2y = 1$ (I) $\wedge$ $x - y = -2$ (II) $\quad$ (I) − (II) ergibt $3y = 3 \Rightarrow y = 1$

einsetzen von $y = 1$ in $x + 2y = 1$ ergibt $x = -1$

Lösung: $(-1; 1)$

2.5 $\int_u^0 (x + 2)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_u^0 = 0 - (\frac{1}{2}u^2 + 2u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}u^2 - 2u = 0$

Ausklammern: $\quad u \cdot (-\frac{1}{2}u - 2) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $\quad u = 0;\ u = -4$

$u \neq 0$ nach Aufgabe, also einzige Lösung $u = -4$.

2.6 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2;\ f'(x) = x^3 + 3x^2;\ f''(x) = 3x^2 + 6x;\ f'''(x) = 6x + 6;$

Wendepunkt: $f''(x) = 0 \quad 3x^2 + 6x = 0$

$3x(x + 2) = 0$ für $x_1 = 0;\ x_2 = -2$

$f'(0) = 0$ (Tangente ist waagrecht); $f'(-2) = 4$

Mit $f(-2) = -6$ und dem Ansatz: $y = mx + b$: $-6 = 4 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 2$

Gleichung der nicht waagrechten Wendetangente: $y = 4x + 2$

2.7 Das Schaubild von f mit $f(x) = 2\cos(3x) - 1;\ x \in \mathbb{R}$, entsteht aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = \cos(x)$ durch Streckung in y-Richtung mit Faktor 2, Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{3}$ und Verschiebung um 1 nach unten.

2.8 Stammfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}x);\ x \in \mathbb{R}$: $F(x) = -\frac{3}{2\pi}\cos(\frac{\pi}{3}x) + c$

durch $(0 \mid 3)$: $F(0) = -\frac{3}{2\pi} + c = 3 \Rightarrow c = 3 + \frac{3}{2\pi}$

Stammfunktion: $F(x) = -\frac{3}{2\pi}\cos(\frac{\pi}{3}x) + 3 + \frac{3}{2\pi}$

Aufgabe 2 **Aufgabe Seite 10**

2.9 Gleichung in Nullform: $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

Substitution: $e^{2x} = u^2$; $e^x = u$: $u^2 + u - 2 = 0$

Lösungen in u: $u_{1|2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 2} = -\frac{1}{2} \pm 1{,}5$

$u_1 = 1$; $u_2 = -2$

Wegen $e^x > 0$ gibt es nur für $u > 0$ eine Lösung, also genau eine Lösung.

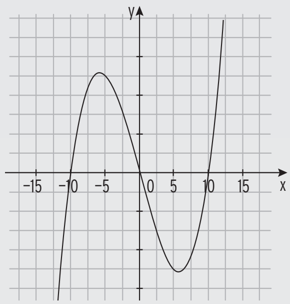
2.10 Nullstellen von p: $p(x) = 0$ $x^3 - 100x = 0$

Ausklammern: $x \cdot (x^2 - 100) = 0$

Nullprodukt: $x = 0$ oder $x^2 - 100 = 0$

Lösungen: $x_1 = 0$; $x_{2|3} = \pm 10$

Skizze des Schaubilds von p



Aufgabe 3 **Aufgabe Seite 11**

Parabel K von f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 2ax + b$

Bedingungen und LGS: $f(0) = 1$ $c = 1$

$f(2) = -2$ $4a + 2b + c = -2$

$f'(2) = \frac{1}{2}$ $4a + b = \frac{1}{2}$

Einsetzen von c = 1: $4a + 2b + 1 = -2$ $4a + 2b = -3$

$4a + b = \frac{1}{2}$ $| \cdot (-1)$

Addition ergibt: $b = -3{,}5$

Einsetzen in z. B. $4a + b = \frac{1}{2}$ ergibt $a = 1$

Möglicher Funktionsterm $f(x) = x^2 - 3{,}5x + 1$

Aufgabe 4

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt.

Ableitungen: $f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$; $f''(x) = -6x + 6$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $-6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

Mit $f'''(x) = -6 \neq 0$ ist $x = 1$ Wendestelle.

Mit $f(1) = -3$ und $f'(1) = 2 = m$ erhält man mit $y = mx + b$

die Tangente in $W(1 \mid -3)$: $-3 = 1 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -5$

Gleichung der Tangente: $y = 2x - 5$

2 Musteraufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel 30 Punkte

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 40/41**

1.1 Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$. 4

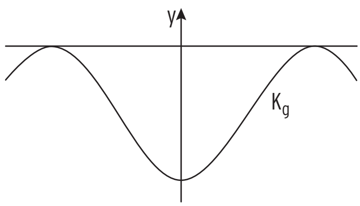
1.2 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = e^{4x}$ und $g(x) = 3e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass sich die Schaubilder der Funktionen f und g genau einmal schneiden. 3

1.3 Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion hat die benachbarten Hochpunkte $H_1(\frac{\pi}{2}|3)$ und $H_2(\frac{3\pi}{2}|3)$ sowie eine Amplitude von 2.
Geben Sie die Koordinaten des dazwischen liegenden Tiefpunktes und eines Wendepunktes an. 4

1.4 Bestimmen Sie die Stammfunktion von g mit $g(x) = 2e^{-4x} + 4x - 3$; $x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild die y-Achse bei 6 schneidet. 4

1.5 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin(2x)dx$. 4

1.6 In der nebenstehenden Abbildung schließen das zur y-Achse symmetrische Schaubild K_g der Funktion g und die x-Achse eine Fläche ein. In diese wird ein achsenparalleles Rechteck einbeschrieben.



Geben Sie eine Zielfunktion an, mit deren Hilfe das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt bestimmt werden kann. 5

1.7 Das Schaubild K_g aus 1.6 ist das Schaubild der Ableitungsfunktion der Funktion h, es gilt also $h' = g$.
Treffen Sie Aussagen über die Lage und Anzahl der Wendestellen von h. 3

1.8 Bestimmen Sie die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$x + y = 6$$
$$3x + 2y = -3$$ 3

30

Musteraufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel 30 Punkte

Aufgabe 2 Lösungen Seite 42/43

2.1 Geben Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$ an. 3

2.2 Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen: $g'(3) = 2$

$g''(3) = 0$

$g'''(3) \neq 0$

Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen? 3

2.3 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^{2 \cdot x} - 4 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$.

