

Mathematik-Abitur

Band 2

Analytische Geometrie Lineare Algebra

zur
Abiturvorbereitung
und zum
Selbststudium

von
Reinhold Goldmann

Inhaltsverzeichnis

Einführung	1
1. Historische Entwicklung	3
2. Vektoren	4
2.1 Vektorraum	5
2.2 Ortsvektor	5
2.3 Länge von Vektoren	5
2.4 Abstand von Punkten	6
2.5 Vektoraddition	7
2.6 Vektorsubtraktion	7
2.7 Geometrische Verschiebung	8
2.8 Einheitsvektor	9
2.9 Kollinearität	10
2.10 Komplanarität	10
2.11 Lineare Unabhängigkeit	12
3. Berechnung von Vektoren und Punkten	12
3.1 Mittelpunkt eines Vektors bzw. einer Strecke	12
3.2 Schwerpunkt eines Dreiecks	13
3.3 Punkte und Vektoren im Raum	15
4. Die Basis eines Vektorraums	17
4.1 Die kanonische Basis	17
4.2 Basisvektoren	17

5.	Skalarprodukt	18
5.1	Winkelfreie Darstellung des Skalarprodukts	20
5.2	Orthogonale Vektoren	21
5.3	Winkel zwischen Vektoren	22
6.	Vektorprodukt – Kreuzprodukt	24
6.1	Berechnung des Kreuzprodukts	25
6.2	Flächeninhalt eines Parallelogramms	26
6.3	Dreiecksfläche	26
6.4	Volumen eines Spats	27
7.	Geradengleichungen	31
7.1	Koordinatenebenen	33
7.2	Die Normalform der Geraden	34
7.3	Umwandlung Normalform in Parameterform	35
7.4	Verlauf von Geraden	37
7.5	Geradenscharen	40
7.6	Geradenbündel	43
7.7	Spurpunkte	45
7.8	Schnittwinkel von Geraden	47
7.9	Abstand von Punkten	48
8.	Ebenen	53
8.1	Parameterformen der Ebene	54
8.2	Koordinatenform der Ebene	55
8.3	Achsenabschnittsform der Ebene	56
8.4	Achsenabschnittform in Koordinatenform	57
8.5	Umwandlung Koordinaten- in Parameterform	58
8.6	Schnitt einer Geraden mit einer Ebene	59
8.6.1	Koordinatenform - Parameterform	59
8.6.2	Ebene und Gerade in Parameterform	60

8.7	Lage zweier Ebenen	62
8.7.1	Ebenen in Koordinaten- und Parameterform	62
8.7.2	Vorliegen zweier Koordinatenformen	64
8.7.3	Identität von Ebenen	65
8.7.4	Parallelität von Ebenen	66
8.8	Spurgeraden	66
8.9	Ebenenscharen und Ebenenbüschel	68
8.10	Trägergerade einer Ebenenschar	69
8.11	Normalengleichung einer Ebene	70
8.11.1	Parameter- in Normalenform	72
8.11.2	Lot eines Punktes auf eine Ebene	74
8.11.3	Spiegelung eines Punktes an einer Ebene	76
8.12	Hessesche Normalenform (HNF)	78
8.12.1	Abstand eines Punktes von der Ebene	79
8.12.2	Lage von Punkten zu einer Ebene	82
8.12.3	Abstand windschiefer Geraden	84
8.13	Schnittwinkel von Geraden und Ebene	89
8.14	Schnittwinkel zweier Ebenen	91
9.	Ausgewählte Abituraufgaben	92
	Umstrittene Abituraufgaben 2019	99
10.	Lösungen aller Aufgaben	104
	Der Autor	200

Einführung

Mit diesem Buch versucht der Autor die wichtigsten Themenbereiche der Analytischen Geometrie anschaulich und möglichst übersichtlich darzustellen. Während vieler Jahre der Vermittlung mathematischer Themen an Lernende verschiedenster Altersgruppen gab es ab und zu Verständnisschwierigkeiten, die einem Lehrenden oft nicht mehr bewusst sind. Manchmal wird ein Mathematiker aber auch durch aufmerksame Zuhörer auf einfachere Lösungswege hingewiesen, die das Verstehen mathematischer Zusammenhänge durchaus erleichtern können. Einige dieser Hinweise wurden in den Unterricht und schließlich auch in dieses Werk übernommen.

