1 Einleitung

Elementar- und Primarbereich werden oft als »zwei getrennte Welten« (Kreid & Knoke 2011) beschrieben, die sich durch eigene Traditionen und eine unterschiedliche institutionelle Verankerung auszeichnen. Unter Berücksichtigung und Akzeptanz dieser Verschiedenheit stehen Kindergarten wie Schule in der Verantwortung, ihre Bildungsaktivitäten anschlussfähig zu gestalten, um möglichst allen Kindern die Bewältigung des Übergangs und damit eine kontinuierliche Bildungsbiografie zu ermöglichen (z. B. Roßbach 2006; Schuler et al. 2016).

Dies gilt auch und gerade für das frühe Lernen von Mathematik. Denn das beginnt nicht erst mit Schuleintritt, sondern ebenso wie das sprachliche Lernen schon lange davor. Entsprechend wird zunehmend die Bedeutung mathematischer Bildungsanlässe bereits im Kindergarten erkannt. Dabei ist aber wichtig zu betonen, dass sich solche Bildungsanlässe zwar häufig im Alltag ergeben können, dies aber noch nicht automatisch dazu führt, dass daraus tatsächlich auch Lerngelegenheiten für die Kinder entstehen (z. B. Stern 1998; Schuler 2013). Dazu benötigt es eine professionelle Lernbegleitung, die durch geeignete Impulse, Fragen und Gesprächsangebote die Kinder beim Aufbau wichtiger mathematischer Basiskompetenzen unterstützt.

Das vorliegende Buch will pädagogische Fachkräfte und Lehrpersonen im Anfangsunterricht für mathematikhaltige Situationen sensibilisieren und konkrete Vorschläge für eine kognitiv anregende, fachliche Lernbegleitung in spiel- und materialbasierten Settings liefern. Der Einsatz sog. »konstruktiver« Materialien wie auch Regelspielsituationen eignen sich hervorragend, um mathematische Lernprozesse gezielt anzuregen und zu unterstützen. Dabei ist zu beachten, dass die materialbasierten Settings gerade im freien Tätigsein ein sehr breites fachliches

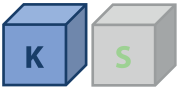
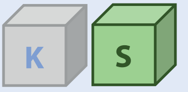
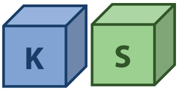
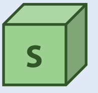
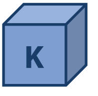
Potential aufweisen (was zugleich eine große Herausforderung für die Lernbegleitung darstellt), während die mathematischen Regelspiele festgelegte Abläufe und eine Fokussierung auf bestimmte Inhalte erlauben. Die Lernbegleitung kann entsprechend bei den Regelspielen zielgerichteter vorbereitet werden als bei den materialbasierten Settings. Dies wird auch in den Umsetzungsvorschlägen im vorliegenden Buch deutlich.

Die im Buch präsentierten Materialien und Spiele wurden aufgrund ihres Potentials für das mathematische Lernen ausgewählt, die didaktischen Anregungen sind aber grundsätzlich auch auf ähnliche Situationen bzw. weitere Materialien und Spiele übertragbar. Ein solcher Transfer ist auch deshalb sinnvoll, weil so subjektiv bedeutsame Erfahrungen von Kindern in aktuellen Spiel- und Lernanlässen gezielt aufgegriffen und für weiterführende mathematische Lernsituationen genutzt werden können.

Das Buch umfasst einen Theorie- und einen Praxisteil: Der Theorieteil (▶ Kap. 2) beinhaltet Überlegungen zu kindgerechten und anschlussfähigen Zugängen zum frühen Lernen von Mathematik, stellt zentrale mathematische Kompetenzbereiche vor und begründet die Notwendigkeit einer fachlichen Lernbegleitung. Im Praxisteil stellt Christine Streit zunächst materialbasierte Settings am Beispiel von vier ausgewählten Materialien vor, die allesamt ein hohes Potential für das mathematische Lernen haben (▶ Kap. 3). Anhand von ausgewählten arithmetischen und geometrischen Regelspielen wird in Kapitel 4 von Stephanie Schuler aufgezeigt, wie in solchen Spielsettings eine fachliche Lernbegleitung gelingen kann (▶ Kap. 4).

