Mathematik-Abitur

Band 1

Analysis
Infinitesimalrechnung

zur

Abiturvorbereitung

und zum

Selbststudium

von

Reinhold Goldmann

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Aufgaben zur Infinitesimalrechnung stellen Schwerpunkte der Abiturprüfung dar.

Mit diesem Buch versucht der Autor die wichtigsten Themenbereiche der Analysis anschaulich und möglichst übersichtlich darzustellen. Während vieler Jahre der Vermittlung mathematischer Themen an Lernende verschiedenster Altersgruppen gab es ab und zu Verständnisschwierigkeiten, die einem Lehrenden oft nicht mehr bewusst sind. Manchmal wird ein Mathematiker aber auch durch aufmerksame Zuhörer auf einfachere Lösungswege hingewiesen, die das Verstehen mathematischer Zusammenhänge durchaus erleichtern können. Einige dieser Hinweise wurden in den Unterricht und letztlich auch in dieses Buch übernommen.

In der Mathematik können die unterschiedlichsten Wege zum Ziel führen. Deshalb ist ein verständnisvoller Lehrender stets bemüht, die sinnvollsten und einfachsten Lösungswege zu vermitteln. In dieser vorliegenden Zusammenfassung des Lehrstoffs der mathematischen Oberstufe des Gymnasiums wird daher versucht, die wichtigsten Abiturthemen so verständlich wie möglich und ohne komplizierte Umwege darzulegen.

Die in diesem Buch gestellten Aufgaben sollten von den Lesern selbstständig zu lösen versucht werden und erst anschließend mit dem Lösungsanhang (Kapitel 14) überprüft werden. Mathematik lernt man am ehesten durch eigenes Erarbeiten. Es kann manchmal auch sinnvoll sein, einen nicht verstandenen Lösungsweg erst nach einiger

Zeit nachzuvollziehen. „Manches erledigt sich durch Warten“. Dies ist im täglichen Leben, wie in der Mathematik ein hilfreiches Mittel, um Frust zu vermeiden. Anschließend sollte man sich allerdings seiner Fehler bewusst werden, um diese künftig zu vermeiden.

Viele wichtige Mathematiker der Vergangenheit und andere heute angesehene Wissenschaftler sind durchaus mal Irrtümern aufgesessen, die sie erst später oder auch niemals berichtigen konnten.

Was heute als selbstverständlich gelehrt wird und einem Lernenden so großartig und manchmal nur schwer lösbar erscheint, konnte erst nach vielen Jahren, Jahrzehnten oder gar Jahrhunderten geklärt werden. Dazu gehören Fragen zur „Quadratur des Kreises“ aus dem Altertum, das „Vierfarben-Problem“, welches erst im 21. Jahrhundert mithilfe von elektronischen Rechnern gelöst werden konnte, die „Goldbach‘sche Vermutung”, die besagt, dass jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden kann (z. B. 18 = 11 + 7) und viele weitere noch ungelöste Fragestellungen.

Auch in diesem Buch wird zum Thema Integralrechnung auf nur schwer oder gar nicht lösbare Integrale hingewiesen (Kapitel 11). Obwohl die Mathematik für die Lösung vieler wissenschaftlicher, technischer oder wirtschaftlicher Probleme unerlässlich ist, kann nicht jede Fragestellung unkompliziert gelöst werden. Die Erkenntnis und der anschließende mathematische Beweis der Unlösbarkeit einer Aufgabenstellung gehört zum Wesen der Mathematik.

Man sollte sich daher niemals durch Aufgaben jeglicher Art entmutigen lassen, sondern versuchen, möglichst alternative Lösungswege einzuschlagen. Es kann durchaus Freude bereiten, ein Problem zu einem späteren Zeitpunkt gelöst oder verstanden zu haben.

Das vorliegende Lehrbuch eignet sich nicht nur für die Vorbereitung der Abiturprüfung, sondern auch für Personen, die sich in die höhere Mathematik einarbeiten möchten.

1. Einführung

Gottfried Wilhelm Leibniz und **Isaac Newton** entwickelten im 17. Jahrhundert unabhängig voneinander die Infinitesimalrechnung. Beide kamen mit verschiedenen Ansätzen zu sehr ähnlichen Ergebnissen.

Leibniz beschrieb eine mathematische Kurve als Menge unendlich vieler winzig kleiner Punkte. Er verstand eine Kurve als ein Unendlich-Eck. Leibniz erkannte auch, dass die Flächenberechnung unter einer Kurve die umgekehrte Art zur Differenzenbildung, also die Integralrechnung ist.

