

Bestimmung der kosmischen Materiedichte aus einem Variationsprinzip

und die Folgerungen für die Kosmologie

Klaus-P. Kutscha





© 2022 Klaus-P. Kutscha

ISBN Hardcover: 978-3-347-73100-4

Druck und Distribution im Auftrag des Autors:

tredition GmbH, An der Strusbek 10, 22926 Ahrensburg, Germany

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Für die Inhalte ist der Autor verantwortlich. Jede Verwertung ist ohne seine Zustimmung unzulässig. Die Publikation und Verbreitung erfolgen im Auftrag des Autors, zu erreichen unter: tredition GmbH, Abteilung "Impressumservice", An der Strusbek 10, 22926 Ahrensburg, Deutschland.

Vorwort

Dieses Buch richtet sich an Leser, deren Thema die aktuelle Kosmologie ist. Diese Kosmologie bedient sich einer kosmologischen Konstanten Λ mit einem kosmologischen Zusatzglied $\Lambda \cdot g_{hl}$ in den Einstein'schen Feldgleichungen, um die beschleunigte kosmische Expansion ab einem bestimmten Zeitpunkt der Vergangenheit erklären zu können. Diese Erklärung kann nur ein vorübergehender historischer Behelf sein, denn das kosmologische Glied ist bereits 1929 verworfen worden. Es ist auch schon deshalb überflüssig, weil die kosmologische Konstante Λ der Materiedichte ϱ als konstanter Anteil zugeschlagen werden kann, so daß die Feldgleichungen dadurch wieder ihre übliche Gestalt erhalten. Inhaltlich macht die kosmologische Konstante die Feldgleichungen dennoch holprig, ob sie nun auftritt in einem eigenständigen kosmologischen Glied oder als additiver konstanter Bestandteil der Materiedichte. Der sonst naturgesetzliche Charakter der Feldgleichungen ist dadurch auf jeden Fall gestört.

Tatsächlich wird sich der Kosmos für den einfachsten Weg und damit für einen extremalen Verlauf der Gesamtdichte entschieden haben, der (im Gegensatz zu oben) durch eine einfache und glatte Formulierung angegeben werden kann. Wir zeigen hier eine derartige Lösung, die sich aus einem Variationsprinzip ergibt und mit der Beobachtung harmoniert. Insbesondere impliziert diese Lösung die beschleunigte kosmische Expansion ab einem bestimmten Zeitpunkt der Vergangenheit, wobei sich diese Beschleunigung bis hin in alle Zukunft stetig steigert. Ein additiver konstanter Teil der Materiedichte tritt dabei nicht auf, womit auch keine kosmologische Konstante möglich ist. Diese Lösung ist als naturgesetzlicher Ablauf überzeugender als ihre Entsprechung aus dem offiziellen kosmologischen Modell.

Für ein lückenlosen Verständnis der Lektüre sind mathematische Kenntnisse erforderlich, die sich aus den Grundlagen der Differentialgeometrie (der Semi-Riemann'schen Metriken) und den elementar-mathematischen Techniken zum Umgang mit der Differentialgeometrie zusammensetzen. Die physikalischen Voraussetzungen sind das Robertson-Walker-Linienelement als Metrik-Ansatz und die Feldgleichungen in Materie. Beides ist in Kapitel 1 noch einmal präzisiert.

Im Text werden ausschließlich die in der Mathematik üblichen Abkürzungen verwendet: Fkt. für Funktion (mit Fktn. als Mehrzahl), Dgl. für Differentialgleichung (mit Dgln. als Mehrzahl), diffb. für differenzierbar, dim. für dimensional, usw.

Ich hoffe, mit dieser Arbeit einen Beitrag liefern zu können.

Bottrop, im August 2022

K.-P. Kutschä

Diese Arbeit wurde mit dem Dokumentenerstellungssystem Latex geschrieben. Für die Erstellung der Diagramme und Graphiken wurde dabei das Latex-Paket MGA-TEX verwendet. Mein Dank gebührt den Entwicklern dieser alle Anforderungen der Gestaltung erfüllenden Software.

Zum Verfasser:

Kutschka, Klaus-Peter

geboren: 26. 11. 1947

zwölfsemestriges Studium der Mathematik und Physik an der Ruhr-Universität Bochum, Abschluß 1977 als Diplom-Mathematiker

Berufliche Tätigkeit von 1978 bis 2012 als Entwicklungsingenieur (Navigation) und in der IT-Technologie.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Einleitung und Zusammenfassung | 1 |
| 1. Werdegang der kosmischen Feldgleichungen | 5 |
| 1.1. Raumzeitliche Auslegung des Kosmos | 5 |
| 1.2. Robertson-Walker-Linienelement als Metrik-Ansatz | 6 |
| 1.3. Die Feldgleichungen zur Ermittlung von $R = R(\tau)$ | 9 |
| 2. Lösung der Feldgleichungen und erste Auswirkungen | 13 |
| 2.1. Ermittlung der kosmischen Materiedichte $\varrho = \varrho(R)$ | 13 |
| 2.2. Die Dichtekoeffizienten a_1, a_2 als Fkt. der Vorgabewerte ϱ_0, H_0, q_0 | 19 |
| 2.3. Lösung der Feldgleichungen | 22 |
| 2.4. Extremstellen auf der Zeitachse | 25 |
| 2.5. ϱ_0 als Funktion von τ_0, H_0, q_0 und kosmologischem Modell | 28 |
| 3. Kosmische Rotverschiebung und kosmische Energie | 37 |
| 3.1. Kosmische Rotverschiebung | 37 |
| 3.2. Koordinatenabstand χ_T zum Teilchenhorizont | 44 |
| 3.3. Energie des Kosmos | 49 |
| 4. Übergang zu zugeschnittenen Größengleichungen | 53 |
| 4.1. Zusammenfassung der Gleichungen | 53 |
| 4.2. Zahlenwerte der Konstanten und konkrete Maßeinheiten | 56 |
| 4.3. Zugeschnittene Größengleichungen bei wählbaren ϱ_0, H_0, q_0 | 58 |
| 4.4. Größengleichungen zur numerischen Ermittlung von ϱ_0 | 60 |
| 5. Berechnung und Auswertung | 61 |
| 5.1. Quantitativer Verlauf von $R = R(\tau), \dot{R} = \dot{R}(\tau)$ | 62 |
| 5.2. Quantitativer Verlauf von $\varrho = \varrho(\tau), p = p(\tau)$ | 68 |
| 5.3. Rotverschiebung: Kosmische Zeitpunkte der Vergangenheit | 71 |
| 5.4. Rotverschiebung: Metrischer Abstand zu mitbewegten Lichtquellen | 72 |
| 5.5. Quantitativer Verlauf von $\chi_T = \chi_T(\tau_*)$ | 73 |
| 5.6. Quantitative Angaben zur kosmischen Energie | 74 |
| 6. Deutung der Ergebnisse | 76 |
| 6.1. Deutung des Welt-Anfangs | 77 |
| 6.2. Deutung des Welt-Endes | 79 |
| 6.3. Deutung der potentiellen Energie des Kosmos | 82 |
| 6.4. Materiebeschaffenheit am Welt-Anfang | 85 |