In der Mathematik können die unterschiedlichsten Wege zum Ziel führen. Deshalb ist ein verständnisvoller Lehrender stets bemüht, die sinnvollsten und einfachsten Lösungswege zu vermitteln. In dieser vorliegenden Zusammenfassung des Lehrstoffs der mathematischen Oberstufe wird daher versucht, die wichtigsten Abiturthemen möglichst verständlich und ohne komplizierte Umwege darzulegen.

Die in diesem Buch gestellten Aufgaben sollten von den Lesern selbstständig zu lösen versucht werden und erst anschließend mit dem Lösungsanhang überprüft werden. Mathematik lernt man am ehesten durch eigenes Erarbeiten. Es kann manchmal auch sinnvoll sein, einen nicht verstandenen Lösungsweg erst nach einiger Zeit nachzuvollziehen. „Manches erledigt sich durch Warten“. Dies ist im täglichen Leben, wie in der Mathematik ein hilfreiches Mittel, um Frust zu vermeiden. Anschließend

sollte man sich allerdings seiner Fehler bewusst werden, um diese künftig zu vermeiden.

Viele berühmte Mathematiker und andere heute angesehene Wissenschaftler sind immer wieder mal Irrtümern aufgesessen, die sie erst später oder teilweise nie berichtigen konnten. Was heute als selbstverständlich gelehrt wird und einem Lernenden so großartig und manchmal schwierig erscheint, konnte häufig erst nach vielen Jahren, Jahrzehnten oder gar Jahrhunderten geklärt werden. Dazu gehören Fragen zur „Quadratur des Kreises“ aus dem Altertum, das „Vierfarben-Problem“, welches erst im 21. Jahrhundert mithilfe elektronischer Rechner gelöst werden konnte, die Frage nach der Unendlichkeit von Primzahlen und viele weitere noch ungelöste Fragestellungen.

Auch die Erkenntnis und der anschließende mathematische Beweis der Unlösbarkeit einer Aufgabenstellung gehört zum Wesen der Mathematik.

Man sollte sich allerdings niemals durch Aufgabenstellungen jeglicher Art entmutigen lassen, sondern versuchen, möglichst alternative Lösungswege zu testen. Es kann durchaus Freude bereiten, ein Problem zu einem späteren Zeitpunkt gelöst oder verstanden zu haben.

Das vorliegende Lehrbuch eignet sich nicht nur für die Vorbereitung der Abiturprüfung, sondern auch für Personen, die sich in die höhere Mathematik einarbeiten möchten.

1. Historische Entwicklung

Die analytische Geometrie wurde vor allem von **René Descartes** und **Pierre de Fermat** unabhängig voneinander entwickelt.

Der Begriff „**kartesisches** Koordinatensystem“ enthält einen Teil des Namens von **Descartes**.

Seit Descartes Arbeiten werden geometrische Kurven durch Gleichungen charakterisiert.

So erhält man aus der Gleichung $y = x^2$ eine (schlichte) Parabel und eine (bestimmte) Hyperbel wird durch die Gleichung $y = x^{-1}$ beschrieben.

Die **Geometrie wird demnach mit der Algebra verbunden**. Damit ist es möglich, geometrische Probleme rechnerisch zu lösen.

Descartes setzte sich auch dafür ein, mathematische (deduktive) Methoden in der Philosophie anzuwenden. Am Schluss seines Hauptwerks „Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences“ schrieb er sinngemäß folgende Zeilen:

*„Ich hoffe, dass unsere Enkel mir nicht nur für die
Dinge Dank wissen werden,
die ich hier auseinandergesetzt habe,
sondern auch für diejenigen, die ich absichtlich
übergangen habe, um ihnen das Vergnügen zu lassen,
sie selbst zu finden.“*

Auch in dem vorliegenden Lehrbuch muss vieles in der Analytischen Geometrie Wichtige „übergangen“ werden, weil die folgende Abhandlung vor allem einer zusammenfassenden Abiturvorbereitung dienen soll.

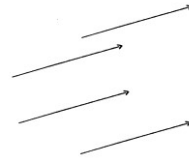
2. Vektoren

Zwei Punkte $P(p_1|p_2)$ und $Q(q_1|q_2)$ bestimmen eindeutig den Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$.

Ein Vektor (lat. Träger) wird mit einem Pfeil als $\vec{v}$ gekennzeichnet. Damit wird ausgedrückt, dass ein Vektor geometrisch als ein in bestimmter Richtung mit bestimmter Länge verlaufender Pfeil verstanden werden kann.

