

2023 Training

Abschlussprüfung

ActiveBook
• Interaktives
Training

**MEHR
ERFAHREN**

Realschule Bayern

Mathematik II/III

+ *Basiswissen mit Übungen*
+ *Aufgaben im Stil der Prüfung*

Original-Prüfungsaufgaben
2022 zum Download

STARK

Inhalt

Vorwort

Hinweise zur Prüfung

Training Grundwissen

1 Grundwissen 5.–8. Klasse

1.1	Termumformungen	3
	Summen- und Produktterme	5
	Binomische Formeln	8
1.2	Extremwertbestimmung bei quadratischen Termen	9
1.3	Lineare Gleichungen und Ungleichungen	12
1.4	Bruchgleichungen	15
1.5	Prozentrechnung	17
	Begriffe und Abkürzungen	17
	Berechnungen	17
1.6	Vektoren	20
	Regel „Spitze minus Fuß“	20
	Berechnungen mithilfe von Vektoren	20
	Mittelpunktsberechnung einer Strecke	21
1.7	Dreiecke	22
	Eigenschaften beliebiger Dreiecke	22
	Besondere Dreiecke	24
1.8	Vierecke	25
	Eigenschaften beliebiger Vierecke	25
	Besondere Vierecke	25

2 Grundwissen 9. Klasse

2.1	Lineare Funktionen	28
	Direkte Proportionalität	28
	Ursprungsgeraden: $y = m \cdot x$	29
	Zeichnen von Ursprungsgeraden	30
	Geraden in beliebiger Lage – Die Normalform: $y = mx + t$	31
	Berechnung der Geradengleichung mithilfe zweier Punkte	32
	Zeichnen von Geraden	33
	Parallele und orthogonale Geraden	35
2.2	Lineare Gleichungssysteme	37
	Grafisches Lösungsverfahren	37
	Rechnerische Lösungsverfahren	39
2.3	Reelle Zahlen	42
	Die Quadratwurzel	42
	Irrationale Zahlen	43
	Die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R}	43
	Rechnen mit Wurzeltermen	43

2.4	Flächeninhalt ebener Figuren	47
	Dreiecke	47
	Vierecke	49
	Flächenberechnung mithilfe von Vektoren im Koordinatensystem	51
	Funktionale Abhängigkeiten – Veränderung von ebenen Figuren	53
2.5	Strahlensätze	59
2.6	Rechtwinklige Dreiecke	63
	Der Satz des Pythagoras	63
	Folgerungen aus dem Satz des Pythagoras	65
	Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck	67
2.7	Berechnungen am Kreis	71
	Flächeninhalt und Umfang eines Kreises	71
	Kreisteile – Kreissektor und Kreisbogen	72
	Das Kreissegment	74
2.8	Grundbegriffe der Statistik	75
	Spannweite, Modalwert, arithmetisches Mittel, Zentralwert	75
	Kombinatorik – Anzahl der Möglichkeiten	77
	Vertauschungen – Permutationen	77
	Absolute und relative Häufigkeit	78
2.9	Zufallsexperimente	79
	Absolute und relative Häufigkeit bei Zufallsexperimenten	80
	Ergebnis und Ergebnisraum	80
	Ereignis und Gegenereignis	81
	Vierfeldertafel	82
	Laplace-Experimente und Wahrscheinlichkeiten bei einstufigen Zufallsexperimenten	85
	Wahrscheinlichkeit von Ereignis und Gegenereignis	87
	Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten	87
3	Grundwissen 10. Klasse	
3.1	Quadratische Funktionen	90
	Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2$	90
	Funktionen mit Gleichungen der Form $y = a \cdot x^2$	90
	Die Scheitelform: $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$	92
	Von der Scheitelform zur allgemeinen Form	93
	Von der allgemeinen Form zur Scheitelform	94
	Berechnen von Parabelgleichungen	94
	Extremwerte	96
3.2	Quadratische Gleichungen	100
	Diskriminante und Lösungsformel	101
	Nullstellen von Parabeln	103
	Schnitt von Parabel und Gerade	104
	Schnitt von Parabel mit Parabel – System quadratischer Gleichungen	106
3.3	Exponentialfunktionen und Logarithmen	111
	Exponentialfunktionen	111
	Der Logarithmus	114
	Der dekadische Logarithmus	115
	Logarithmen mit beliebiger Basis	116