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|------------|
| A. Christoffel'sche Symbole 2. Art und Riccitensor | 86 |
| A.1. Für die Metrik der Raumzeit | 86 |
| A.2. Für die Metrik des räumlichen Teils | 91 |
| B. Historischer Verlauf der Rotverschiebung | 94 |
| B.1. Aufgabenstellung und Berechnungsgrundlagen | 94 |
| B.2. Zugeschnittenen Größengleichungen | 96 |
| B.3. Berechnung und Auswertung | 99 |
| B.4. Koordinatenabstand χ_E zum Ereignishorizont | 107 |
| B.5. Doppelauftritt von mitbewegten Lichtquellen | 112 |
| C. Gegenüberstellung der Modelle | 116 |
| C.1. Kurvenvergleich mit Übereinstimmungen | 118 |
| C.2. Kurvenvergleich ohne Übereinstimmungen | 121 |
| C.3. Deutung der beiden Modelle | 124 |
| Literatur | 125 |
| Sachverzeichnis | 126 |
| Symbolverzeichnis | 127 |

Einleitung und Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird ein kosmologisches Modell vorgestellt, das die Zunahme der kosmischen Expansionsgeschwindigkeit ab einem bestimmten Zeitpunkt der Vergangenheit impliziert, aber in den Feldgleichungen auf die kosmologische Konstante verzichtet. Bei den hier verwendeten Zahlenwerten der Parameter τ_0, H_0, q_0 stimmt dieses Modell innerhalb einer überraschend großen Reichweite mit dem offiziellen kosmologischen Modell annähernd überein. Die dabei zugrundeliegende Metrik ergibt sich im ersten Schritt aus den Annahmen, die zum Robertson-Walker-Linienelement und zum Energie-Impulstensor des Kosmos führen (wie bei der Metrik des offiziellen kosmologischen Modells auch), und im zweiten Schritt aus einem leicht einsehbaren Variationsprinzip. Mit dieser Metrik sind insbesondere die Endzeit τ_{sup} und die zeitliche Entwicklung von Krümmungsradius R , kosmischer Materiedichte ϱ und kosmischem Druck p bekannt.

Im Unterschied zum offiziellen kosmologischen Modell, bei dem die Materiedichte als Summe eines konstanten Gliedes (das die dunkle Energie repräsentiert) und eines zeitabhängigen Gliedes (für sichtbare, dunkle und relativistische Materie) angenommen wird, ergibt sich die Materiedichte beim hier verwendeten Modell aus dem oben erwähnten Variationsprinzip. Die dabei verwendete Lagrangefunktion ist die 2. Potenz der Spur des Energie-Impulstensors. Auf die so ermittelte kosmische Materiedichte, deren Abhängigkeit vom Krümmungsradius eine verblüffend einfache Gestalt hat, baut sich vorliegender Beitrag auf.

Wir bleiben in diesem Beitrag im Rahmen unseres hier eingeführten kosmologischen Modells und werden zu den Grenzen hin in Richtung Welt-Anfang und Welt-Ende auf keine weiteren Aspekte eingehen, die außerhalb dieses Rahmens liegen. Quantenmechanische Annahmen und Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung im Hinblick auf den Welt-Anfang gehören also nicht mehr zu unserem Thema. Dieses kosmologische Modell kann mit seiner strengen Forderung nach Homogenität und Isotropie nur eine 1. Näherung der kosmischen Wirklichkeit sein.⁽¹⁾

Zusammenfassung des Inhalts

Im 1. Kapitel, so als Einstimmung und Synchronisation, wird der Werdegang zu den kosmischen Feldgleichungen zusammengefaßt mit R, ϱ, p als noch nicht aufgelöste Funktionen der Koordinatenzeit τ . Robertson-Walker-Linienelement, Energie-Impulstensor

⁽¹⁾Die Komponenten ϱ und p des aus dem Weyl'schen Postulat resultierenden Energie-Impulstensors beschreiben hier durchgehend ein Kontinuum und hängen nur von der Koordinatenzeit τ ab. Daneben werden nur das Robertson-Walker-Linienelement (als Metrik-Ansatz), die Feldgleichungen und obiges Variationsprinzip vorausgesetzt. Weitere Annahmen zur Physik werden nicht gemacht.

und allgemeine Feldgleichungen werden dabei vorausgesetzt. Am Ende des 1. Kapitels sind wir dann bei den Friedmann-Lemaître'schen Gleichungen an der Stelle, die noch mit der offiziellen Lehrmeinung übereinstimmt. Von dort aus gehen wir im 2. Kapitel unseren eigenen Weg zur Auffindung der oben genannten Metrik, ohne Verwendung der kosmologischen Konstante. Im 3. Kapitel werden die Ergebnisse des 2. Kapitels auf einige ausgewählte kosmologische Themen angewandt (kosmische Rotverschiebung, Teilchenhorizont, Energiesatz des Kosmos), und im 4. Kapitel werden die bis dahin ermittelten formalen Ergebnisse mit den im Alltag gebräuchlichen Maßeinheiten versehen, um Berechnung und Auswertung durchführen zu können. Berechnung und Auswertung der Ergebnisse erfolgt im 5. und die Deutung im 6. Kapitel.