2.3.1 Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagrechte Tangente hat. 4

2.3.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in $P(0 \mid h(0))$ an das Schaubild von h. 2

2.3.3 Ermitteln Sie eine Stammfunktion von h, deren Schaubild durch den Punkt $P(0 \mid 5)$ verläuft. 4

2.4 Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = \cos(x);\ x \in \mathbb{R}$.

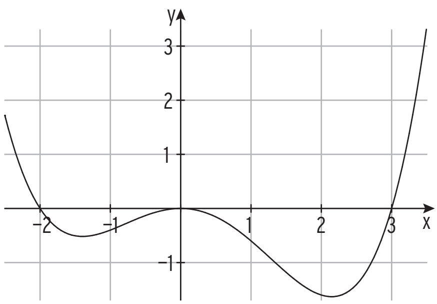
2.4.1 Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 1$. Bestimmen Sie, ohne Verwendung einer Stammfunktion, zwei verschiedene Werte für a, sodass gilt: $\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 2$.

Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise. 3

2.4.2 Beschreiben Sie, wie das Schaubild von q mit $q(x) = -\cos(x + 2);\ x \in \mathbb{R}$ aus dem Schaubild von p hervorgeht. 3

2.5 C ist das Schaubild einer Funktion g. Die Abbildung zeigt das Schaubild C′ der Ableitungsfunktion g′ von g für $-2{,}5 \leq x \leq 3{,}5$.

Begründen Sie, wieso die folgenden Aussagen falsch sind.



A1) C hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.

A2) C hat genau zwei Wendepunkte.

A3) C ist bei $x = 1$ linksgekrümmt.

A4) C hat an höchstens 2 Punkten eine waagrechte Tangente. 8

30

II Teil 2 der Fachhochschulreife-Prüfung mit Hilfsmittel

1 Auszug aus der Merkhilfe

Potenzgleichung mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$

$x^n = a$	$a \geq 0$	falls n gerade	$x_{1/2} = \pm\sqrt[n]{a}$
		falls n ungerade	$x = \sqrt[n]{a}$
$x^n = a$	$a < 0$	falls n ungerade	$x = -\sqrt[n]{\lvert a \rvert}$

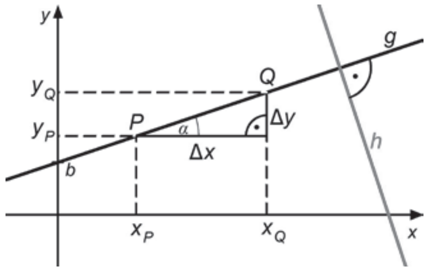
Polynomfunktion

Polynomfunktion ersten Grades (Lineare Funktion)

$f(x) = mx + b$

Das Schaubild ist eine Gerade mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt b.

Steigung	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$
Punkt-Steigungs-Form	$y = m(x - x_P) + y_P$
Steigungswinkel	$m = \tan(\alpha)$
Orthogonalität	$m_g \cdot m_h = -1 \quad \Leftrightarrow \quad g \perp h$



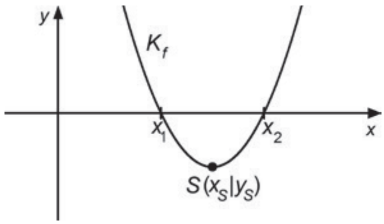
Polynomfunktion zweiten Grades (Quadratische Funktion)

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Linearfaktorzerlegung $\quad f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Das Schaubild ist eine Parabel mit Scheitel S.

Scheitelform $\quad y = a(x - x_S)^2 + y_S$



Quadratische Gleichung

$ax^2 + bx + c = 0$	$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	falls $b^2 - 4ac \geq 0$
$x^2 + px + q = 0$	$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$

Polynomfunktion dritten Grades

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Polynomfunktion n-ten Grades

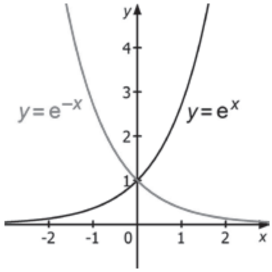
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R};\ a_n \neq 0$

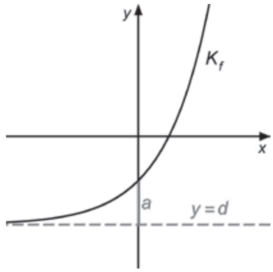
Exponentialfunktion

$f(x) = a \cdot q^x + d$ mit $a \neq 0;\, q > 0 \wedge q \neq 1$

$f(x) = a \cdot e^{bx} + d$ mit $a \neq 0;\, b \in \mathbb{R}^*$

Asymptote $y = d$





Exponentialgleichung mit $q,\, y \in \mathbb{R}_+^*$

$y = q^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_q(y)$

$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(y)$

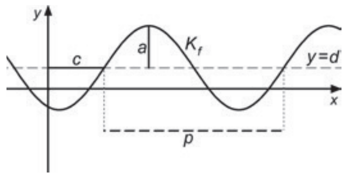
$q^x = e^{\ln(q) \cdot x}$ $\qquad \log_q(y) = \dfrac{\ln(y)}{\ln(q)}$ $\qquad e^{\ln(y)} = y$ $\qquad \ln(e^x) = x$

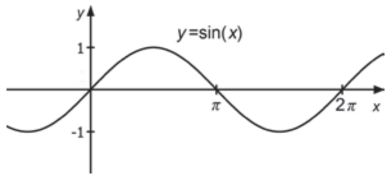
Trigonometrische Funktion

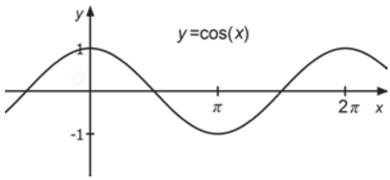
$f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ mit $a,\, b \neq 0$

Amplitude $|a|$

Periode $p = \dfrac{2\pi}{|b|}$







Bogenmaß x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos(x)	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Abbildungen

Das Schaubild von g entsteht aus dem Schaubild von f durch

Spiegelung	an der x-Achse	$g(x) = -f(x)$
	an der y-Achse	$g(x) = f(-x)$
Streckung	mit Faktor $\frac{1}{b}$ ($b > 0$) in x-Richtung	$g(x) = f(b \cdot x)$
	mit Faktor a ($a > 0$) in y-Richtung	$g(x) = a \cdot f(x)$
Verschiebung	um c in x-Richtung	$g(x) = f(x - c)$
	um d in y-Richtung	$g(x) = f(x) + d$