	Exponentialgleichungen	116
	Vermischte Aufgaben	117
3.4	Trigonometrie	119
	Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis	119
	Steigungswinkel einer Geraden	121
	Flächeninhalt eines Dreiecks	121
	Sinussatz und Kosinussatz	122
3.5	Raumgeometrie	127
	Zeichnen von Schrägbildern	127
	Prisma	129
	Pyramide	132
	Zylinder	139
	Kegel	141
	Kugel	146
3.6	Pfadregeln in Baumdiagrammen	150
	Pfad-Multiplikationsregel	150
	Pfad-Additionsregel	151
	Gleichungen erstellen mithilfe von Baumdiagrammen	154

Komplexe Aufgaben

	Quadratische Funktionen	159
	Ebene Geometrie	161
	Raumgeometrie	164

Aufgaben im Stil der Prüfung

Beispielaufgaben

	Teil A – ohne Taschenrechner	B-1
	Teil B – mit Taschenrechner	B-2

Musterprüfung

	Teil A – ohne Taschenrechner	M-1
	Teil B – mit Taschenrechner	M-4

Original-Abschlussprüfung

Abschlussprüfung 2022 www.stark-verlag.de/mystark

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2022 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).



Mit dem **Interaktiven Training** kannst du online mit vielen zusätzlichen interaktiven Aufgaben zu allen prüfungsrelevanten Kompetenzbereichen trainieren.

Die **interaktiven Aufgaben** sind im Buch mit diesem Button gekennzeichnet.



Ausführliche Infos inkl. Zugangscode findest du auf den **Farbseiten** vorne in diesem Buch.

Autoren: Markus Hochholzer, Markus Schmidl

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch kannst du dich langfristig und nachhaltig auf die Abschlussprüfung in Mathematik vorbereiten. Das Buch ist so konzipiert, dass es sich zudem bereits ab Beginn der 9. Klasse zur Vorbereitung auf Schulaufgaben eignet.

Mit dem Buch erhältst du:

► **Grundwissen 5.–8. Klasse**

Hier findest du wichtige Themen aus den früheren Schuljahren zur Wiederholung.

► **Grundwissen 9. Klasse und Grundwissen 10. Klasse**

In diesen Kapiteln wird der prüfungsrelevante Stoff der 9. und der 10. Jahrgangsstufe anhand von Beispielen erläutert. Zu jedem Themenbereich findest du zudem vielfältige Aufgaben. Diese eignen sich sowohl zur Vorbereitung auf Schulaufgaben in der 9. bzw. 10. Klasse als auch zur Vorbereitung auf die Abschlussprüfung.

Die Aufgaben mit einem durchgestrichenen Taschenrechnersymbol eignen sich auch zur Bearbeitung ohne Taschenrechner.



► **Komplexe Aufgaben**

Dieses Kapitel enthält Aufgaben, die nach den Themenbereichen der Abschlussprüfung geordnet sind. Sie greifen auch auf das Grundwissen der vorhergehenden Jahrgangsstufen zurück, das für die Abschlussprüfung relevant ist.

► **Aufgaben im Stil der neuen Prüfung ab 2023**

Dieses Kapitel enthält Aufgaben, die wie in der Abschlussprüfung zusammengestellt und bepunktet sind. So kannst du prüfen, ob du fit bist für die Abschlussprüfung in Mathematik. Der Umfang und Schwierigkeitsgrad der Aufgaben entspricht jeweils den einzelnen Prüfungsteilen der Abschlussprüfung.