In Anhang A sind die Christoffelschen Symbole 2. Art und die Koeffizienten des Ricci-tensors aufgeführt. Diese ergeben sich elementar, wenn auch aufwendig, aus ihren Definitionsgleichungen und dem Metrik-Ansatz und werden zur Spezialisierung der Feldgleichungen verwendet. Anhang B ist ein Zusatz, der die zeitliche Änderung der Rotverschiebung des Lichts einer mitbewegten Lichtquelle⁽²⁾ über die gesamte kosmische Zeit angibt. Der Begriff des Ereignishorizonts ist ebenfalls in diesem Anhang beschrieben, da er sich an dieser Stelle aus dem Thema in einfacher Weise ergibt. Anhang C stellt die hier ermittelten Berechnungsergebnisse ihren Entsprechungen aus dem offiziellen kosmologischen Modell zum Vergleich gegenüber.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Im Gegensatz zum offiziellen kosmologischen Modell gibt es in dem hier vorgestellten eine obere zeitliche Grenze, genauer: ein zeitliches Supremum τ_{sup} , das den konkreten Wert 28,779702 Mrd Jahre hat und als Supremum außerhalb unserer Raumzeit liegt. Der Krümmungsradius R läuft dabei gegen unendlich, wenn die Zeit gegen τ_{sup} strebt. Die Grenze τ_{sup} ist somit unerreichbar, ebenso das Ende der kosmischen Entwicklung. Wie das zu verstehen ist, ist Gegenstand von Kapitel 6. Auch die Materiedichte ϱ steigt mit zunehmender Zeit nach Durchlaufung eines Minimums wieder an und läuft mit gegen τ_{sup} zustrebender Zeit auf Unendlich zu. Diese Prognose erweckt sicherlich Skepsis und wird ebenfalls im Kapitel 6 kommentiert.

Drei Zeitpunkte zeichnen sich aus, die bereits alle in der Vergangenheit liegen. Am ältesten dieser drei Zeitpunkte, τ_a , erfolgt der Übergang von positivem zu negativem kosmischem Druck p , am zweitältesten τ_b der Übergang zur Zunahme der kosmischen Expansionsgeschwindigkeit \dot{R} und am jüngsten τ_c der Übergang zur Zunahme der kosmischen Dichte ϱ .

Beim offiziellen kosmologischen Modell ist der räumliche Teil der Raumzeit flach, beim hier verwendeten Modell ist er hyperbolisch. Bei letzterem ist die aktuelle kritische Dichte ϱ_{krito} sogar um das 4,12-fache größer als die aktuelle Dichte ϱ_0 .

Als Energiesatz des Kosmos tritt im hier verwendeten kosmologischen Modell der Erhaltungssatz $W_{pot} + mc^2 = const$ auf, wobei m die Masse des Kosmos ist. Sie durchläuft

⁽²⁾mitbewegte Lichtquellen bzw. mitbewegte Beobachter sind genau die “von Anbeginn” freifallenden Lichtquellen bzw. Beobachter

ihr Minimum genau zum Zeitpunkt τ_a , an dem der kosmische Druck p seinen Nulldurchgang hat. W_{pot} hat bis auf sein Maximum an der Stelle τ_a nur negative Werte. Die Größe W_{pot} ist die Entsprechung zur “dunklen Energie” des offiziellen kosmologischen Modells. Außerdem ergibt sich hier die plausible Deutung, daß der Kosmos an seinem Anfang nur Photonen und keine andere Materie enthielt (Abschn. 6.4).

Als weitere Ergebnisse aus dem hier verwendeten Modell treten die Koordinatenabstände zum Teilchenhorizont und zum Ereignishorizont auf, deren Summe eine im Rahmen dieses Modells universelle raumzeitliche Konstante ist. Die dadurch gegebene Beziehung führt zur naheliegenden Vermutung, daß mitbewegte Lichtquellen, die sich bereits hinter dem Ereignishorizont befinden, gleich zweimal am kosmischen Sternenhimmel auftreten: in der einen Richtung und in der jeweils entgegengesetzten Richtung (Abschn. B.5), was durch Beobachtung verifiziert werden könnte.

Vereinbarungen

Zunächst eine sprachliche Vereinbarung:

Wenn hier die Wendung “von Anbeginn” oder “am Anfang” im Zusammenhang mit der Anfangsphase des Kosmos auftritt, so ist damit kein konkreter Zeitpunkt der kosmischen Geburt gemeint, denn diesen Punkt gibt es nicht, zumindest liegt dieser Punkt nicht in der real existierenden Raumzeit (näheres dazu im Kapitel 6). Die Wendung im Sinne von “immer” wäre objektiv richtig, würde aber Mißverständnisse hervorrufen. Das Szenario des Weltanfangs liegt außerhalb der Reichweite unserer Alltagssprache und kann somit nur mit einer Metapher sprachlich vermittelt werden,⁽³⁾ auch wenn diese uns zunächst einen real existierenden Anfangszeitpunkt suggeriert. $\tau = 0$ als “Anfangszeitpunkt der Welt” ist also im folgenden nur eine vereinfachende Sprechweise und nicht wörtlich zu nehmen. Entsprechendes gilt für die Endzeit τ_{sup} .

Mitbewegte Lichtquellen:

Alle mitbewegten Beobachter sind hier auch mitbewegte Lichtquellen, und umgekehrt sind alle mitbewegten Lichtquellen auch mitbewegte Beobachter. Wir werden stets einheitlich nur von mitbewegten Beobachtern sprechen, auch wenn sie von uns je nach Situation als mitbewegte Lichtquellen verwendet werden. Mißverständnisse sind dabei ausgeschlossen, der Zusammenhang gibt stets an, wer für unsere Betrachtung der Sender und wer der Empfänger ist. Diese Vereinfachung macht die Lesbarkeit leichter, zumal die Rollen von Sender und Empfänger gelegentlich vertauscht werden.

Zur Koordinatenzeit:

Da die Koordinatenzeit t mit der Eigenzeit τ der mitbewegten Beobachter übereinstimmt⁽⁴⁾ und der Kosmos hier ausnahmslos aus Sicht der mitbewegten Beobachter betrachtet wird, werden wir die Koordinatenzeit von vornherein mit τ bezeichnen. Dadurch soll deutlich werden, daß es sich dabei um die Eigenzeit des jeweiligen mitbewegten Beobachters handelt.

⁽³⁾siehe dazu auch [12] Seiten 213, 214, 215

⁽⁴⁾aufgrund der Annahmen, aus denen sich das Robertson-Walker-Linienelement ergibt

Einleitung und Zusammenfassung

Summenkonvention:

Hier wird durchgehend die Summenkonvention verwendet, von solchen Ausnahmen abgesehen, bei denen sonst Mißverständnisse auftreten könnten.