Die in Kapitel 3 und 4 vorgestellten Spiel- und materialbasierten Lernsettings wurden im Kindergarten sowie im Anfangsunterricht (erstes und zweites Schuljahr) erprobt. Die meisten Settings sind sowohl im Kindergarten als auch in der Schule einsetzbar (und natürlich auch in institutionenübergreifenden Gruppen), haben aber ggf. eine Priorisierung. Einige Settings sind ausschließlich für den Kindergarten oder für die Schule ausgewiesen.

Die Einteilung ist durch entsprechende Symbole gekennzeichnet:

Lernsetting für KiTA und Schule mit Schwerpunkt KiTA	
Lernsetting für KiTA und Schule mit Schwerpunkt Schule	
Lernsetting für KiTa und Schule	
Lernsetting für die Schule	
Lernsetting für die KiTa	

Onlinematerial

Online werden verschiedene Dokumente wie Kopiervorlagen, Skripte zur Lernbegleitung und Spielvarianten zu den hier beschriebenen Materialien und Spielen zur Verfügung gestellt. Im Text wird jeweils auf das Onlinematerial (OM) verwiesen. Das Material finden Sie hier: https://dl.kohlhammer.de/978-3-17-035693-1.

Die Autorin Stephanie Schuler stellt Skripte zur Lernbegleitung (▶ Kap. 4) gerne zur Verfügung (stephanie_schuler@uni-landau.de).

2 Mathematik lernen in KiTa und schulischem Anfangsunterricht – kindgerecht und anschlussfähig

Mathematisches Lernen im Übergang vom Kindergarten zur Schule zeichnet sich aus durch das Spannungsfeld zwischen Anschlussfähigkeit in Bezug auf das fachliche Lernen und der Orientierung an der Lebenswelt sowie den individuellen Vorerfahrungen bzw. Interessen der Kinder. Dabei besitzt das vorschulische Lernen eine eigene Bedeutung, weshalb die spezifischen Traditionen des Kindergartens im deutschsprachigen Raum nicht ignoriert werden, sondern durchaus auch im Hinblick auf mögliche Impulse für das schulische Lernen positiv eingebracht und weiterentwickelt werden sollen (van Oers 2004, 2010). Während im Kindergarten die Lernangebote oftmals an fachübergreifenden Themen orientiert sind oder situativ von konkreten Aktivitäten der Kinder ausgehen, spielt mit Schuleintritt zunehmend der klassische Fächerkanon im Lernalltag der Kinder eine wichtige Rolle. Allerdings bieten sich auch im mathematischen Anfangsunterricht der Grundschule vielfältige Möglichkeiten, offene spiel- und materialbasierte Lernsettings für das fachliche Lernen produktiv zu nutzen.

Die Gestaltung und Begleitung solch offener Lernarrangements ist allerdings nicht banal, sondern erfordert vielfältige Fähigkeiten: So muss die pädagogische Fach- bzw. Lehrperson einerseits die mathematischen Ideen ›hinter‹ den Materialien bzw. das mathematische Potential eines Spiels erkennen. Andererseits müssen die Vorkenntnisse und Voraussetzungen der einzelnen Kinder mit dem Wissen über den Aufbau mathematischer Konzepte abgeglichen werden, um schließlich – darauf basierend – durch adäquate Impulse, Frage- oder Aufgabenstellungen echte mathematische Lerngelegenheiten für die Kinder entstehen zu lassen (Streit 2017a).