► **Original-Abschlussprüfungen 2022**

Obwohl sich die Abschlussprüfung 2023 von denen der Vorjahre unterscheidet, eignet sich die Abschlussprüfung 2022 dennoch dazu, unter Prüfungsbedingungen zu üben. Versuche, die Abschlussprüfung zusammenhängend in der Prüfungszeit von 150 min zu lösen.

Zu allen Aufgaben der einzelnen Kapitel gibt es **ausführliche Lösungen** mit hilfreichen **Hinweisen und Tipps**. Diese findest du in einem separaten **Lösungsbuch (Bestell-Nr. C0910NL)**, damit die Versuchung sofort nachzuschlagen nicht zu groß ist. Zuerst solltest du versuchen, selbst die Lösung zu finden, und dann mit dem Lösungsbuch vergleichen. Aus den gemachten Fehlern wirst du am meisten lernen!

Wenn du den Inhalt dieses Buches beherrscht, bist du bestens auf die Prüfung vorbereitet.

Viel Erfolg in der Prüfung!

Markus Hochholzer

Markus Schmidl

3 Grundwissen 10. Klasse

3.1 Quadratische Funktionen

Merke

Funktionen mit der Funktionsgleichung $f: y = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$) werden wegen ihres quadratischen Teilterms $a \cdot x^2$ als **quadratische Funktionen** bezeichnet.

Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2$

Merke

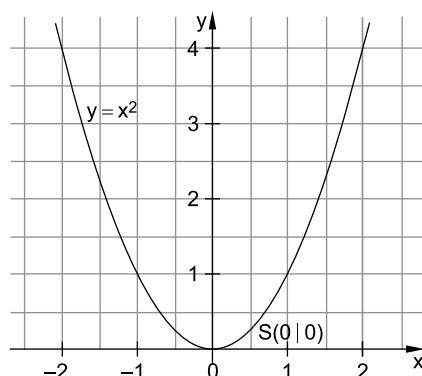
Für die einfachste quadratische Funktion $f: y = x^2$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $a = 1$, $b = 0$ und $c = 0$.

- Für die Definitionsmenge D gilt: $D = \mathbb{R}$, für die Wertemenge W gilt: $W = \mathbb{R}_0^+$
- Der Graph der Funktion f heißt **Normalparabel**.
- Die Normalparabel hat den **Scheitelpunkt** $S(0|0)$.
- Die y -Achse ist **Symmetrieachse** des Graphen mit der Gleichung $s: x = 0$.

Wertetabelle

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Graph



Funktionen mit Gleichungen der Form $y = a \cdot x^2$

Merke

Die Graphen von Funktionen mit Gleichungen der Form $y = ax^2$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) sind Parabeln mit dem Scheitelpunkt $S(0|0)$. Der **Formfaktor** a legt die **Öffnung** und die **Form** der Parabel fest.

Öffnung:

- $a > 0$: Die Parabel ist nach **oben** geöffnet.
- $a < 0$: Die Parabel ist nach **unten** geöffnet.

Form:

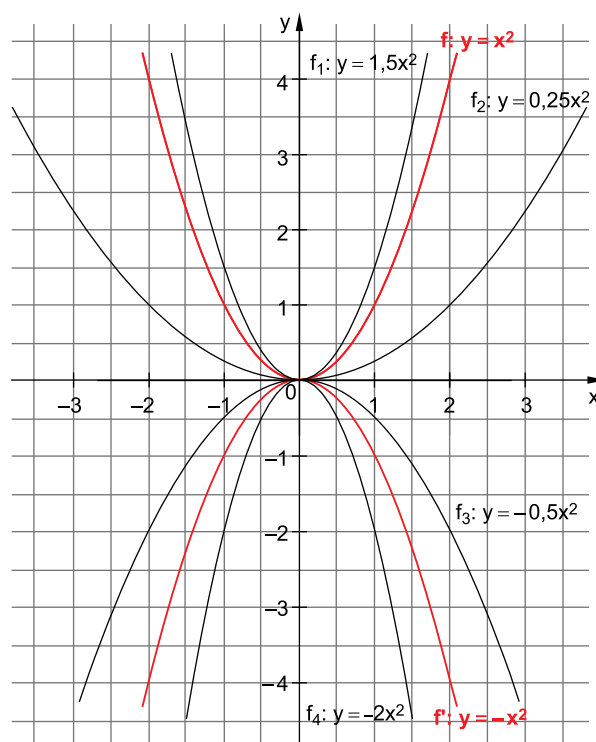
- $|a| > 1$: Die Parabel ist **gestreckt**, das heißt „steiler“ als die Normalparabel.
- $|a| = 1$: Normalparabel
- $|a| < 1$: Die Parabel ist **gestaucht**, das heißt „flacher“ als die Normalparabel.