Vorzeichenfestlegung:

Als Signatur des Linienelements verwenden wir $(-1, -1, -1, 1)$ und nicht $(1, 1, 1, -1)$.⁽⁵⁾ Das hat den Vorteil, daß das Linienelement der geläufigeren zeitartigen Geodäten bei Integration auf der rechten Seite keinen Vorzeichenschwenk machen muß, dieser erfolgt dann beim Linienelement der weniger geläufigen raumartigen Geodäten. Das Vorzeichen des Riemann'schen Krümmungstensors ist so gewählt wie in [8] und [10]. In [9] und [6] ist das Vorzeichen dieses Krümmungstensors entgegengesetzt. Der Riccitensor wird hier gebildet wie in [6] und [10] durch Verjüngung des Riemann'schen Krümmungstensors über den oberen und den letzten unteren Index, in [8] und [9] wird er gebildet durch Verjüngung über den oberen und den zweitletzten unteren Index. Die sich so ergebende Vorzeichenfestlegung führt schließlich zum Vorzeichen der rechten Seite der hier verwendeten Feldgleichungen (1.9).

⁽⁵⁾die erste Signatur wird vorzugsweise bei den Physikern verwendet, die zweite bei den Mathematikern.
Zu letzterem siehe [6] Seiten 55 und 56 in Kapitel 3.

1. Werdegang der kosmischen Feldgleichungen

1.1. Raumzeitliche Auslegung des Kosmos

Unseren Kosmos haben wir uns als 4-dim. reelle diffb. Mannigfaltigkeit M vorzustellen, die mit einer abstandsdefinierenden Metrik der Signatur $(-1, -1, -1, 1)$, also einer Lorentzmetrik versehen ist und somit M zu einer Lorentz'schen Mannigfaltigkeit⁽¹⁾ macht. Unser Gehirn legt M als Karte mit 3 räuml. Koordinaten und 1 zeitl. Koordinate aus (siehe [12] Seite 164), wobei $G \times I$ der Wertebereich dieser Karte ist, $G \subset_{offen} \mathbb{R}^3$ von der Wahl der räuml. Koordinaten abhängt und $I \subset_{offen} \mathbb{R}_+$ ein geeignetes Intervall mit der Null als unterer Grenze ist. M wird aus diesem Grund auch als Raumzeit bezeichnet. Wir betrachten jetzt den Kosmos aus der Sicht eines beliebig vorgegebenen mitbewegten Beobachters \mathfrak{A}_0 , der den Kosmos ebenfalls in oben beschriebener Weise auslegt. \mathfrak{A}_0 befindet sich im Ursprung eines mitbewegten Koordinatensystems⁽²⁾ u^1, u^2, u^3 , das zusammen mit der Eigenzeit $u^4 = \tau$ von \mathfrak{A}_0 ein raumzeitliches Koordinatensystem u^1, u^2, u^3, u^4 bildet, welches bis auf eine Menge vom Maße Null die ganze Raumzeit und damit den ganzen Kosmos überdeckt.⁽³⁾ Unsere Metrik g hat somit die allgemeine Form

$$g = g_{ij} du^i \otimes du^j \quad , i, j = 1, \dots, 4 \quad (1.1)$$

Die Metrik als Quadrat des Linienelements ds geschrieben:

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \quad (1.2)$$

Den g_{ij} gilt im folgenden unsere Aufmerksamkeit.

Anmerkung 1:

Die Signatur $(-1, -1, -1, 1)$ für unsere raumzeitliche Metrik ist eine notwendige Konsequenz aus der Erkenntnis, daß wir bei geeigneter Koordinatenwahl in einer hinreichend kleinen Umgebung eines beliebigen raumzeitlichen Punkts angenähert Spezielle Relativitätstheorie betreiben können, die umso schärfer wird, je näher man diesem Punkt kommt. Dazu beachte man, daß es zu jedem vorgegebenen raumzeitlichen Punkt ein raumzeitliches Koordinatensystem gibt, so daß in diesem Punkt die Christoffel'schen

⁽¹⁾=Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit der Signatur $(-1, -1, -1, 1)$. Siehe dazu [6].

⁽²⁾mitbewegte Koordinatensysteme sind räuml. Koordinatensysteme, in denen alle mitbewegten Beobachter zeitlich konstante Koordinaten haben.

⁽³⁾Wir erinnern an die Vereinbarung in der Einleitung: Als Koordinatenzeit t wird die Eigenzeit τ der mitbewegten Beobachter verwendet.

1. Werdegang der kosmischen Feldgleichungen

Symbole bzgl. dieses Koordinatensystems verschwinden (demnach ist dieser Punkt aus Sicht dieser Koordinaten sogar gravitationsfrei) und die von diesem Koordinatensystem erzeugte Vektorraumbasis des Tangentialraums an diesem Punkt orthonormal ist. Damit liegt lokal das lorentz'sche Skalarprodukt der klassischen Speziellen Relativitätstheorie vor, sofern genau drei der Basisvektoren raumartig sind. Nur die Signatur $(-1, -1, -1, 1)$ läßt diesen Grenzfall des lorentz'schen Skalarprodukts zu.

1.2. Robertson-Walker-Linienelement als Metrik-Ansatz

Die allgemeine Form (1.2) unserer Metrik enthält noch keinerlei Informationen. Sie ist vergleichbar mit einem großen Bogen Papier, aus dem mit einer Schere nach Vorgaben eine Figur als Rohform für weitere Bearbeitungen geschnitten werden muß. Diese Vorgaben sind im wesentlichen Symmetrie- und Homogenitätsbedingungen, nach denen unsere "Schere", so weit es eben geht, die Darstellung (1.2) spezialisiert. Der Verschnitt interessiert dabei nicht mehr. Diese Spezialisierung führt aus Sicht des mitbewegten Beobachters \mathfrak{A}_0 auf einen Metrik-Ansatz, der in Termen eines geeigneten mitbewegten Koordinatensystems mit \mathfrak{A}_0 im Ursprung als Robertson-Walker-Linienelement der Raumzeit bekannt ist und mit Standardmethoden der Differentialgeometrie (aus den Vorgaben heraus) hergeleitet wird.

Der so ermittelte Metrik-Ansatz setzt sich bereits additiv aus einem räuml. Teil und einem zeitl. Teil zusammen, so daß wir den räuml. Teil der Raumzeit bei festgehaltenem τ als 3-dim. Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit durchgehend isotropen Punkten auffassen können, mit der die sektionale Krümmung $K = K(\tau)$, kurz Raumkrümmung, einhergeht. Diese ist überall im zur Koordinatenzeit τ eingefrorenen räumlichen Teil der Raumzeit gleich.⁽⁴⁾ Der konkrete Metrik-Ansatz hängt ab vom Vorzeichen dieser Raumkrümmung.