5 Analysis

Änderungsrate

Durchschnittliche / Mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0; x_1]$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Momentane / Lokale Änderungsrate (Ableitung) an der Stelle x_0 $\quad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Ableitungsregeln

Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Faktorregel	$f(x) = a \cdot u(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = a \cdot u'(x)$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x))$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

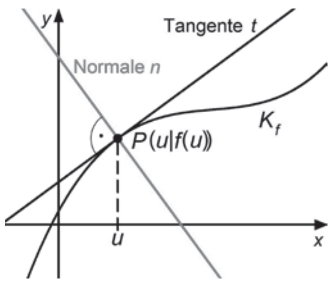
Spezielle Ableitungen / Stammfunktionen mit $C \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^k$	$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$	$F(x) = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} + C$ mit $k \neq -1$
$f(x) = e^{bx}$	$f'(x) = b \cdot e^{bx}$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot e^{bx} + C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin(bx)$	$f'(x) = b \cdot \cos(bx)$	$F(x) = -\frac{1}{b} \cdot \cos(bx) + C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos(bx)$	$f'(x) = -b \cdot \sin(bx)$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot \sin(bx) + C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$

Tangente

Tangentensteigung $\quad m_t = f'(u)$

Tangentengleichung $\quad y = f'(u)(x - u) + f(u)$



Untersuchung von Funktionen und ihren Schaubildern

Symmetrie	K_f ist symmetrisch zur y-Achse K_f ist symmetrisch zum Ursprung	$f(-x)=f(x)$ für alle x $f(-x)=-f(x)$ für alle x
Monotonie	f steigt monoton im Intervall J f fällt monoton im Intervall J	$f'(x)>0$ im Intervall J $f'(x)<0$ im Intervall J
Krümmung	K_f ist im Intervall J linksgekrümmt K_f ist im Intervall J rechtsgekrümmt	$f''(x)>0$ im Intervall J $f''(x)<0$ im Intervall J
Hochpunkt	K_f hat den Hochpunkt $H(x_0 \vert f(x_0))$	$f'(x_0)=0$ und VZW +/- von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0)<0$
Tiefpunkt	K_f hat den Tiefpunkt $T(x_0 \vert f(x_0))$	$f'(x_0)=0$ und VZW -/+ von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0)>0$
Wendepunkt	K_f hat den Wendepunkt $W(x_0 \vert f(x_0))$	$f''(x_0)=0$ und VZW von $f''(x)$ bei x_0 oder $f'''(x_0)\neq 0$

Berechnung bestimmter Integrale

$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

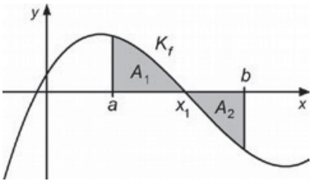
Flächenberechnung

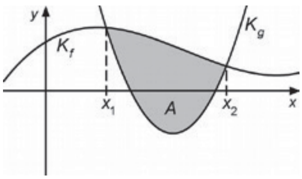
$A_1=\int_a^{x_1} f(x)dx$

$A_2=-\int_{x_1}^{b} f(x)dx$

$A=\int_{x_1}^{x_2} (f(x)-g(x))dx$

falls $f(x)\geq g(x)$ für $x\in[x_1;x_2]$





Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht vollständig erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

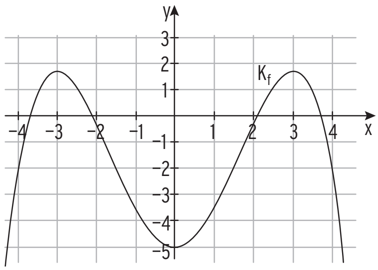
2 Musteraufgaben zum Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Seite 1/2**

Lösungen Seite 61/62 **Punkte**

1.1 Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse. Es hat im Punkt H(− 1| 3) eine waagrechte Tangente und schneidet die y-Achse bei − 4,5.
Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, mit dem der Funktionsterm bestimmt werden kann. 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 5$; $x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild ist K_f.



1.2 Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrempunkte von K_f.
Zeigen Sie, eine der beiden Wendetangenten hat die Gleichung

$$y = 2\sqrt{3} \cdot x - 7{,}25.$$

Geben Sie die Gleichung der anderen Wendetangente an.
Zeichnen Sie die Wendetangenten in das Koordinatensystem ein. 8

1.3 K_f schneidet die x-Achse unter anderem in $x \approx 2{,}1$. K_f und die x-Achse begrenzen drei Teilflächen. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der größten Teilfläche. 6

3 Lösungen der Musteraufgaben zum Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 52/53**

1.1 4. Grades, symmetrisch zur y-Achse: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$; $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

$H(-1|\,3)$: $f(-1) = 3$ $\qquad a + b + c = 3$

waagrechte Tangente: $f'(-1) = 0$ $\qquad -4a - 2b = 0$

$S_y(0|-4{,}5)$: $f(0) = -4{,}5$ $\qquad c = -4{,}5$

Hinweis: **Funktionsterm:** $f(x) = -7{,}5x^4 + 15x^2 - 4{,}5$

K_f: $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 5;\ x \in \mathbb{R}$

1.2 **Koordinaten der Extrempunkte**

Ableitungen: $f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$; $f''(x) = -x^2 + 3$; $f'''(x) = -2x$

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\qquad x(-\frac{1}{3}x^2 + 3) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $\qquad x_1 = 0;\ x_{2|3} = \pm 3$

Mit $f''(0) = 3 > 0$ und $f(0) = -5$ ergibt sich der Tiefpunkt $T(0|-5)$.

Mit $f''(\pm 3) = -6$ und $f(\pm 3) = 1{,}75$ ergeben sich

die Hochpunkte $H_1(-3\,|\,1{,}75)$ $H_2(3\,|\,1{,}75)$ (Symmetrie)

Wendepunkte und **Wendetangente**

Bedingung: $f''(x) = 0$ $\qquad -x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1|2} = \pm\sqrt{3}$

Mit $f'''(\sqrt{3}) \neq 0$ und $f(\sqrt{3}) = -1{,}25$ ergibt sich ein Wendepunkt: $W_1(\sqrt{3}\,|-1{,}25)$.