2.1 Zugänge zur Mathematik

Frühes Mathematiklernen gilt inzwischen als ein Glied einer lebenslangen Bildungskette (Heinze & Grüßing 2009). Entsprechend herrscht weitgehend Konsens, dass auch bereits der Kindergarten in altersgemäßer Form einen mathematischen Bildungsauftrag hat. Der Austausch zwischen den Institutionen erleichtert den Kindern den Übergang vom Kindergarten in die Grundschule und schafft die Voraussetzung für eine kontinuierliche (mathematische) Lernbiografie ohne Brüche (Gasteiger & Benz 2012; Meyer-Siever, Schuler & Wittmann 2015).

Die Zugänge zur Mathematik werden daher nicht unter dem Aspekt der Unterschiede zwischen Kindergarten und Schule beleuchtet, sondern die Ausführungen berücksichtigen v. a. die Gemeinsamkeiten beim Lernen von Mathematik in der Altersgruppe der 4- bis 8-Jährigen.

2.1.1 Orientierung am Kind und am Fach

Man geht heute davon aus, dass erfolgreiches Mathematiklernen entscheidend davon abhängt, inwiefern fachliche Angebote und Herausforderungen den jeweiligen Entwicklungs- und Lernstand, aber auch die individuellen Voraussetzungen und subjektiven Bedeutsamkeiten der Kinder berücksichtigen. Mathematische Lernangebote im Kindergarten und im Anfangsunterricht der Grundschule sollten also so gestaltet werden, dass Kinder dazu angeregt werden, sich auf ihrem Niveau mit grundlegenden Ideen und Prinzipien der Mathematik auseinanderzusetzen (Wittmann 2005; Gasteiger 2017). Doch was sind eigentlich grundlegende Ideen der Mathematik? Dazu ist es hilfreich, zunächst zu klären, was Mathematik eigentlich ausmacht, bevor in Kapitel 2.2 auf konkrete Inhalte und Leitideen eingegangen wird.

Mathematik ist eine Fähigkeit des menschlichen Geistes, Konkretes zu abstrahieren und mit Symbolen zu arbeiten. So gesehen ist Mathematik eine Sprache, die der Erschließung bzw. Ordnung, Beschreibung und Vereinfachung realer Zustände und Beziehungen dient: *Wie verteilen wir zehn Äpfel (gerecht) auf 20 Kinder*? So ist es nicht nötig, die Äpfel tatsächlich in Stücke zu schneiden und auszuprobieren, wie viel jedes Kind erhält. Wir wenden (vielleicht intuitiv) die Division $10:20=0{,}5$ an – wir *mathematisieren* also die Sachsituation mithilfe der mathematischen Sprache – um zu erkennen, dass wir die Äpfel halbieren müssen, also jedes Kind einen halben Apfel erhält. In diesem Beispiel kommt der Anwendungsbezug der Mathematik zum Tragen. Dieser lässt sich didaktisch nutzen, indem mathematische Inhalte mit für Kinder bedeutsamen Alltagssituationen und -kontexten verbunden werden. Dabei werden einerseits konkrete Objekte eingesetzt, um mathematische Ideen zu verstehen, anderseits dient die Mathematik dazu, Alltagsprobleme zu lösen. Nicht jede für Kinder bedeutsame Situation muss aber einen Anwendungsbezug aufweisen. Wenn Kinder geometrische Muster legen oder Zahlenfolgen erforschen, dann kommt der innermathematische Aspekt zum Tragen: Es geht primär um das (intuitive) Finden und Beschreiben von Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen, die über die konkreten Phänomene hinausweisen, also auf die mathematische Struktur. Für das Lernen von Mathematik bedeutet dies, dass Mathematik als geistiges Konstrukt auch gerade darauf beruht, sich von der Anwendung zu lösen und in sich selbst sinnstiftend sein zu können.