Metrik-Ansatz:

(Robertson-Walker-Linienelement ds)

$$ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau) \cdot \left[\frac{dr^2}{1 - k \cdot r^2} + r^2 \cdot (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) \right] \quad (1.3)$$

Darin sind

$\vartheta \in (0, \pi)$, $\phi \in (0, 2\pi)$, $\tau \in I$ mit I aus vorigem Abschnitt,

$R(\tau) > 0$ für alle $\tau \in I$ mit $R := \frac{1}{\sqrt{|K|}}$ für $K \neq 0$,

$k = 1$ und $r \in (0, 1)$ bei positiver Raumkrümmung ($K > 0$)

$k = -1$ und $r \in \mathbb{R}_+$ bei negativer Raumkrümmung ($K < 0$)

$k = 0$ und $r \in \mathbb{R}_+$ bei verschwindender Raumkrümmung ($K = 0$)

$R = R(\tau)$ ist bei $k \neq 0$ der Krümmungsradius und bei $k = 0$ der Skalenfaktor des räumlichen Teils zur Koordinatenzeit τ .

⁽⁴⁾siehe dazu [5] Band II Seiten 196, 293, insbesondere Schurs Theorem.

1. Werdegang der kosmischen Feldgleichungen

Der Metrik-Ansatz (1.3) ist gleichwertig mit folgenden 3 Beziehungen:

$$ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau) \cdot [d\chi^2 + \sin^2 \chi \cdot (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2)] \quad \text{für } k = 1 \text{ mit } \chi \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad (1.4)$$

$$ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau) \cdot [d\chi^2 + \sinh^2 \chi \cdot (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2)] \quad \text{für } k = -1 \text{ mit } \chi \in \mathbb{R}_+ \quad (1.5)$$

$$ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau) \cdot [d\chi^2 + \chi^2 \cdot (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2)] \quad \text{für } k = 0 \text{ mit } \chi \in \mathbb{R}_+ \quad (1.6)$$

Schärfer als (1.3) lässt sich die raumzeitliche Metrik mit unserer Schere nach den bis jetzt gemachten Vorgaben nicht ausschneiden. Zum mindesten sind wir aber schon soweit, daß nur noch k und der Krümmungsradius bzw. Skalenfaktor R unbestimmt sind. Sind k und $R = R(\tau)$ bekannt, so ist (1.3) vollständig bestimmt.

Anmerkung 2:

Die zu (1.3) führenden Vorgaben können wir als kosmologisches Prinzip zusammenfassen.

Anmerkung 3:

Im Fall $k = 0$ hat R die Bedeutung einer Streckung, R ist also dabei dimensionslos (d.h. R hat dabei die Einheit 1). Diese Streckung soll die kosmische Ausdehnung zu heutiger Zeit τ_0 als "Bezugspunkt" haben, d.h. es soll $R_0 := R(\tau_0) = 1$ gelten. χ aus (1.6) hingegen hat die Dimensionierung "Länge". Im Gegensatz dazu ist im Fall $k \neq 0$ umgekehrt R von der Dimensionierung "Länge" und χ dimensionslos (mit Deutung als Bogenmaß).

Anmerkung 4:

Die mitbewegten Beobachter "fallen" auf einer zeitartigen Geodäten bzgl. der Metrik (1.4) bzw. (1.5) bzw. (1.6), und zwar mit konstanten räumlichen Koordinaten χ, ϑ, ϕ , d.h. jeder mitbewegte Beobachter \mathfrak{A}_1 hat eine zeitlich unveränderliche räumliche Position $\chi_1, \vartheta_1, \phi_1$ im Koordinatensystem $\chi, \vartheta, \phi, \tau$.

Anmerkung 5:

Sprechweisen (die wohl begründet sind):

Bei $k = 1$ ist der räuml. Teil sphärisch.

Bei $k = -1$ ist der räuml. Teil hyperbolisch.

Bei $k = 0$ ist der räuml. Teil flach.

Bei $k = 1$ verhält sich die Metrik im räuml. Teil der Raumzeit bei eingefrorenem τ wie die euklidische Metrik des \mathbb{R}^4 in Kugelkoordinaten R, χ, ϑ, ϕ bei festgehaltenem $R = R(\tau)$. Die Entsprechung des räumlichen Teils ist dabei die Oberfläche einer 4-dim. Halbkugel mit Radius $R(\tau)$ und dem Pol als Ursprung des Koordinatensystems χ, ϑ, ϕ .

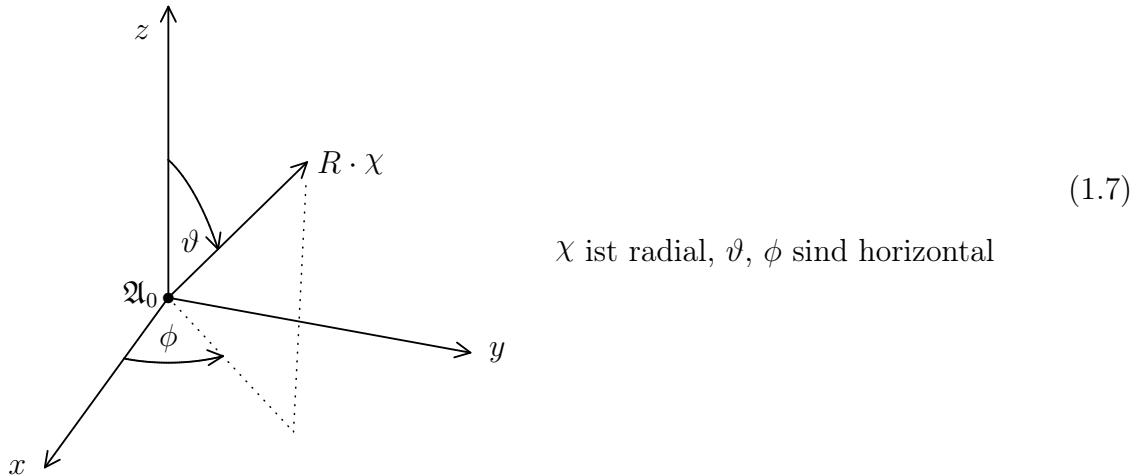
Bei $k = -1$ verhält sich die Metrik im räuml. Teil der Raumzeit bei eingefrorenem τ wie die Lorentzmetrik des \mathbb{R}^4 in hyperbolischen Koordinaten R, χ, ϑ, ϕ bei festgehaltenem $R = R(\tau)$. Die Entsprechung des räumlichen Teils ist dabei die Oberfläche einer der beiden Schalen eines zweischaligen 4-dim. Hyperboloids. Der betreffende Scheitelpunkt ist Ursprung des Koordinatensystems χ, ϑ, ϕ auf der ausgewählten Schale, und $2R(\tau)$ ist der Abstand beider Scheitelpunkte.