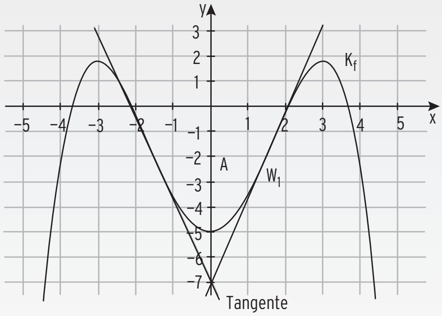
Mit $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ erhält man:

$y = 2\sqrt{3} \cdot x - 7{,}25$ muss die Tangente sein

Punktprobe mit $W_1(\sqrt{3}\,|-1{,}25)$: $-1{,}25 = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 7{,}25$ wahre Aussage

Wendetangente in W_2: $y = -2\sqrt{3} \cdot x - 7{,}25$

Zeichnung: K_f und Wendetangenten



1.3 **Flächeninhalt der größten Teilfläche A**

Schnittstellen von K_f mit der x-Achse:
$x_{1|2} \approx \pm 2{,}1$; $(x_{3|4} \approx \pm 3{,}7)$

$$\int_0^{2,1} f(x)dx = \left[-\frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{2}x^3 - 5x\right]_0^{2,1} = -6{,}55$$

Wegen der Symmetrie und Fläche

unterhalb der x-Achse: $A = 2 \cdot 6{,}55 = 13{,}10$

Lösungen - Musteraufgaben zum Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Seite 2/2**

K_g: $g(x) = e^x - 4$; $g'(x) = e^x$; $x \in \mathbb{R}$

1.4 Schnittpunkt mit der y-Achse: $g(0) = -3$: $S_y(0 \mid -3)$ ($e^0 = 1$)

Schnittpunkt mit der x-Achse: $g(x) = 0$ für $x = \ln(4)$

$N(\ln(4) \mid 0)$

Abstand der beiden Punkte: $d = \sqrt{(-3)^2 + (\ln(4))^2} = \sqrt{9 + (\ln(4))^2}$ (Pythagoras)

$d = \sqrt{9 + (\ln(4))^2} > \sqrt{10}$ da $\ln(4) > \ln(e) = 1$; $e = 2{,}7\ldots$

Bedingung für die Schnittstelle: $m = -\frac{1}{g'(1)} = -\frac{1}{e}$

Normale in $x = 1$ bzw. in $P(1 \mid e - 4)$: $y = -\frac{1}{e}x + b$

Einsetzen ergibt: $e - 4 = -\frac{1}{e} \cdot 1 + b \Rightarrow b = e - 4 + \frac{1}{e} \cdot 1 \neq 0$

Die Normale ist keine Ursprungsgerade.

1.5 $h(x) = a \cdot e^{-x} + b$

(1) ... die Funktion h monoton steigt.

$h'(x) \geq 0$, also $-a \cdot e^{-x} \geq 0$ für $a < 0$, b beliebig

(2) ... das Schaubild von h durch genau zwei Quadranten verläuft.

$a > 0$ und $b \geq 0$; das Schaubild von h verläuft im I. und II. Quadranten

oder $a < 0$ und $b \leq 0$; das Schaubild von h verläuft im III. und IV. Quadranten

oder das Schaubild von h verläuft durch den Ursprung, also $a = -b$

(3) ... die Gerade $y = 2$ waagrechte Asymptote des Schaubildes von h ist.

Die Asymptote hat die Gleichung $y = b$; also $b = 2$; a beliebig

Alle Bedingungen (1) bis (3) gleichzeitig erfüllt, wenn

- $b = 2$:
- die Funktion h monoton steigt: $a < 0$
- das Schaubild von h durch genau zwei Quadranten verläuft:
  Dies gelingt nur, wenn das Schaubild durch den Ursprung verläuft:
  $0 = a \cdot e^{-0} + b \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$; also mit $b = 2$: $a = -2$

III Musteraufgabensätze zur Fachhochschulreife-Prüfung

Musteraufgabensatz 1

Lösung Seite 114 - 121

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel

Punkte

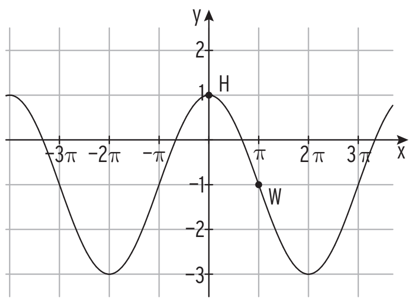
1.1 Geben Sie Lage und Art der Nullstellen der Funktion f mit
$f(x) = -3 \cdot (x-2) \cdot x^2; \quad x \in \mathbb{R}$ an. 3

1.2 Vervollständigen Sie folgende Aussagen:
a) Eine Polynomfunktion 3. Grades hat mindestens ________ Nullstelle(n). 1
b) Eine Polynomfunktion 4. Grades hat höchstens ______ Extremstelle(n), denn ihre Ableitung ist vom Grad ______ . 2

1.3 Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{4}x)$ mit $x \in [-6; 6]$.
Das Schaubild von h ist K_h.
Bestimmen Sie die Periode von h.
Geben Sie die Koordinaten eines Schnittpunktes von K_h mit der x-Achse sowie die Koordinaten eines Extrempunktes an. 5

1.4 Gegeben ist f mit $f(x) = x^3 - 3x; \; x \in \mathbb{R}$ mit dem Schaubild K_f.
Untersuchen Sie das Schaubild auf Wendepunkte. 4

1.5 Der Funktionsterm einer Funktion h hat die Form $h(x) = a \cdot \cos(bx) + c$.
Ihr Schaubild ist K_h.
In der Abbildung ist K_h mit einem Hochpunkt H und einem Wendepunkt W von K_h eingezeichnet.