Beachte:

Zu jedem Vektor $\vec{v}$ gibt es unendlich viele Entsprechungen mit gleicher Länge und gleicher Richtung.



Beispiel:

B1. Welchen Vektor bestimmen die Punkte $A(2|-3)$ und $B(3|-1)$?

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ -1 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe:

(Die Lösungen aller Aufgaben sind **ab Seite 104** zu finden.)

A1. Welcher Vektor verbindet die Punkte $P(-3|4)$ und $Q(5|-2)$?

2.1 Vektorraum

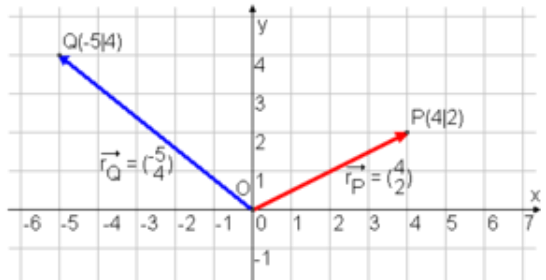
Ein Vektorraum V ist eine algebraische Menge, deren Elemente Vektoren heißen.

$$\text{z. B. } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$$

2.2 Ortsvektor

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Ein Ortsvektor verbindet den Koordinatenursprung mit einem Punkt der Ebene oder des Raumes.



2.3 Länge eines Vektors

Der Betrag eines Vektors entspricht seiner Länge.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Beispiel:

B2. Welche Länge hat der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$?

$$|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \mathbf{13 \text{ Längeneinheiten (LE)}}$$

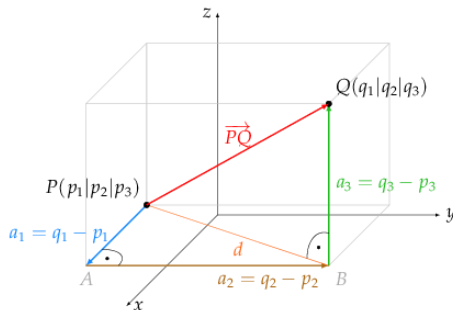
Aufgaben:

A2. Berechne die Länge des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix}$.

A3. Zeige, dass das durch die Punkte A(0|0|0), B(-4|3|5) und C(-1|7|0) aufgespannte Dreieck gleichseitig ist.

2.4 Abstand von Punkten

Abstand der dreidimensionalen Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$ und $Q(q_1|q_2|q_3)$:



$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

Beispiel:

B3. Welchen Abstand haben die Punkte $P(2|-3|1)$ und $Q(-1|3|4)$ voneinander?

$$|PQ| = \sqrt{9 + 36 + 9} \approx 7,35 \text{ LE}$$

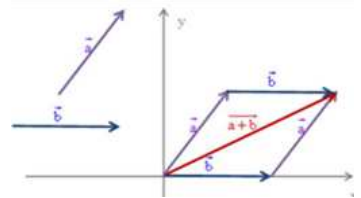
Aufgabe:

A4. Bestimme den Vektor $\overrightarrow{AB}$, den die Punkte A(1|2|3) und B(4|3|2) aufspannen und berechne den Abstand dieser Punkte voneinander.

2.5 Vektoraddition

Vektoren gleicher Dimension und gleicher Art können addiert werden.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$



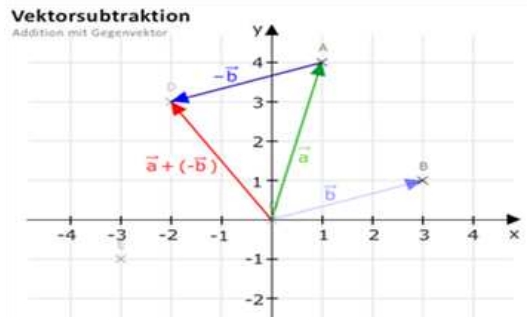
2.6 Vektorsubtraktion

Vektoren gleicher Dimension und gleicher Art können auch subtrahiert werden.