Mathematik wird auch als eine Wissenschaft beschrieben, die Muster hinsichtlich ihrer Eigenschaften und Strukturen untersucht (Wittmann 2005). Entsprechend geht es beim mathematischen Denken u. a. um die Fähigkeit, Muster zu erkennen, fortzusetzen, zu verändern und zu erzeugen. Mithilfe von Mustern lassen sich Beziehungen zwischen mathematischen Objekten beschreiben. Das Erforschen von Mustern ist eine Tätigkeit, die Kinder schon früh und mit natürlicher Begeisterung vollziehen. Darin wird zugleich der explorative und prozesshafte Charakter der Mathematik deutlich: Mathematik ist kein Fertigprodukt, keine bloße Ansammlung von Wissen und Können, sondern eine menschliche Aktivität, eine Tätigkeit, eine Geisteshaltung (Freudenthal 1982).

Die Objekte der Mathematik sind abstrakte Ideen bzw. gedankliche Konstrukte, die vom sinnlich Wahrgenommen gelöst sind. Mathematische Ideen können reale Sachverhalte beschreiben, aber reale Objekte können immer nur näherungsweise *quadratisc*h, *symmetrisch* oder *gleich lang* sein, sie stellen Modelle bzw. Repräsentanten mathematischer Objekte dar. Die Verständigung über mathematische Objekte geschieht über vereinbarte

Symbole. So bestehen in Bezug auf die mathematische Idee *Zahl* die zugehörigen symbolischen Zeichen aus den *Ziffern* 0 bis 9. Die Begriffe Zahl und Ziffer bedeuten dabei etwas völlig Unterschiedliches: Das mathematische *Symbol* – in diesem Fall die Ziffer – stellt noch keine Mathematik dar. Mathematik betreiben wir erst, wenn wir die Symbole lesen können und mit einer Vorstellung von dem abstrakten Begriff *Zahl* verbinden. Bspw. gehört zur Ziffer 8 die Vorstellung, was eine Menge von acht Elementen bedeutet, inwiefern die Acht als Ordnungszahl das *achte* Auto in einer Reihe beschreibt, aber auch dass die Zahl Acht der Nachfolger von sieben und der Vorgänger von neun ist oder sie sich in verschiedene Teile wie z. B. vier und vier oder fünf und drei zerlegen lässt.

Ebenso wie die Fähigkeit, eine Sprache zu erwerben, ist uns eine grundlegende Fähigkeit zum mathematischen Denken angeboren, die sich in der aktiven Auseinandersetzung mit der Umwelt entwickelt. Es handelt sich dabei um einen kontinuierlichen Prozess, der aber nicht linear abläuft. Zwar folgt er grundlegenden Entwicklungslinien, erfährt aber äußerst unterschiedliche Ausprägungen und erfolgt in unterschiedlichen Geschwindigkeiten, was die bestehende Heterogenität erklärt.