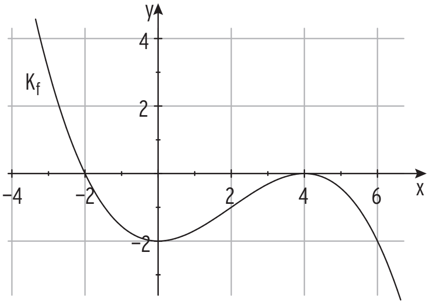
Geben Sie die passenden Werte für a, b und c an. 3

Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel — Punkte

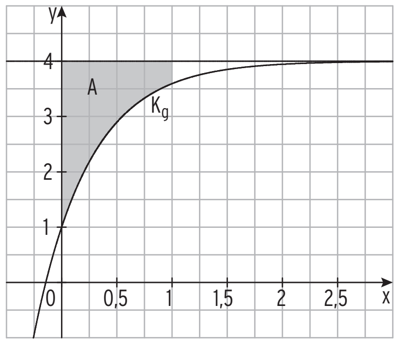
Fortsetzung

1.6 Die Abbildung zeigt das Schaubild K_f einer Polynomfunktion f.
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.
a) $f(-2) < 0$
b) $f'(-2) < 0$
c) $f''(-2) < 0$ — 6



1.7 Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = -5x^3 + 1 - e^{2x};\ x \in \mathbb{R}$. — 2

1.8 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 4 - 3e^{-2x};\ x \in \mathbb{R}$.
Das zugehörige Schaubild K_g ist dargestellt.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A. — 4



30

Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 2 - Teil 2 mit Hilfsmittel — Punkte

2.1 Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades berührt die x-Achse bei $x = -3$ und verläuft durch den Ursprung.
Weiterhin liegt der Punkt $A(1 \mid \frac{16}{3})$ auf dem Schaubild der Funktion.
Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, mit dessen Hilfe sich der Term dieser Funktion bestimmen lässt. 6

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x;\ x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild ist K_f.

2.2 Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von K_f.
Zeichnen Sie K_f in ein geeignetes Koordinatensystem. 9

2.3 Berechnen Sie $\int_{-3}^{1} f(x)dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch. 5

Gegeben sind die Funktionen g mit $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}$ und $h(x) = e^{\frac{1}{2}x};\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von g ist K_g und das Schaubild von h ist K_h.

2.4 K_h soll in y-Richtung so verschoben werden, dass K_g den verschobenen Graphen auf der y-Achse schneidet.
Bestimmen Sie den neuen Funktionsterm. 3

2.5 Die Kurve K_g und die Gerade mit der Gleichung $y = -8$ begrenzen eine Fläche. In diese Fläche soll ein zur y-Achse symmetrisches Dreieck mit den Eckpunkten $S(0 \mid -8)$ und $P(u \mid g(u))$ mit $0 \leq u \leq 3$ einbeschrieben werden.
Skizzieren Sie diesen Sachverhalt für $u = 2$.
Weisen Sie nach, dass für $u \approx 1{,}73$ der Inhalt des Dreiecks maximal wird. 7

30

Musteraufgabensatz 1

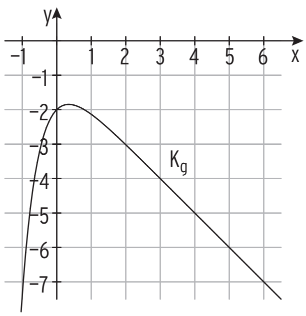
Aufgabe 3 - Teil 2 mit Hilfsmittel **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(\pi x) + 2$: $x \in [-1; 4]$.
Ihr Schaubild ist K_f.

3.1 Zeichnen Sie K_f. Geben Sie die Koordinaten von drei gemeinsamen Punkten mit der x-Achse an. 5

3.2 Der Punkt W(1 | 2) ist ein Wendepunkt von K_f.
Zeigen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = -2\pi \cdot x + 2 + 2\pi$ Tangente an K_f im Punkt W ist.
Die Tangente, die y-Achse und K_f schließen eine Fläche ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. 10

3.3 Die Abbildung zeigt das Schaubild K_g einer Funktion g.



Begründen Sie jeweils, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

a) Die Ableitungsfunktion von g hat im Intervall [0; 1] eine Nullstelle. 2

b) Das Schaubild einer Stammfunktion von g hat im Intervall [0; 1] einen Hochpunkt. 2

c) Die Gerade mit der Gleichung $y = -3x - 4$ ist Tangente an K_g an der Stelle $x = -0{,}5$. 2

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = -e^{-2x} - x - 1$; $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_h.

3.4 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_h. 3

3.5 Anton hat die folgende Rechnung notiert:
$d(u) = f(u) - h(u) = 2\sin(\pi u) + 2 - (-e^{-2u} - u - 1) = 2\sin(\pi u) + e^{-2u} + u + 3$ für $0 < u < 1$
Untersuchung ergibt ein relatives Maximum in $u \approx 0{,}51$ mit $d(0{,}51) = 5{,}87$
Randwerte: $d(0) = 4$; $d(1) = 4{,}14$

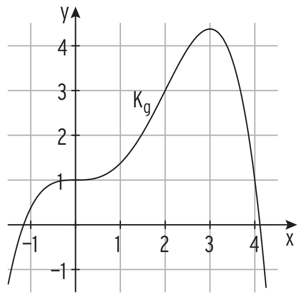
Formulieren Sie eine hierzu passende Aufgabenstellung. 6

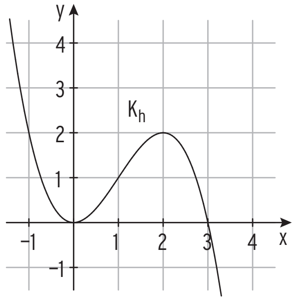
30

Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 4 - Teil 2 mit Hilfsmittel **Punkte**

Die Abbildungen zeigen die Schaubilder K_g und K_h der Funktionen g und h.





4.1 Begründen Sie mit Hilfe von vier Eigenschaften, dass K_h das Schaubild der Ableitungsfunktion von g ist. 4

Zum Schaubild K_h gehört der Funktionsterm $h(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$; $x \in \mathbb{R}$.

4.2 Berechnen Sie alle Stammfunktionen der Funktion h.

Welche dieser Stammfunktionen gehört zu K_g? 3

4.3 Die Gerade t mit $t(x) = -4{,}5x + 13{,}5$ ist Tangente an K_h. Berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes. 6

Gegeben sind die Funktionen u und v mit $u(x) = 2\cos(x) + 3$ und $v(x) = -2\cos(x) + 1$; $x \in [0;\, 2\pi]$. Ihre Schaubilder heißen K_u und K_v.

4.4 Geben Sie den Wertebereich sowie die exakte Periodenlänge der Funktion u an.
Zeigen Sie, dass die Wendepunkte von K_u auf der Geraden $y = 3$ liegen. 5

4.5 Zeichnen Sie die Schaubilder K_u und K_v in ein gemeinsames Koordinatensystem. Beschreiben Sie, wie K_v aus K_u hervorgeht. 7

4.6 Lena bereitet sich auf die anstehende Mathematikprüfung vor.
In ihrem Heft findet sie folgenden Aufschrieb:

$$u(x) = v(x) \qquad 2\cos(x) + 3 = -2\cos(x) + 1$$
$$4\cos(x) = -2$$
$$\cos(x) = -\frac{1}{2}$$
$$x = \frac{2}{3}\pi$$
$$A = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} ((2\cos(x) + 3) - (-2\cos(x) + 1)dx = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung. 5

30

IV Prüfungen zur Fachhochschulreife

Prüfung zur Fachhochschulreife 2017/2018

Lösungen Seite 175 - 183

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1** **Punkte**

1.1 Gegeben ist folgende Wertetabelle einer Polynomfunktion f, ihrer ersten Ableitungsfunktion f′ und ihrer zweiten Ableitungsfunktion f″.