Bei $k = 0$ verhält sich die Metrik im räuml. Teil der Raumzeit bei eingefrorenem τ wie die euklidische Metrik des \mathbb{R}^3 .

1. Werdegang der kosmischen Feldgleichungen

Anmerkung 6:

Deutung der räuml. Koordinaten aus (1.4), (1.5), (1.6) als Kugelkoordinaten bei sehr kleinen χ und konstantem R (die Einschränkung auf kleine χ entfällt bei $k = 0$):



Deutung von R, χ als Polarkoordinaten bei eingefrorenem τ :



χ heißt Koordinatenabstand und $\beta := R \cdot \chi$ metrischer Abstand zwischen \mathfrak{A}_0 und \mathfrak{A}_1 .⁽⁵⁾

Geodäten:

Im hier verwendeten kosmologischen Modell sind nur die folgenden drei Typen geodätischer Linien für uns von Bedeutung, die ersten 2 in der Raumzeit:

- Die zeitartigen Geodäten mit $d\chi = d\vartheta = d\phi = 0$ im zugehörigen Linienelement. Entlang solcher Geodäten “fallen” alle mitbewegten Beobachter.
- Die lichtartigen Geodäten mit $d\vartheta = d\phi = 0$ im zugehörigen Linienelement. Diese werden zur Ermittlung der Gesetzmäßigkeiten bei der Rotverschiebung des ankommenden Lichts verwendet.

und der dritte im räumlichen Teil der Raumzeit:

- Die Geodäten mit $d\vartheta = d\phi = 0$ im zugehörigen Linienelement. Auf ihnen wird der metrische Abstand β zwischen zwei mitbewegten Beobachtern bei eingefrorener Koordinatenzeit τ gemessen⁽⁶⁾. Siehe Bild (1.8) oben.

⁽⁵⁾ \mathfrak{A}_1 wie gehabt ein ebenfalls mitbewegter Beobachter

⁽⁶⁾ dabei befindet sich der eine dieser beiden Beobachter im Ursprung des räumlichen Koordinatensystems χ, ϑ, ϕ

1.3. Die Feldgleichungen zur Ermittlung von $R = R(\tau)$

Im vorigen Abschnitt sind wir bereits so weit gekommen, daß jetzt die gesuchten Koeffizienten g_{ij} bis auf einen Rest vollständig vorliegen: Sie sind aus (1.4), (1.5), (1.6) für alle 3 Fälle $k = 1, k = -1, k = 0$ ablesbar, in Abhängigkeit von den Koordinaten $\chi, \vartheta, \phi, \tau$ angegeben und bereits soweit aufgelöst, daß nur noch $R = R(\tau)$ als Unbekannte darin auftritt (von k abgesehen).

Wir wollen die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie heranziehen, um diese Fkt. $R = R(\tau)$ zu ermitteln. Die Feldgleichungen sind partielle Dgln. in den g_{ij} und somit in unserem speziellen Fall gewöhnliche Dgln. in R .

Die Feldgleichungen in Materie in ihrer allgemeinen Form lauten:

$$G_{hl} = -\varkappa \cdot T_{hl} \quad \text{mit } \varkappa = \frac{8\pi\gamma}{c^4} \quad , \quad (1.9)$$

worin

$$G_{hl} = R_{hl} - \frac{1}{2}S \cdot g_{hl} = \text{Einstientensor}$$

$$R_{hl} = \text{Riccitensor}$$

$$g_{hl} = \text{metrischer Fundamentaltensor wie gehabt}$$

$$T_{hl} = \text{Energie-Impulstensor}$$

$$\varkappa = \text{Kopplungskonstante (mit } \gamma \text{ als Gravitationskonstante)}$$

$$S = \text{Krümmungsskalar}^{(7)}$$

Die Feldgleichung (1.9) ist gleichwertig mit

$$R_{hl} = -\varkappa \cdot \left(T_{hl} - \frac{1}{2}T_i^i \cdot g_{hl} \right) \quad (\text{beachte Summenkonvention in } T_i^i) \quad (1.10)$$

Im folgenden werden wir die Formulierung (1.10) der Feldgleichungen verwenden.

Zum Riccitensor:

Die R_{hl} hängen in wohlbekannter Weise von den g_{ij} und den 1. und 2. Ableitungen der g_{ij} ab. Somit hängen die R_{hl} von R (=Krümmungsradius bzw. Skalenfaktor) und der 1. und 2. Ableitung von R nach τ ab. Die R_{hl} mit dieser Abhängigkeit sind in Anhang A mit den zugehörigen Christoffel'schen Symbolen 2. Art angegeben.

Zum Energie-Impulstensor:

Wir nehmen an, daß das Verhalten der Materie im Kosmos dem einer idealen Flüssigkeit entspricht. (Das ist die Aussage des Weyl'schen Postulats.) Damit ist der gemischte

⁽⁷⁾Die sonst dafür übliche Bezeichnung R ist hier bereits für den Krümmungsradius bzw. Skalenfaktor in Gebrauch. Siehe dazu auch [6] Seite 88, Def 53.

1. Werdegang der kosmischen Feldgleichungen

Tensor T_l^h in Termen unseres Koordinatensystems $\chi, \vartheta, \phi, \tau$ in jedem raumzeitlichen Punkt gleich

$$(T_l^h) = \begin{pmatrix} -p & & & \\ & -p & 0 & \\ 0 & & -p & \\ & & & c^2 \varrho \end{pmatrix} \quad \text{mit } p \in \mathbb{R} \text{ und } \varrho > 0 \quad (1.11)$$

p kann als kosmischer Druck und ϱ als kosmische Materiedichte bezeichnet werden.

Die Auflösung von Riccitensor R_{hl} und Fundamentaltensor g_{hl} aus Anhang A können wir mit (1.11) in die Feldgleichung (1.10) einsetzen und erhalten daraus für alle 3 Fälle ($k = 1, k = -1, k = 0$) folgendes Gleichungssystem:⁽⁸⁾

$$\dot{R}^2 - \frac{1}{3} \kappa c^2 \varrho R^2 = -k \quad (1.12)$$

$$2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + \kappa p R^2 = -k \quad (1.13)$$

Die ersten 3 Gleichungen aus (1.10) stimmen auf Grund der Isotropie des räuml. Teils überein und reduzieren sich somit auf eine einzige Gleichung, so daß in Summe nur zwei voneinander unabhängige Gleichungen, nämlich (1.12), (1.13), übrigbleiben.

Eine Folgerung aus (1.12), (1.13) ist

$$p = -c^2 \dot{\varrho} \frac{R}{3\dot{R}} - c^2 \varrho \quad (1.14)$$

(1.14) ergibt sich wie folgt: Um \ddot{R} zu eliminieren, differenziert man (1.12) nach τ , stellt nach \ddot{R} um, stellt dann (1.13) nach \ddot{R} um und setzt die rechten Seiten beider Gleichungen gleich. Dann ersetzt man in der neuen Gleichung $-k$ durch die linke Seite von (1.12), stellt nach p um und erhält (1.14).

Hier sei noch nachträglich vermerkt, daß wir $\dot{R} \neq 0$ voraussetzen.⁽⁹⁾ Wegen (1.12) ist diese Voraussetzung für $k = -1$ von allein erfüllt, für $k = 1$ ist sie erfüllt unter der Bedingung $\kappa c^2 \varrho R^2 > 3$ und für $k = 0$ unter der Bedingung $\varrho R \neq 0$.

Mehr als (1.14) ist aus (1.13) nicht herauszuholen, d.h. unter der Voraussetzung (1.12) sind (1.13) und (1.14) äquivalent. Um diese Äquivalenz einzusehen, brauchen wir nur noch von (1.12) und (1.14) auf (1.13) zu schließen. Zu diesem Zweck werden wir vorübergehend, um den Vorgang leserlicher zu machen, als Ableitung den Punkt oben durch den Strich rechts oben ersetzen. (1.12) mit R multipliziert wird damit zu

$$RR'^2 + kR - \frac{1}{3} \kappa c^2 \varrho R^3 = 0$$

⁽⁸⁾das noch derart umgestellt ist, daß in der einen Gleichung p und in der andern $c^2 \varrho$ eliminiert ist. Vergleiche dazu mit [8] (22.50), (22.51) (hier mit $\Lambda = 0$) und [11] (4), (6). Bei letzterem (A. Friedmann) ist allerdings ausschließlich $k = 1$ und $p \equiv 0$ gesetzt und für uns noch $\lambda = 0$ zu setzen.

⁽⁹⁾genauer: es soll kein $\tau > 0$ geben mit $\dot{R}(\tau) = 0$

1. Werdegang der kosmischen Feldgleichungen

Beide Seiten nach τ abgeleitet:

$$\begin{aligned} (RR'^2 + kR - \frac{1}{3}\varkappa c^2 \varrho R^3)' &= 0 \quad \curvearrowright \\ (RR'^2)' + kR' - \frac{1}{3}\varkappa c^2 (\varrho R^3)' &= 0 \quad \curvearrowright \\ 2RR'R'' + R'^3 + kR' + p \cdot \varkappa R^2 R' &= 0 \quad \text{nach (1.14)} \end{aligned}$$

Wir ersetzen jetzt wieder als Ableitung den Strich rechts oben durch den Punkt oben und erhalten wegen $\dot{R} \neq 0$ nach Division durch \dot{R} die Beziehung (1.13). Damit ist die Äquivalenz von (1.13) und (1.14) unter der Voraussetzung (1.12) gezeigt. Unsere beiden Ergebnisse (1.12) und (1.14) noch einmal zusammengefaßt:⁽¹⁰⁾

$$\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} = \frac{1}{3}\varkappa c^2 \varrho \quad \text{für } k = 1, k = -1, k = 0 \quad (1.15)$$

$$p = -c^2 \dot{\varrho} \frac{R}{3\dot{R}} - c^2 \varrho \quad (1.16)$$

Beziehung (1.15) ist unsere zu lösende Dgl. zur Auffindung von $R = R(\tau)$ bei noch nicht bekanntem $\varrho = \varrho(\tau)$. Beziehung (1.16) stimmt mit dem Energiesatz des Kosmos überein wie noch gezeigt wird. (1.15) und (1.16) sind die Friedmann-Lemaître'schen Gleichungen.

Bis hierher stimmt noch alles mit der offiziellen Lehrmeinung überein, wenn man davon absieht, daß die kosmologische Konstante hier bereits von vornherein fehlt.

Zusatz 1:

Wir wollen am Schluß dieses Kapitels noch eine weitere Schreibweise von (1.16) angeben, durch welche die Bedeutung von (1.16) ersichtlicher wird.

Mit $m := \varrho R^3$ und $V := R^3$ ist (1.16) gleichwertig mit

$$p\dot{V} + \dot{m}c^2 = 0 \quad (1.18)$$

Die Äquivalenz von (1.18) mit (1.16) ergibt sich sofort, wenn man $\dot{V} = 3R^2\dot{R}$ und $\dot{m} = \dot{\varrho}R^3 + 3\varrho R^2\dot{R}$ in (1.18) einsetzt und nach p umstellt.

Wegen $\dot{V} = \frac{dV}{d\tau}$ und $\dot{m} = \frac{dm}{d\tau}$ erhält man aus (1.18) die interessante Beziehung

$$pdV + c^2 dm = 0 \quad (1.19)$$

die wir als Energiesatz des Kosmos bezeichnen können, wobei pdV an die Thermodynamik erinnert.

⁽¹⁰⁾siehe auch noch [9] Seite 472, (19.13) und [8] Seite 466, (22.52)

1. Werdegang der kosmischen Feldgleichungen

Zusatz 2:

Aus (1.12) folgt noch:

$$\varrho = \frac{3}{\varkappa c^2} \frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} \quad (1.20)$$

Mit

$$\varrho_{krit} := \frac{3}{\varkappa c^2} \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \underline{\text{kritische Dichte}} \quad (1.21)$$

gilt somit

$$\varrho > \varrho_{krit} \quad \text{genau dann, wenn } k = 1 \quad (1.22)$$

$$\varrho < \varrho_{krit} \quad \text{genau dann, wenn } k = -1 \quad (1.23)$$

$$\varrho = \varrho_{krit} \quad \text{genau dann, wenn } k = 0 \quad (1.24)$$

Die kosmische Dichte ϱ stimmt genau dann mit der kritischen Dichte ϱ_{krit} überein, wenn $k = 0$, wenn also der räuml. Teil des Kosmos flach ist.