Der Prozess beginnt im Prinzip mit der Geburt – auf jeden Fall schon lange vor Schuleintritt. Solche frühen Fähigkeiten müssen nicht aktiv erlernt werden – man spricht auch von *intuitiver* Mathematik (Stern 1998). So zeigen wir eine gewisse Leichtigkeit und Beweglichkeit im Umgang mit Mustern und Strukturen, weshalb oft betont wird, dass wir über eine Art von *Mustersinn* verfügen. Forschungsarbeiten geben Hinweise darauf, dass diese Fähigkeit zum Umgehen mit Mustern eine wichtige Voraussetzung für erfolgreiches Mathematiklernen darstellt (Lüken 2012). Intuitive Konzepte zeigen sich auch im Umgang mit Mengen bzw. Anzahlen. Der sog. *Zahlensinn* (Dehaene 1999) meint eine wahrscheinlich angeborene numerische Fähigkeit, kleine Anzahlen und deren Beziehungen wahrnehmen und verstehen zu können, sowie eine Fähigkeit zur ungefähren Mengenpräsentation bei größeren Anzahlen. So sind wahrscheinlich bereits Säuglinge in der Lage, die Anzahl von Objekten im Rahmen kleiner Zahlenräume zu erfassen. Nun ist es aber leider nicht so, dass wir diese Fähigkeiten automatisch auf größere Anzahlen übertragen können, also dass sich aus solch einem intuitiven Wissen automatisch komplexere mathematische Vorstellungen entwickeln. Die angeborenen Fähigkeiten sind eine notwendige, aber keine hinreichende Voraussetzung zum Erlernen der *kulturellen* Mathematik (Stern 1998). Dazu sind spezifische Erfahrungen und gezielte Lernangebote nötig. Viele Alltagssituationen sind potentiell *mathematikhaltig*, aber sie müssen als Lernanlass entdeckt werden. Gerade der mathematische Aspekt einer Situation ist nicht immer der naheliegende, was wiederum auch damit zusammenhängt, dass mathematische Objekte und Begriffe immer theoretischer Art sind und die Mathematik in eine konkrete Situation und einen realen Gegenstand erst *hineininterpretiert* werden muss. Es braucht daher Materialien und Lernarrangements, die potentiell mathematikhaltig sind, aber auch eine professionelle Unterstützung, um den mathematischen Gehalt einer Situation bewusst erfahren und so für Lernerfahrungen nutzbar machen zu können. Dies ist eine wichtige Voraussetzung dafür, dass der Übergang von intuitiven mathematischen Präkonzepten zur *kulturellen* Mathematik problemlos gelingt.

2.1.2 Situative Unterstützung und adaptive Instruktionen

Nach heutigem Kenntnisstand ist Lernen ein Prozess, bei dem das Individuum – ausgehend von bedeutungstragenden Kontexten und in Auseinandersetzung mit seiner Umwelt – aktiv Wissen konstruiert. Aus mathematikdidaktischer Perspektive herrscht weitgehend Konsens darüber, dass frühe mathematische Bildung v. a. als alltagsintegrierte und situative Förderung mathematischer Basiskompetenzen gestaltet werden sollte, die dem Kind durch geeignete Lernanlässe vielfältige und individuelle Zugänge zur Mathematik ermöglicht (z. B. Gasteiger 2012). Für den Mathematikunterricht der Grundschule wurden verschiedene Ansätze entwickelt, die individuelle Denk- und Lernwege in der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen als Voraussetzung für vertieftes Verständnis ansehen – Beispiele dafür sind sog. *mathematischen Lernumgebungen* (z. B. Hengartner 2006) oder *Eigenproduktionen* (z. B. Selter 1995). Die Betonung der Eigenaktivität der Lernenden bedeutet allerdings nicht, dass eine Unterstützung durch die Lehrenden nicht wichtig sei. Man geht heute davon aus, dass *Instruktionen* im weiteren Sinn in passenden Momenten sehr bedeutsam für erfolgreiches Lernen sind. Für die Altersstufe der 4- bis 8-Jährigen gibt es allerdings nur wenige Forschungsergebnisse. Bekannt ist aber, dass jüngere Kinder über ein geringeres Vorwissen verfügen, an das sie anknüpfen können, und die Kapazität des Arbeitsgedächtnisses beschränkt ist. Aus diesem Grund ist davon auszugehen, dass Instruktionen im Sinne von Belehrungen bzw. Erklärungen bei Kindern dieser Altersstufe weniger erfolgreich sind als bei älteren Kindern und Jugendlichen (Roßbach et al. 2010). Bei jüngeren Kindern wird daher die *Passung* der Instruktion besonders betont. Solch eine *adaptive Instruktion* (Beck et al. 2008) berücksichtigt die individuellen Lernvoraussetzungen des Kindes und ist wesentlicher Bestandteil einer professionellen Lernbegleitung (▶ Kap. 2.3.2).