Newton setzte Tangenten an die Punkte einer Kurve und betrachtete diese als Resultat stetiger Bewegung.

Er benannte eine vergrößerte oder fließende Größe als Fluente.
Die Geschwindigkeit nannte er Fluxion, ein unendlich kleines Zeitintervall.

Leibniz veröffentlichte seine Ergebnisse im Jahre 1684, Newton erst 1687. Er schrieb verständlicher als Newton. Auch deshalb hat sich weitgehend seine Symbolik durchgesetzt: Zum Beispiel „d“ für Differential, der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ und das Integral $\int f(x)dx$.
Auch der Begriff „Infinitesimalrechnung“ stammt von Leibniz, während Newton seine Variante „Fluxionsrechnung“ nannte.

Im 19. Jahrhundert erhielt die Infinitesimalrechnung eine mathematisch strenge formale Form. Die Mathematiker Cauchy, Weierstraß und Dedekind führten Grenzwertbetrachtungen ein, welche die Nutzung infinitesimaler Zahlen überflüssig machten.

Augustin-Louis Cauchy entwickelte die von Leibniz und Newton erarbeiteten Grundlagen weiter, wobei er deren fundamentale Aussagen auch formal bewies und einer neuen Auffassung des Funktionsbegriffs zum Durchbruch verhalf.

Karl Weierstraß widmete sich der logisch korrekten Fundierung der Analysis über Konvergenzkriterien für Reihen, Behandlung unendlicher Produkte und erste Axiomatisierungen der reellen Zahlen

Richard Dedekind führte u. a. eine exakte Fundierung der reellen Zahlen ein und er präzisierte den Grenzwertbegriff.

2. Funktionen

Im einfachsten Fall einer Funktion werden zwei Größen einander zugeordnet.

Abhängigkeiten ergeben sich zum Beispiel

Preis P einer Ware zu deren Menge M:

$$M \rightarrow P$$

Fahrzeit t eines Fahrzeugs zur Strecke s:

$$s \rightarrow t$$

Note N einer Prüfungsarbeit zu den erzielten Punkten P:

$P \rightarrow N$ usw.

So ist im letzten Beispiel die Note eine **abhängige** und die Punktezahl eine **unabhängige Variable**.

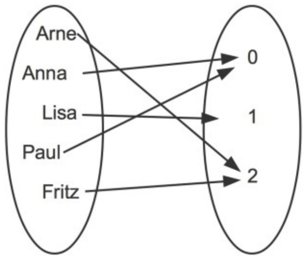
Definition:

Eine Funktion ordnet **jedem Wert** einer unabhängigen Variable x **genau einen** Funktionswert f(x) zu:

$$f: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{f(x)}$$

In der Abbildung wird jeder Person genau eine Zahl zugeordnet, nämlich die Anzahl der Geschwister dieser Person.

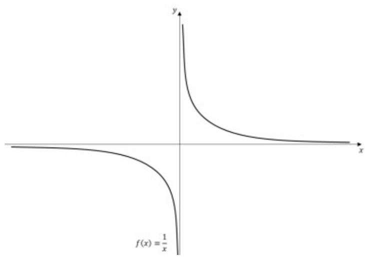
Damit wird jeder Person genau ein Wert zugeordnet,
was obiger Definition entspricht.



Beispiele für Funktionsterme mit ihren Graphen:

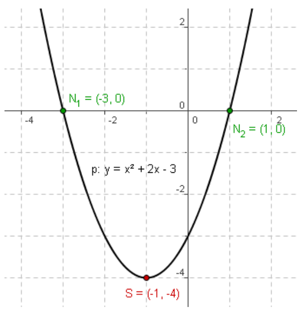
B1. f(x) = $\frac{1}{x}$

Hyperbel



B2. f(x) = $x^2 + 2x - 3 =$
$= (x + 1)^2 - 4$

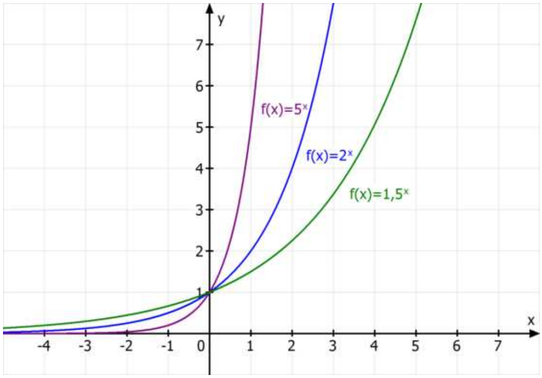
Parabel



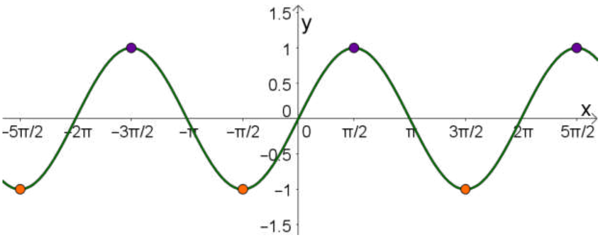
B3.

exponentielle
Funktionen

$f(x) = 5^x$
$f(x) = 2^x$
$f(x) = 1{,}5^x$



B4. $f(x) = \sin(x)$



trigonometrische Funktion

2.1 Definitionsbereich

Der Definitionsbereich ist die Menge aller unabhängigen Variablen, für die eine Funktion definiert ist.
Elemente der Definitionsmenge sind die **x-Werte**.

Im Beispiel B1 gilt:

$$D = \mathbb{R}\backslash\{0\} = \{x \in \mathbb{R} | \ x \neq 0\}$$

Diese Hyperbel-Funktion ist für alle reellen **x-Werte** definiert, außer für die Zahl Null.

2.2 Wertebereich

Der Wertebereich ist die Menge aller Funktionswerte, die aus den Elementen des Definitionsbereichs entstehen. Elemente der Wertemenge sind die **y-Werte**.

Im Beispiel B4 gilt:

$$W = [-1;+1] = \{y \in \mathbb{R} | \ -1 \leq y \leq +1\}$$

Diese Funktion kann nur **y-Werte** zwischen -1 und +1 annehmen.

Aufgaben:

A1. Gib den Definitions- und den Wertebereich der Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 3$ an.

A2. Gib den Definitions- und den Wertebereich der Funktion $f(x) = \sqrt{x - 2}$ an.

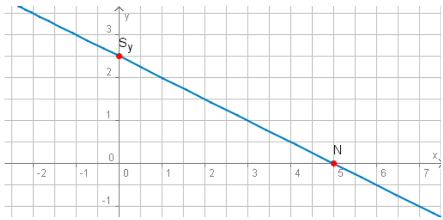
2.3 Achsenschnittpunkte

2.3.1 Schnitt mit der x-Achse

Zur Berechnung des Schnitts einer Funktion mit der x-Achse wird f(x) = **y = 0** gesetzt, womit sich die sogenannten **Nullstellen** ergeben.

Beispiel:

B5. Wo schneidet der Graph der Funktion
$f: x \rightarrow -0{,}5x + 2{,}5$
die x-Achse?



$y = -0{,}5x + 2{,}5 = 0$
$x = 5$
Nullstelle **N(5;0)**

2.3.2 Schnitt mit der y-Achse

Für die Bestimmung dieser Schnittpunkte wird **x = 0** gesetzt:

Beispiele:

B6. Wo schneidet der Graph der Funktion
$f: x \rightarrow -0{,}5x + 2{,}5$ die y-Achse?

Mit $x = 0$ gilt $y = 2{,}5$
Schnittpunkt **Y(0;2,5)**

B7. Die Achsenschnittpunkte des Funktionsterms
$y = x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.sind zu berechnen.

Für den Schnitt mit der x-Achse wird
zuerst $\boxed{x^2 = z}$ gesetzt:

$y = z^2 - 5z + 6 = 0$
$z_1 = 2 = (x_{1/2})^2$
$z_2 = 3 = (x_{3/4})^2$

$X_1(\sqrt{2}; 0)$; $X_2(-\sqrt{2}; 0)$; $X_3(\sqrt{3}; 0)$; $X_4(-\sqrt{3}; 0)$

Schnitt mit der y-Achse:

mit $x = 0$ folgt $y = 6$

Y(0;6)

Aufgaben:

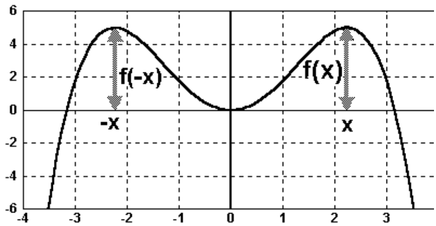
A3. Bestimme die Achsenschnittpunkte des Graphen der Funktion $f: x \to 4 - x^2$.