Beispiele:

B4. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



B5. Addiere und subtrahiere die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe:

A5. Addiere und Subtrahiere die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

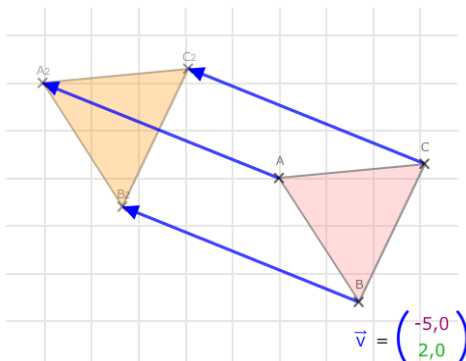
2.7 Geometrische Verschiebung

Ein Vektor kann zur Ortsveränderung von geometrischen Formen dienen, indem charakteristische Punkte durch einen Vektor verschoben werden.

Aufgabe:

A6. In welche Punkte A' , B' und C' werden die Punkte $A(1|1)$, $B(-2|3)$ und $C(4|2)$ durch den in der Skizze angegebenen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ verschoben?

Verschiebungsvektoren



2.8 Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor weist die Länge 1 auf. Dazu wird der Vektor durch seinen Betrag dividiert:

$$\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Beispiel:

B6. Berechne den Einheitsvektor des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{8^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$\vec{e} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}}{12} = \begin{pmatrix} \frac{8}{12} \\ \frac{4}{12} \\ -\frac{8}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Überprüfung auf Länge 1:

$$|\vec{e}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$

Aufgabe:

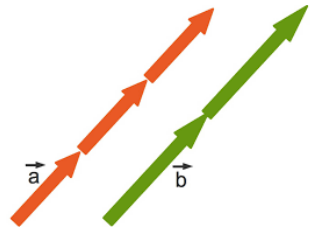
A7. Bestimme den Einheitsvektor des Vektors

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und überprüfe dessen Länge.}$$

2.9 Kollinearität

Kollineare Vektoren sind parallele oder antiparallele Vektoren. Einer der beiden Vektoren ist ein Vielfaches des anderen Vektors.

$$\vec{a} = s \cdot \vec{b}$$



Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen **linear abhängig**.

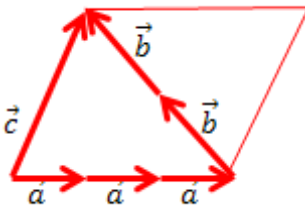
Beispiel:

$$\text{B7. } \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der linke Vektor entsteht durch Multiplikation mit einem Skalar (Zahlenwert) aus dem rechten Vektor.

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig.

2.10 Komplanarität



$$\vec{c} = 3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$$

Linearkombination dreier Vektoren.

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind **komplanar**, liegen also in einer Ebene und sind **linear abhängig**.

Mindestens ein komplanarer Vektor lässt sich als **Linearkombination** zweier Vektoren darstellen.

Beispiel:

B8. Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ komplanar?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I)} & 1 = r + 2s \\ \text{II)} & 7 = 2r - s \\ \text{III)} & 2 = r + s \end{array}$$

$$\text{II)} + \text{III)} \quad 9 = 3r$$
$$\boxed{r = 3}$$

$$r=3 \text{ in I)} \quad 1 = 3 + 2s$$
$$\boxed{s = -1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die drei Vektoren sind komplanar und damit linear abhängig.

Sollte das Gleichungssystem nicht lösbar sein, so wären die Vektoren linear **unabhängig**.

Aufgabe:

A8. Überprüfe, ob die Punkte A(5|-8|-1), B(3|-2|1) und C(2|1|2) in einer Ebene liegen, d. h. ob ihre Ortsvektoren komplanar bzw. linear abhängig sind.

2.11 Lineare Unabhängigkeit

Lassen sich Vektoren **nicht linear kombinieren**, so sind sie **linear unabhängig**.

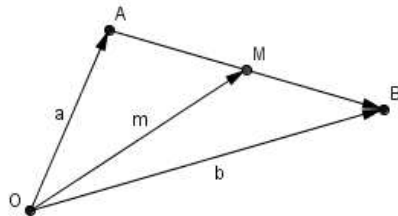
Aufgabe:

A9. Zeige, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
nicht komplanar, also linear unabhängig sind.