Das Schaubild von f ist K_f.

x	− 2	− 1	0	1	2	3	4
f(x)	30	22	2	− 24	− 50	− 70	− 78
f′(x)	0	− 15	− 24	− 27	− 24	− 15	0
f″(x)	− 18	− 12	− 6	0	6	12	18

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse, eines Hoch- und eines Tiefpunktes von K_f an.

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K_f im Punkt $P(-1 \mid f(-1))$. 6

1.2 Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = -\frac{1}{24}x^2 \cdot (x-5) \cdot (x+3);\ x \in \mathbb{R}$.

Geben Sie Art und Lage der Nullstellen an und skizzieren Sie davon ausgehend das Schaubild von g. 5

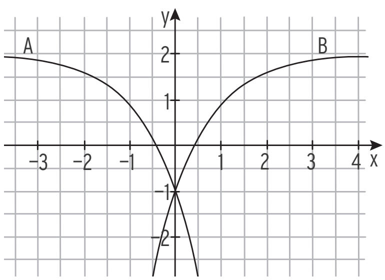
1.3 Lösen Sie die Gleichung $e^{2x} - 3e^x = 0$. 4

1.4 Gegeben ist die Funktion h mit

$h(x) = a \cdot e^{-x} + b;\ x \in \mathbb{R};\ \ a, b \neq 0$.

Begründen Sie, welches der Schaubilder A bzw. B zur Funktion h gehört.

Bestimmen Sie a und b. 5



1.5 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx$. 4

1.6 Geben Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$ an. 3

1.7 Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen:

$g'(3) = 2$ $\qquad g''(3) = 0$ $\qquad g'''(3) \neq 0$

Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen? 3

30

Hinweis: 1.6 und 1.7 neu aufgrund der Prüfungsvorgaben 2022.

Prüfung zur Fachhochschulreife 2017/2018

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2** **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f.

2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte von K_f mit der x-Achse und die Extrempunkte von K_f.
Zeichnen Sie K_f für $-1 \leq x \leq 3{,}5$. 9

2.2 Berechnen Sie $\int_0^3 -f(x)dx$.
Markieren Sie die Fläche, deren Inhalt mit diesem Ausdruck berechnet wird, in Ihrem Schaubild aus Aufgabe 2.1. 5

2.3 Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen falsch oder wahr sind:
a) Jede Polynomfunktion vierten Grades besitzt eine Nullstelle.
b) Jede Nullstelle einer Funktion ist Extremstelle ihrer Stammfunktion.
c) Das Schaubild jeder Polynomfunktion dritten Grades besitzt sowohl einen Hoch- als auch einen Tiefpunkt. 6

Die Einwohnerzahl eines Landes wächst entsprechend der Funktion g mit $g(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}$; $a, b \neq 0$.
Dabei ist t die Zeit in Jahren, t = 0 ist das Jahr 2016 und g(t) gibt die Einwohnerzahl des Landes in Millionen zum Zeitpunkt t an.
Im Jahr 2016 lebten 120 Millionen Menschen in dem Land, im Jahr 2018 sind es 126 Millionen Menschen.

2.4 Bestimmen Sie die Werte für a und b. 3

Im Folgenden sei a = 120 und b = 0,025.

2.5 Bestimmen Sie die Bevölkerungszahl im Jahr 2033.
In welchem Jahr war unter diesen Vorgaben die Bevölkerungszahl halb so groß wie im Jahr 2016? 4

2.6 Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die Einwohnerzahl jährlich zunimmt. 3

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2017/2018

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 3** **Punkte**

Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$f(x) = -2 \cdot e^{-0,5x} + 3$, $g(x) = -2 \cdot \sin(0,5 \cdot x) + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K_f, das Schaubild von g ist K_g.

3.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von K_f.
Zeigen Sie, dass K_f keine Extrempunkte und keine Wendepunkte besitzt.
Zeichnen Sie K_f für $-2 \leq x \leq 6$. 9

3.2 Begründen Sie, dass K_f und K_g unendlich viele Schnittpunkte haben.
Das Schaubild K_f wird so verschoben, dass es keine gemeinsamen Punkte mit K_g hat.
Geben Sie einen passenden Funktionsterm an.
Kann K_f so verschoben werden, dass es K_g in einem Tiefpunkt berührt?
Begründen Sie. 6

3.3 Zeigen Sie, dass der Punkt $W(2\pi \mid 3)$ Wendepunkt von K_g ist.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in W. 7

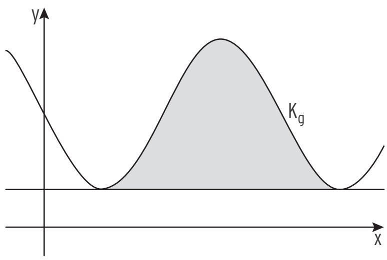
3.4 Johanna soll den Inhalt der in der Zeichnung schraffierten Fläche berechnen. Nur einer der Ansätze a) bis c) liefert das richtige Ergebnis.

Nennen Sie je ein Argument, warum die anderen beiden Ansätze falsch sind.

a) $A = \int_{\pi}^{5\pi} (-2 \cdot \sin(0,5x) + 3)dx$

b) $A = \int_{\pi}^{5\pi} (-2 \cdot \sin(0,5x) + 2)dx$

c) $A = \int_{\pi}^{3\pi} (-2 \cdot \sin(0,5x) + 3 - 1)dx$



Berechnen Sie den gesuchten Flächeninhalt. 8

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2017/2018

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 4** **Punkte**

4.1 Gegeben ist das Schaubild K_h einer trigonometrischen Funktion h.

Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

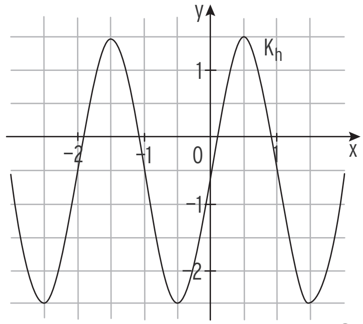
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) $h(-2{,}25) < 0$

b) $h'(-2{,}25) < 0$

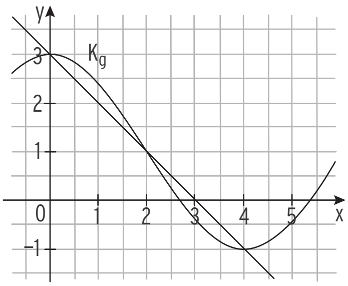
c) $h''(-2{,}25) < 0$

d) $\int_{-2{,}25}^{0} h(x)\,dx < 0$ 8



4.2 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer trigonometrischen Funktion g mit dem Hochpunkt H(0 | 3) und dem Tiefpunkt T(4 | − 1).