2. Lösung der Feldgleichungen und erste Auswirkungen

Ausgangspunkt in diesem Kapitel ist die Dgl. (1.15). Wir schreiben sie noch einmal hin:

$$\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} = \frac{1}{3} \kappa c^2 \varrho \quad \text{für } k = 1, k = -1, k = 0 \quad (2.1)$$

und beschreiten dann unseren eigenen Weg zur Ermittlung von $R = R(\tau)$ aus (2.1).

In (2.1) treten 2 unbekannte Fkt. $R = R(\tau)$ und $\varrho = \varrho(\tau)$ auf, wobei R noch mit seiner 1. Ableitung auftritt. Wir können deshalb (2.1) als Dgl. in $R = R(\tau)$ auffassen mit der rechten Seite als “Störglied”, wie in technischen Dgln. üblich. (2.1) ist sogar eine gewöhnliche Dgl. in R . Die “Störung” $\varrho = \varrho(\tau)$ ist allerdings unbekannt und muß im Kontext einer solchen Auffassung (“Dgl. mit Störglied”) vorab separat ermittelt werden.

2.1. Ermittlung der kosmischen Materiedichte $\varrho = \varrho(R)$

Wir müssen uns also die Frage stellen (unabhängig von der Dgl. (2.1)), für welchen zeitlichen Dichteverlauf $\varrho = \varrho(\tau)$ sich der Kosmos entschieden hat, d.h. wir müssen die zur Realität passende Fkt. $\varrho = \varrho(\tau)$ irgendwie ausfindig machen. Sicherlich ist die Frage vorrangiger, für welchen Dichteverlauf $\varrho = \varrho(R)$ sich der Kosmos entschieden hat, das ist der Dichteverlauf in Abhängigkeit von der kosmischen Ausdehnung. Dieser Dichteverlauf würde dann auch $\varrho = \varrho(\tau)$ implizieren, denn R hängt ja von τ ab.

Der Kosmos als rationaler Mechanismus würde sich sicherlich für den einfachsten Weg und damit für einen extremalen Dichteverlauf $\varrho = \varrho(R)$ entscheiden. Wir versuchen, seine Entscheidung nachzuvollziehen. Es muß also zuerst die Lagrangefkt. des dazugehörenden Variationsprinzips herausgefunden werden.

Die Feldgleichungen in ihrer gestrafften Form $G_l^h = -\kappa T_l^h$ sind neben dem Robertson-Walker-Linienelement als Metrikansatz (der bereits in G_l^h verwendet wird) die einzige Angabe zum System überhaupt, wobei ihre rechte Seite T_l^h die Angaben zur Physik des Systems (“ideale Flüssigkeit”) macht. Deshalb müssen wir die Feldgleichungen, insbesondere T_l^h , mit ihrer Struktur verwenden, um Aussagen über $\varrho = \varrho(R)$ zu erhalten. Insbesondere können wir die Lagrangefkt. des Variationsprinzips zur Ermittlung von $\varrho = \varrho(R)$ auch nur aus den Feldgleichungen, insbesondere aus T_l^h beziehen. Ein

2. Lösung der Feldgleichungen und erste Auswirkungen

markantes Merkmal von T_l^h ist seine Spur (denn diese ist unveränderlich gegenüber Koordinatentransformationen⁽¹⁾), die uns zu einer Fkt. führen wird, die auf Grund ihrer Besonderheit als Lagrange fkt. gedeutet werden kann.

Die Spur von T_l^h ist $T_l^l = -3p + c^2 \varrho$ (siehe (1.11)). Die Abhängigkeit $p = p(\varrho, \dot{\varrho})$ ist durch Beziehung (1.16), die sich aus den Feldgleichungen ergibt, angegeben. Mit dieser Beziehung wird die Spur von T_l^h zu

$$T_l^l = c^2 \dot{\varrho} \frac{R}{\dot{R}} + 4c^2 \varrho$$

Wegen

$$\dot{\varrho}(\tau) = \varrho'(R(\tau)) \cdot \dot{R}(\tau) \quad (2) \quad (\text{mit dem Strich rechts oben jetzt als Ableitung nach } R)$$

ergibt sich:

$$T_l^l = c^2 \cdot (\varrho' R + 4\varrho) \quad (2.2)$$

Die Spur T_l^l selbst können wir nicht als Lagrange fkt. $L = L(R, \varrho, \varrho')$ verwenden, denn dabei wäre ja

$$\frac{\partial L}{\partial \varrho} - \frac{d}{dR} \frac{\partial L}{\partial \varrho'} = c^2 \cdot (4 - 1) = 3c^2 \neq 0 \quad \text{im Widerspruch zu (2.5)}$$

Da wir annehmen, daß die Lagrange fkt. $L = L(R, \varrho, \varrho')$ so einfach wie möglich ist, wählen wir für L die 2. Potenz der Spur T_l^l , wobei wir den jetzt überflüssigen Faktor c^2 nicht mehr mitführen, und setzen

$$L := (\varrho' R + 4\varrho)^2 \quad \text{als Lagrange fkt. des Variationsprinzips } (3)$$

$$= \varrho'^2 R^2 + 8R\varrho\varrho' + 16\varrho^2 \quad \curvearrowright \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varrho} &= 8R\varrho' + 32\varrho \\ \frac{\partial L}{\partial \varrho'} &= 2R^2\varrho' + 8R\varrho \\ \frac{d}{dR} \frac{\partial L}{\partial \varrho'} &= 4R\varrho' + 2R^2\varrho'' + 8\varrho + 8R\varrho' \\ &= 12R\varrho' + 2R^2\varrho'' + 8\varrho \quad , \end{aligned}$$

so daß

$$\frac{\partial L}{\partial \varrho} - \frac{d}{dR} \frac{\partial L}{\partial \varrho'} = -4R\varrho' + 24\varrho - 2R^2\varrho''$$

⁽¹⁾Siehe [3] Seite 110

⁽²⁾nach der Kettenregel, auf der linken Seite ist ϱ als Fkt. von τ aufzufassen und auf der rechten Seite als Fkt. von R .

⁽³⁾mit dem Strich rechts oben als Ableitung nach R wie gehabt