2.1.3 Spielbasierte Zugänge

Im Übergang vom Kindergarten in die Grundschule stellt sich die Frage, wie Mathematiklernen konkret gestaltet werden soll. Für den Kindergarten können im Wesentlichen zwei Ansätze frühen Mathematiklernens unterschieden werden (Gasteiger 2010; Schuler 2013): (1) Spielbasierte und integrative Ansätze, die auf eine Förderung aller Kinder im Kindergartenalltag in Bezug auf verschiedene mathematische Leitideen zielen, sowie (2) Lehrgänge und (Förder-)Programme, die nur bestimmte Kinder (häufig sog. Risikokinder) in ausgewählten Bereichen (insbesondere numerische Kompetenzen) in alters- oder leistungshomogenen Settings gezielt fördern. Im Hinblick auf die Wirksamkeit der beiden Ansätze gibt die aktuelle Befundlage noch wenige Hinweise. In Bezug auf den Vergleich *Einsatz von Lernspielen* und *Einsatz von Programmen zur Förderung numerischer Kompetenzen* lässt sich folgende Aussage treffen: Beide Ansätze sind mit Blick auf zentrale numerische Vorerfahrungen vergleichbar wirksam (Hauser et al. 2014). Dieser Befund macht deutlich, dass Spielen und Lernen insbesondere bei jungen Kindern keine Gegensätze darstellen, sondern auch im Spiel gelernt wird. Für das Lernen von Mathematik ist dabei das mathematische Potential des Spiels entscheidend, da es die mathematischen Lerngelegenheiten bestimmt (z. B. Gasteiger, Obersteiner & Reiss 2015; Jörns et al. 2014; Ramani & Siegler 2008). Entsprechend werden in Kapitel 4 Spiele mit mathematischem Potential vorgestellt. Für spielbasierte Ansätze spricht darüber hinaus, dass sich diese Art des Lernens langfristig positiv auf die schulischen Kompetenzen und die spätere schulische Motivation auswirkt (Marcon 2002; Stipek et al. 1995). Des Weiteren wissen wir, dass in spielbasierten Zugängen mathematisches Kommunizieren und Argumentieren durch eine entsprechende Lernbegleitung angeregt werden kann (Schuler 2013; Schuler & Sturm 2019) und die Lernentwicklungen in Spielsettings günstiger verlaufen als in anderen mathematischen vorschulischen Ansätzen (Hertling 2020). Aber auch zu Schulbeginn haben spielbasierte Zugänge durchaus ihre Berechtigung. So zeigen sich beim Einsatz von Spielen zu Schulbeginn vergleichbare Lernzuwächse wie in unterrichtlichen Settings (Floer & Schipper 1975; Sturm & Schuler 2019).

2.2 Leitideen für anschlussfähiges Lernen

Ein Blick in nationale wie internationale Curricula (also Orientierungs-, Lehr- oder Bildungspläne bzw. -standards) für den Kindergarten und den Anfangsunterricht der Grundschule zeigt eine große Übereinstimmung zwischen den Ländern: Die Beschäftigung mit Zahlen, Operationen, geometrischen Formen, räumlichen Beziehungen sowie der Umgang mit Daten und Größen werden als zentrale Leitideen angesehen, die einerseits einen kindgerechten Zugang ermöglichen, zugleich aber anschlussfähig sind für das fachlichen Lernen auch in höheren Klassenstufen (Benz et al. 2015). Für die frühe mathematische Bildung wird teilweise eine Fokussierung auf die arithmetischen und geometrischen Basiskompetenzen empfohlen (Wittmann & Müller 2010; Schuler & Wittmann 2020). Da die Potentiale der in diesem Buch vorgestellten spiel- und materialbasierten Lernsettings v. a. in diesen beiden Bereichen liegen, beschränken wir uns im Folgenden auf *Zahlen und Mengen* sowie *Raum und Form*, was nicht heißt, dass dem Umgang mit Daten und Größen keine Bedeutung zugemessen wird.

Zugänge zur Mathematik erfahren die Kinder auch über (schöne) Muster: Mit Blick auf die Mathematik als Wissenschaft von den *Mustern und*