3. Berechnung von Vektoren und Punkten

3.1 Mittelpunkt eines Vektors bzw. einer Strecke

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$



Beispiel:

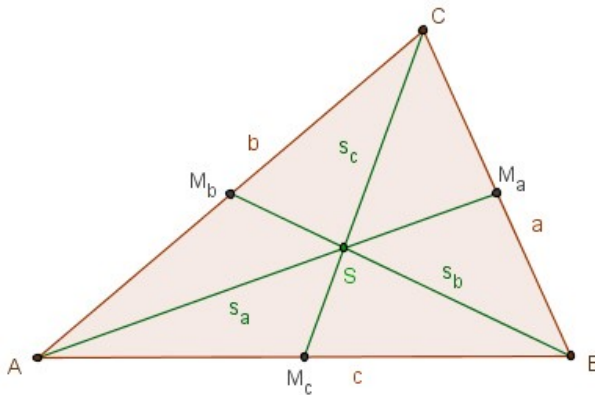
B9. Bestimme den Ortsvektor und die Koordinaten des Mittelpunkts M zwischen den Punkten P(2|-3|1) und Q(4|-1|3).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= 0,5 \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \mathbf{M(3|-2|2)} \end{aligned}$$

Aufgabe:

A10. Errechne den Mittelpunkt zwischen Punkten $A(-1|0|2)$ und $B(2|4|-3)$ und gib den zugehörigen Ortsvektor von M an.

3.2 Schwerpunkt eines Dreiecks



$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Hinweis:

Die drei **Seitenhalbierenden** eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt dieses Dreiecks.

Beispiel:

B10. Bestimme den Schwerpunkt des Dreiecks mit den Eckpunkten A(1|2|3), B(4|5|6) und C(-2|-4|-3).

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S(1|1|2)$

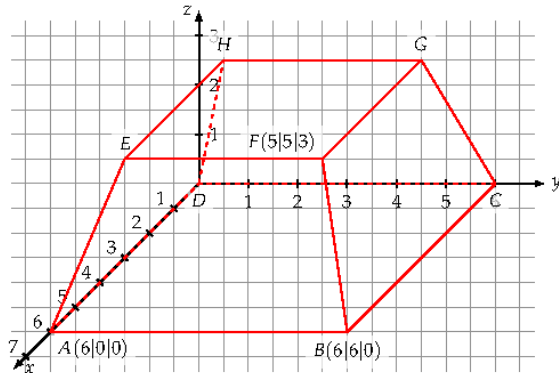
Aufgabe:

A11. Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks mit den Eckpunkten A(4|1|3), B(-1|-4|0) und C(0|-3|6) und gib den Ortsvektor von S an.

3.3 Punkte und Vektoren im Raum

Beispiel:

B11.



Im Pyramidenstumpf der Abbildung sind die Punkte $A(6|0|0)$, $B(6|6|0)$ und $F(5|5|3)$ gegeben.

- a) Welche Koordinaten weisen die restlichen Eckpunkte C, D, E, G und H auf.

Wegen der parallelen Kanten gelten: $C(0|6|0)$ und $D(0|0|0)$. Aus dem Vergleich der Punkte A, B mit F lässt sich eine „Einrückung“ um 1 und die „Höhe“ 3 erkennen: $E(5|1|3)$, $H(1|1|3)$, $G(1|5|3)$

- b) Die Vektoren $\overrightarrow{AF}$ und $\overrightarrow{BH}$ sind zu bestimmen.

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Zu B11.

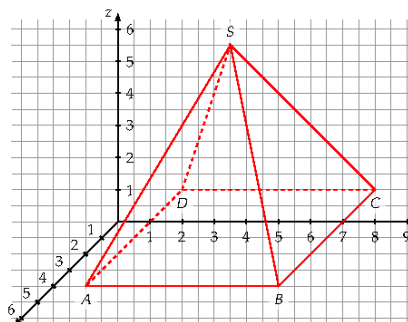
c) Welche Koordinaten hat der Mittelpunkt M der Deckfläche EFGH?

$$\overrightarrow{OM} = 0,5 \cdot (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG}) = 0,5 \cdot \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

M(3|3|3)

Aufgaben:

A12. Zur quadratischen Pyramide der Abbildung sind die Punkte A(4|1|0), C(-2|7|0) und S(1|4|6) gegeben.



a) Bestimme die Punkte B und D sowie den Mittelpunkt M der Grundfläche ABCD.

b) Berechne die Länge der Seitenkante [AS].

c) Zeige, dass die Beziehung $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MS}$ gilt.

A13. Ein Würfel mit der Kantenlänge $s = 4$ ist gegeben.

a) Gib die Koordinaten aller Eckpunkte an.

b) Wie lauten die Koordinaten der Kantenmittelpunkte S und T?

c) Bestimme die Koordinaten der Flächenmittelpunkte R und U.

d) Welche Koordinaten besitzt der Mittelpunkt M im Innenbereich?