Beispiele

$$\begin{aligned} a=1,5 & \quad f_1: y=1,5x^2 \\ a=0,25 & \quad f_2: y=0,25x^2 \\ a=-0,5 & \quad f_3: y=-0,5x^2 \\ a=-2 & \quad f_4: y=-2x^2 \end{aligned}$$

Wertetabelle

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_1: y=1,5x^2$	13,5	6	1,5	0	1,5	6	13,5
$f_2: y=0,25x^2$	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25
$f_3: y=-0,5x^2$	-4,5	-2	-0,5	0	-0,5	-2	-4,5
$f_4: y=-2x^2$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18

 Graphen der Funktionen f_1 bis f_4 :


f : nach oben geöffnete Normalparabel
 f_1 : nach oben geöffnet und gestreckt
 f_2 : nach oben geöffnet und gestaucht
 f' : nach unten geöffnete Normalparabel
 f_3 : nach unten geöffnet und gestaucht
 f_4 : nach unten geöffnet und gestreckt

Aufgaben



139

Berechne den Wert von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ so, dass der Graph der Funktion $f: y=ax^2$ durch den Punkt P verläuft.

a) $P(0,5 | 1)$

b) $P(-3 | 6)$



140

Beschreibe gemäß dem Beispiel die Graphen der nachfolgenden Funktionen.

Beispiel: $p: y=-1,25x^2$

- Die Parabel ist nach unten geöffnet, da $a < 0$.
- Es handelt sich um eine gestreckte Parabel, da $|a| > 1$.
- Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(0 | 0)$.
- Die y-Achse ist Symmetrieachse mit der Gleichung $s: x=0$.
- $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}_0^-$

a) $p_1: y=3,5x^2$

b) $p_2: y=-0,6x^2$

141

Ein aus dem Ruhezustand frei fallender Stein legt nach der Zeit t einen Weg von $s = \frac{1}{2}gt^2$ zurück (dabei soll vom Luftwiderstand abgesehen werden). Die Konstante g wird als Fallbeschleunigung bezeichnet. Ihr Wert hängt vom jeweiligen Himmelskörper ab:

$$g_{\text{Erde}} \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g_{\text{Mond}} \approx 1,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g_{\text{Sonne}} \approx 274 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- a) Zeichne die Graphen für $t \in [0 \text{ s}; 6 \text{ s}]$ mit $\Delta x = 1 \text{ s}$ für den freien Fall auf der Erde, dem Mond und auf der Sonne.

Rechtswertachse: Zeit t in Sekunden

Hochwertachse: Strecke s in Metern

- b) Ermittle jeweils für die genannten Himmelskörper, wie lange ein Stein bräuchte, bis er auf dem Boden landet, wenn er aus einer Höhe von $s = 100 \text{ m}$ fällt. (Das Verglühen des Steins auf der Sonne wird vernachlässigt.)