Geben Sie einen möglichen Funktionsterm von g an.



Die Gerade mit der Gleichung $y = -x + 3$ verläuft durch die Punkte H und T.

Begründen Sie, dass Folgendes gilt: $\int_{0}^{4} (g(x) - (-x + 3))\,dx = 0.$ 6

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_f.

4.3 Untersuchen Sie K_f auf Symmetrie.

Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte von K_f und der x-Achse. Zeichnen Sie K_f für $-2{,}5 \leq x \leq 2{,}5$.

Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_f. 13

4.4 Ermitteln Sie die Gleichung der Stammfunktion von f, deren Schaubild durch den Punkt P(1 | 1) geht. 3

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2017/2018 – Lösungen

Prüfung zur Fachhochschulreife 2018 **Aufgaben Seite 171 - 174**

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1**

1.1 Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 \mid 2)$

Hochpunkt: $H(-2 \mid 30)$ Bedingungen: $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) = -18 < 0$

Tiefpunkt: $T(4 \mid -78)$ Bedingungen: $f'(4) = 0$ und $f''(4) = 18 > 0$

Ansatz für die Tangente: $y = mx + b$

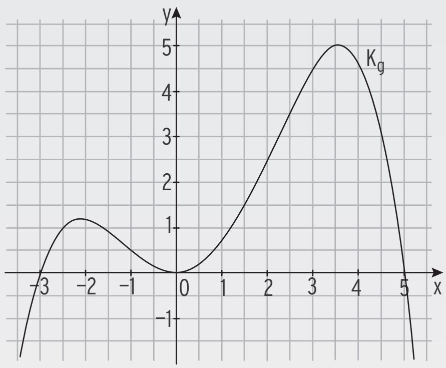
$f'(-1) = -15 = m$; Punktprobe mit $(-1 \mid 22)$: $22 = -15 \cdot (-1) + b \Rightarrow b = 7$

Gleichung der Tangente: $y = -15x + 7$

1.2 Der Funktionsterm von g ist mit $g(x) = -\frac{1}{24}x^2 \cdot (x-5) \cdot (x+3)$ im Nullstellenansatz gegeben. Die Art und Lage der Nullstellen kann hieraus abgelesen werden: Doppelte Nullstelle in $x = 0$; Einfache Nullstellen in $x = 5$ und $x = -3$.

Skizze:

Hinweis: Aus dem negativen Wert des Leitkoeffizienten $-\frac{1}{24}$ ergibt sich ein Verlauf des Schaubildes vom III. in den IV. Quadranten.



1.3 Gleichung: $e^{2x} - 3e^x = 0$

Ausklammern: $e^x \cdot (e^x - 3) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $e^x \neq 0$ $e^x - 3 = 0$

$e^x = 3$

Logarithmieren führt zur Lösung: $x = \ln(3)$

Prüfung zur Fachhochschulreife 2017/2018 – Lösung

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1**

1.4 Da die Funktion h vom Typ „e^{-x}" ist, nähert sich das Schaubild für $x \to \infty$ seiner Asymptote an. Somit gehört Schaubild B zu h.

Die Gleichung der Asymptote lautet y = 2, somit gilt b = 2.

Das Schaubild verläuft durch $S_y(0 \mid -1)$. Einsetzen der Koordinaten in $h(x) = a \cdot e^{-x} + 2$ führt auf den Wert von a: $-1 = a \cdot e^0 + 2$

$e^0 = 1$ $\quad -1 = a \cdot 1 + 2$

$-3 = a$

1.5 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \tfrac{\pi}{4}) - \frac{1}{2} \cdot \sin(0)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin(\tfrac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} \cdot \sin(0)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{2}$$

1.6 Nullstellen von f: $f(x) = 0$ $\quad 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x = 0$

Ausklammern: $3x(x^2 - 9) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $3x = 0$ oder $x^2 - 9 = 0$

Nullstellen: $x = 0$ oder $x = \pm 3$

1.7 $g'(3) = 2$ — Die Steigung der Tangente an das Schaubild von g an der Stelle x = 3 ist 2.

$g''(3) = 0;\ g'''(3) \neq 0$ — Das Schaubild der Funktion g hat einen Wendepunkt an der Stelle x = 3.

Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Prüfung der Fachhochschulreife
an Berufskollegs zum Erwerb der Fachhochschulreife u.a.

Hauptprüfung 2021

Prüfungsfach	**Mathematik (FHSR1031) - Pflichtteil (Teil 1)**

Arbeitszeit	**8.30 Uhr bis ca. 9.30 Uhr** (ca. 60 Minuten)
Bearbeitungshinweise	Der **hilfsmittelfreie Prüfungsteil** ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten **(Pflichtteil).** Der Prüfling ist verpflichtet, die Vollständigkeit des Aufgabensatzes umgehend zu überprüfen und fehlende Seiten der Aufsicht führenden Lehrkraft anzuzeigen.
Hilfsmittel	**keine**
Hinweise für die Fachlehrkraft	• Die Prüflinge werden nach ca. 60 Minuten informiert, dass die **anteilige Prüfungszeit** verstrichen ist. • Wenn der **hilfsmittelfreie Teil** der Prüfung in Form der Schülerlösung und des Aufgabenteils unwiderruflich abgegeben wurde, erhalten die Schüler die zugelassenen Hilfsmittel für den **hilfsmittelgestützten Prüfungsteil (Teil 2).**

Prüfung zur Fachhochschulreife 2020/2021

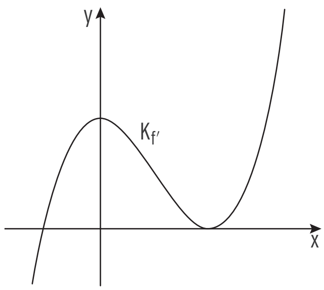
Lösungen Seite 215 - 218

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1a** **Punkte**

1.1 Lösen Sie die Gleichung $x^4 - 2x^2 - 8 = 0,\ x \in \mathbb{R}$. 5

1.2 Das Schaubild einer Polynomfunktion dritten Grades berührt die x-Achse an der Stelle $x = -1$ und schneidet beide Koordinatenachsen jeweils bei 4. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm. 4

1.3 Gegeben ist der Ausschnitt aus dem Schaubild einer Ableitungsfunktion f'. Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. 6



a) Das Schaubild der zugehörigen Funktion f besitzt einen Hochpunkt.
b) Das Schaubild der zugehörigen Funktion f ist rechtsgekrümmt für $x \leq 0$.
c) $f'(0) > 0$

1.4 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{4}x^3 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$. 4
Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von g im Punkt $P(2 \mid g(2))$.

1.5 Zeigen Sie, dass das Schaubild der Funktion h mit $h(x) = e^x - x,\ x \in \mathbb{R}$ für $x < 0$ fällt. 3

1.6 Berechnen Sie $\int_0^{\ln(4)} (e^x - 1)\,dx$. 4

1.7 Gegeben sind zwei Schaubilder mit den Gleichungen 4
$y = \frac{1}{2}x^2 - x$ und $y = -\sin(b \cdot x) + x,\ x \in \mathbb{R}$
Der Parameter b kann den Wert 1 oder 2 annehmen.
Ermitteln Sie, welche der beiden Werte b annehmen muss, damit sich beide Schaubilder im Ursprung berühren.

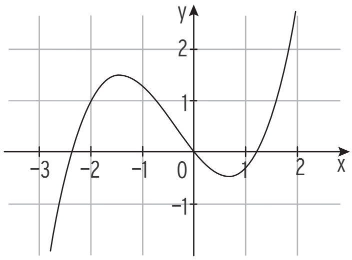
30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2020/2021

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1b** **Punkte**

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g mit $g(x) = x^3 + x^2 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$. 5

Begründen Sie, warum nebenstehendes Schaubild nicht zu g gehören kann.



1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x - 1)(x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$. 6

Skizzieren Sie das Schaubild und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die das Schaubild im 4. Quadranten mit den Koordinatenachsen bildet.

1.3 Bestimmen Sie zwei Lösungen der Gleichung $2\sin(x) - 2 = 0$. 4

1.4 Zeigen Sie, dass das Schaubild der Funktion h mit 5

$h(x) = 2e^{2x} + 3x - 5$, $x \in \mathbb{R}$ linksgekrümmt ist.

Weisen Sie nach, dass h zwischen $x = 0$ und $x = 0{,}5$ eine Nullstelle besitzt.

1.5 Gegeben ist die Funktion k mit $k(x) = x^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$. 6

Ihr Schaubild heißt K.

Bestimmen Sie die Gleichung einer Tangenten an K, die senkrecht zur Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{1}{12}x + 2$ steht.

1.6 Bestimmen Sie eine Lösung für $u > 0$, sodass die Gleichung 4

$\int_u^3 0{,}5x\,dx = \frac{1}{4}$ erfüllt ist.

30

Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Prüfung der Fachhochschulreife
an Berufskollegs zum Erwerb der Fachhochschulreife u.a.

Hauptprüfung 2021

Prüfungsfach	**Mathematik (FHSR1031) - Analysisaufgaben (Teil 2)** **Aufgabe 2 bis 4**

Arbeitszeit	**Ca. 9.30 Uhr bis 11.50 Uhr** (ca. 140 Minuten)
Bearbeitungshinweise	Aus den vorgelegten **drei Aufgaben** wählen die Schülerinnen und Schüler **zwei Aufgaben** zur Bearbeitung aus. Jede Aufgabe ist mit einem neuen Reinschriftbogen zu beginnen. Der Prüfling ist verpflichtet, die Vollständigkeit des Aufgabensatzes umgehend zu überprüfen und fehlende Seiten der Aufsicht führenden Lehrkraft anzuzeigen.
Hilfsmittel	"Merkhilfe Mathematik" für die Sekundarstufe II an beruflichen Schulen in Baden Württemberg Wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR)
Hinweise für die Fachlehrkraft	• Wenn der **hilfsmittelfreie Teil** der Prüfung in Form der Schülerlösung und des Aufgabenteils unwiderruflich abgegeben wurde, erhalten die Schüler die zugelassenen Hilfsmittel für den **hilfsmittelgestützten Prüfungsteil (Teil 2).**

Prüfung zur Fachhochschulreife 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel Lösungen Seite 219 - 224

Aufgabe 2 **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 27,\ x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild heißt K_f.

2.1 Zeigen Sie, dass f bei $x_1 = -1$ und bei $x_2 = 3$ Nullstellen hat. 12
Untersuchen Sie K_f auf Extrem- und Wendepunkte.
Zeichnen Sie K_f für $-1{,}25 \leq x \leq 4$.

2.2 Prüfen Sie, ob die y-Achse den Inhalt der Fläche zwischen K_f und der x-Achse im Verhältnis 1 : 2 teilt. 5

2.3 Von einem zur y-Achse symmetrischen Schaubild einer ganzrationalen Funktion vierten Grades kennt man einen Hochpunkt T(2 | 9) und eine Nullstelle bei $x = -1$. 4
Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, mit dessen Hilfe man einen passenden Funktionsterm bestimmen könnte.

Eine blaue Flüssigkeit wird in einem Labor bei einem Versuch erhitzt. Die Temperatur T der Flüssigkeit in Grad Celsius (°C) wird durch die Funktion
$T(t) = 105 - 83e^{-0{,}15t},\ t \geq 0$ beschrieben, dabei ist die t die Zeit in Minuten.
Diese Temperatur wir von einem Thermometer fortlaufend überwacht.

2.4 Geben Sie den Messbereich an, den das Thermometer für diesen Versuch mindestens erfassen können muss. 2

2.5 Zeigen Sie, das die momentane Änderungsrate der Temperatur zum Zeitpunkt $t = 5$ kleiner ist, als die durchschnittliche Änderungsrate der Temperatur in den ersten fünf Minuten. 4

2.6 Bei einer Temperatur von 92°C schlägt die Farbe der Flüssigkeit in grün um. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem dies passiert. 3

30