A4. Berechne die Achsenschnittpunkte des Funktionsterms $f(x) = y = \sqrt{3 - x}$

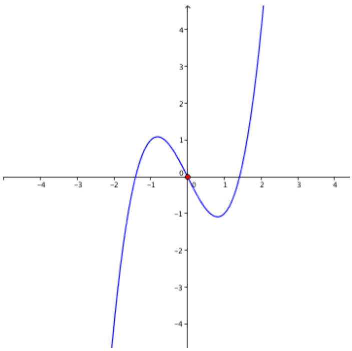
2.4 Symmetrie

2.4.1 Achsensymmetrie zur Ordinate

Aus $\boxed{f(-x) = f(x)}$
folgt **Achsensymmetrie**
zur y-Achse.



2.4.2 Punktsymmetrie zum Ursprung



Mit $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ gilt
Punktsymmetrie zum
Koordinatenursprung

Beispiele:

B8. Welche Symmetrie weist die Funktion
f: $x \rightarrow 0{,}5x^2 + 1$ auf?

$$f(-x) = 0{,}5(-x)^2 + 1 = 0{,}5x^2 + 1 = f(x)$$
$\Rightarrow$ Achsensymmetrie zur Ordinate

B9. Bestimme das Symmetrieverhalten des Funktionsterms $f(x) = x^3 - x$.

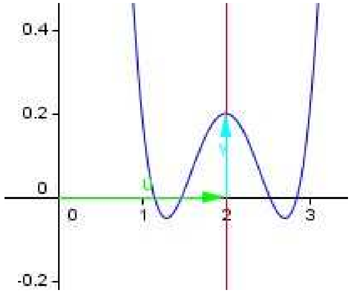
$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x =$$
$$= -(x^3 - x) = -f(x)$$
$\Rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung

B10. Weist der Funktionsterm $f(x) = 2x - 2$ eine Symmetrie auf?

$$f(-x) = 2(-x) - 2 = -2x - 2 \neq f(x) \neq -f(x)$$
$\Rightarrow$ kein Symmetrieverhalten zur Ordinate oder zum Ursprung

2.4.3 Symmetrie zu beliebiger Achse

Gilt die Beziehung
$\boxed{\mathbf{f(x_0 + h) = f(x_0 - h)}}$
mit einem beliebigen
h > 0, dann ist die
Gerade x_0 die Gleichung
der senkrechten
Symmetrieachse.



Durch die Verschiebung des Graphen um den gleichen Wert nach links und nach rechts, lässt sich die Symmetrieachse ermitteln.

Beispiel:

B11. Verläuft die Funktion f: x $\rightarrow x^2 - 4x + 4$
symmetrisch zur Achse $x_0 = 2$?

$$f(2+h) = (2+h)^2 - 4(2+h) + 4 =$$
$$= 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 4 = \boldsymbol{h^2}$$
$$f(2-h) = (2-h)^2 - 4(2-h) + 4 =$$
$$= 4 - 4h + h^2 - 8 + 4h + 4 = \boldsymbol{h^2}$$

Die beiden Ergebnisse sind identisch, womit gezeigt ist, dass $\mathbf{x_0 = 2}$ die **Symmetrieachse** ist.

2.4.4 Punktsymmetrie zu beliebigem Zentrum

Eine Punktsymmetrie liegt vor, wenn für einen Punkt $P(x_0;y_0)$ gilt:

$$\boxed{\mathbf{f(x_0 + h) - y_0 = - f(x_0 - h) + y_0}}$$

$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$

Beachte die unterschiedlichen Vorzeichen!

Beispiel:

B12. Ist die Funktion f: x $\rightarrow \frac{x}{x-1}$ symmetrisch zum Punkt P(1;1)?

$$\frac{1+h}{1+h-1} - 1 = \frac{1+h}{h} - \frac{1 \cdot h}{h} = \frac{1+h-h}{h} = \mathbf{\frac{1}{h}}$$

$$-\frac{1-h}{1-h-1} + 1 = -\frac{1-h}{-h} + 1 = -\frac{1-h+h}{-h} = \boldsymbol{\frac{1}{h}}$$

Wegen der Identität der beiden Ergebnisse liegt Punktsymmetrie zum Zentrum P(1;1) vor.