Interaktive
Aufgaben



1. Parabel zuordnen
2. Reihenfolge

3. Parabel zeichnen

Die Scheitelform: $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$

Merke

Wird eine Parabel p mit der Gleichung $y = a \cdot x^2$ durch Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix}$ auf die Bildparabel p' abgebildet: $p \xrightarrow{\vec{v} = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix}} p'$, so lässt sich die Gleichung der Bildparabel in der sogenannten **Scheitelform** angeben:

$$p': y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

$S'(x_S | y_S)$ sind die Koordinaten des Scheitelpunkts S' .

Beispiel

$$p: y = -\frac{2}{3}x^2 \xrightarrow{\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}} p': y = -\frac{2}{3}(x - (-2))^2 + 4$$

$$y = -\frac{2}{3}(x + 2)^2 + 4$$

also: $S'(-2 | 4)$

3.6 Pfadregeln in Baumdiagrammen

Pfad-Multiplikationsregel

Beispiel 2 b (Seite 88 in Abschnitt 2.9) führte zu einem umfangreichen Baumdiagramm. Dieses lässt sich wie folgt vereinfachen.

Merke

Pfad-Multiplikationsregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses erhält man, wenn man die **Wahrscheinlichkeiten entlang seines Pfades** im Baumdiagramm **multipliziert**.

Beispiel

In einer Urne befinden sich 2 schwarze Kugeln (S) und eine weiße Kugel (W). Es werden 3 Kugeln gezogen. Dabei wird nach jedem Zug die gezogene Kugel wieder zurück in die Urne gelegt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal hintereinander eine schwarze Kugel gezogen wird, also $P(SSS)$.

Lösung:

Bei dieser Aufgabe sind die Wahrscheinlichkeiten für Schwarz und Weiß nicht gleich. Bei jedem Zug ist:

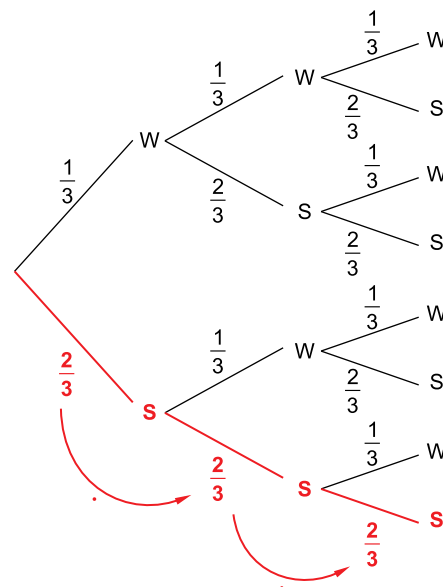
$$P(\text{„Schwarz“}) = \frac{2}{3}$$

Unter den 3 Kugeln sind 2 schwarze Kugeln.

$$P(\text{„Weiß“}) = \frac{1}{3}$$

Unter den 3 Kugeln ist 1 weiße Kugel.

Darstellung im Baumdiagramm:



Man führt im Baumdiagramm pro Zug **jede Farbe nur einmal** auf, gibt aber dafür **die Wahrscheinlichkeit für jeden Pfad** an.

Dadurch reduziert sich der Umfang des Baumdiagramms.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis **SSS** („dreimal Schwarz“) erhält man nun, wenn man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multipliziert:

$$P(SSS) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

Vgl. mit der Lösung auf Seite 89

Aufgabe



215

Löse Aufgabe 138 a (Seite 89) mithilfe eines Baumdiagramms und der Pfad-Multiplikationsregel:

Aus einem Schafkopfspiel nimmt man 2 Ober (O) und 2 Unter (U) heraus und legt sie verdeckt auf den Tisch. Du ziehst nacheinander 2 Karten, ohne die erste wieder zurückzulegen. Bestimme, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass du 2 Ober hintereinander ziehst.

Tipp

➤ Nach dem ersten Zug ändern sich die Wahrscheinlichkeiten.

216

Schafkopf wird in Oberbayern mit 32 Karten gespielt. Beim Geben erhält jeder Spieler 8 Karten. Bestimme, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Spieler alle 4 Ober und alle 4 Unter, die im Kartenset vorkommen, erhält.



217

Moritz hat einen roten und 3 blaue Legosteine. Er möchte einen Turm bauen, der aus 3 aufeinanderliegenden Steinen besteht (z. B. rot-blau-blau).

- Bestimme, wie viele verschiedene Farbkombinationen bei seinem Turm möglich sind.
- Moritz zieht blind nacheinander 3 Steine und setzt die Steine in der Reihenfolge, mit der er sie zieht, aufeinander. Ermittle, mit welcher Wahrscheinlichkeit er einen Turm in der Reihenfolge blau-blau-rot baut.



Interaktive Aufgabe

1. Baumdiagramm
2. Multiplikationsregel (mit ZL)
3. Multiplikationsregel (ohne ZL)

Pfad-Additionsregel

Die Pfad-Additionsregel wird benötigt, wenn die günstigen Ergebnisse in mehreren Pfaden des Baumdiagramms vorkommen.

Merke

Pfad-Additionsregel

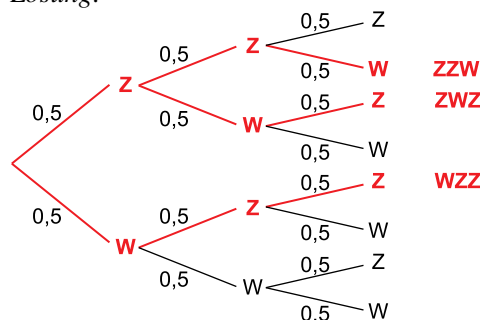
Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis erhält man als Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse dieses Ereignisses.

Man **addiert** also die **Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade**.

Beispiel

Eine Münze wird dreimal hintereinander geworfen. Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass bei den 3 Würfeln genau zweimal Zahl dabei ist.

Lösung:



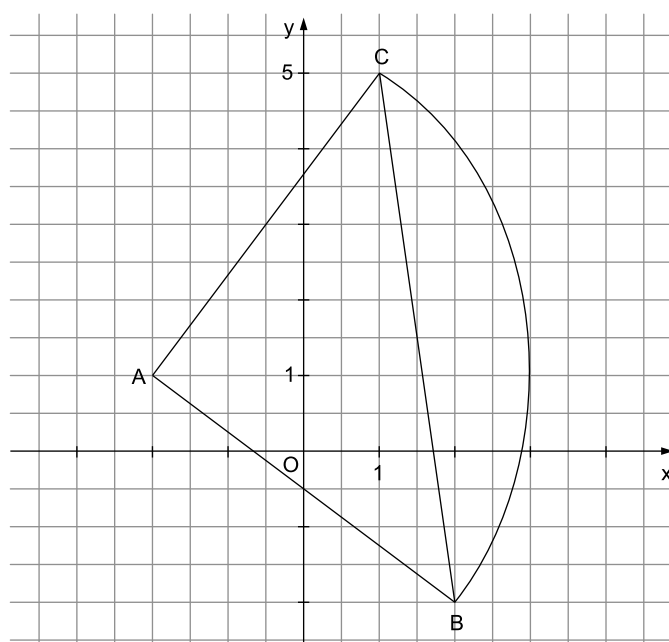
Musterprüfung
Bayern – Realschule – Mathematik II/III

Teil A – ohne Taschenrechner

Aufgabe A 1

A 1.0 Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC.

Es gilt: $A(-2|1)$; $B(2|-2)$; $\overline{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.



2 Punkte

A 1.1 Begründen Sie rechnerisch, weshalb das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

2 Punkte

A 1.2 Der Kreis um A mit dem Radius 5 LE schneidet die Strecke \overline{BC} in den Punkten B und C.

Berechnen Sie den Flächeninhalt A_{Segment} des Kreissegments, das durch die Strecke BC und den Kreisbogen BC begrenzt wird. Geben Sie das exakte Ergebnis an.



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK